

А.М. ФОРМАЛЬСКИЙ

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ  
НЕУСТОЙЧИВЫХ  
ОБЪЕКТОВ



**А.М. ФОРМАЛЬСКИЙ**

**УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ  
НЕУСТОЙЧИВЫХ  
ОБЪЕКТОВ**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®  
2014

УДК 681.5.01+531.53

ББК 32.816

Ф 79

**Формальский А. М. Управление движением неустойчивых объектов.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 232 с. — ISBN 978-5-9221-1460-8.

Изучается проблема управления системами, содержащими неустойчивый объект. Развита методика синтеза управления системами со степенью неустойчивости не более двух. Построены алгоритмы управления, реализующие максимальную область притяжения для ряда механических объектов. Описаны результаты некоторых экспериментов.

Книга может быть полезна научным работникам и инженерам, занимающимся проблемами управления, робототехники, мехатроники, а также аспирантам и студентам соответствующих специальностей.

ISBN 978-5-9221-1460-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© А.М. Формальский, 2014

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава 1. Однозвенный физический маятник . . . . .</b>	<b>13</b>
§ 1. Маятник с неподвижной точкой подвеса . . . . .	14
1. Уравнения движения . . . . .	14
2. Область управляемости . . . . .	16
3. Максимизация области притяжения . . . . .	18
4. Запоздывание в цепи обратной связи . . . . .	22
5. Нелинейное управление . . . . .	25
6. Область управляемости для нелинейной модели . . . . .	27
§ 2. Маятник с точкой подвеса на колесе . . . . .	30
1. Уравнения движения . . . . .	31
2. Область управляемости . . . . .	33
3. Максимизация области притяжения . . . . .	37
4. Нелинейное управление . . . . .	39
§ 3. Маятник с маховиком . . . . .	40
1. Устройство маятника с маховиком . . . . .	41
2. Уравнения движения . . . . .	42
3. Локальная стабилизация маятника в верхнем неустойчивом положении равновесия . . . . .	45
4. Гашение угловой скорости маховика . . . . .	52
5. Раскачивание и торможение маятника . . . . .	54
6. Перевод маятника из нижнего положения равновесия в верхнее . . . . .	57
7. Численные исследования . . . . .	58
8. Экспериментальные исследования . . . . .	60
§ 4. Управление качением колеса при помощи маятника . . . . .	61
1. Математическая модель аппарата . . . . .	62
2. Стационарные режимы движения . . . . .	65
3. Устойчивость стационарных режимов . . . . .	69

§ 5. Оптимальное раскачивание и торможение качелей. . . . .	70
1. О синтезе оптимального управления в системах второго порядка	70
2. Математическая модель качелей . . . . .	75
3. Максимизация амплитуды колебаний качелей . . . . .	76
4. Минимизация амплитуды колебаний качелей . . . . .	79
5. Управление качелями при учёте аэродинамического сопротивления и сухого трения . . . . .	82
§ 6. Управление маятником с минимальными затратами энергии . . . . .	83
1. Оценка энергетических затрат . . . . .	83
2. Приведение маятника в состояние неустойчивого равновесия . . . . .	86
3. Приведение маятника в состояние устойчивого равновесия . . . . .	93
Глава 2. Двухзвенный физический маятник . . . . .	102
§ 7. Локальная стабилизация перевёрнутого маятника при помощи одного управляющего момента . . . . .	103
1. Математическая модель маятника . . . . .	103
2. Линеаризованная модель . . . . .	105
3. Области управляемости . . . . .	107
4. Синтез обратной связи, максимизация области притяжения . . . . .	112
5. Численные исследования . . . . .	119
§ 8. Синтез оптимального управления раскачиванием и торможением двойного маятника . . . . .	124
1. Математическая модель . . . . .	125
2. Приведённый угол . . . . .	127
3. Оптимальное управление, раскачивающее маятник . . . . .	129
4. Оптимальное управление, тормозящее маятник . . . . .	134
5. О перемещении маятника из нижнего положения равновесия в верхнее . . . . .	137
§ 9. Глобальная стабилизация перевёрнутого маятника с управлением в межзвенном шарнире . . . . .	141
1. Математическая модель . . . . .	142
2. Каскадная форма динамических уравнений . . . . .	143
3. Управление, раскачивающее маятник . . . . .	145
4. Отслеживание желаемого изменения межзвенного угла . . . . .	145
5. Локальная стабилизация перевёрнутого маятника . . . . .	146
6. Численные исследования . . . . .	147
§ 10. Глобальная стабилизация перевёрнутого маятника с управлением в точке подвеса . . . . .	149
1. Математическая модель . . . . .	150
2. Раскачивание маятника . . . . .	151
3. Распрямление маятника . . . . .	151

---

4. Линейная модель, локальная стабилизация . . . . .	154
5. Численные исследования . . . . .	158
§ 11. Многозвенный маятник на подвижном основании . . . . .	161
1. Многозвенный маятник на колесе . . . . .	162
2. Однозвенный маятник на колесе . . . . .	165
3. Глобальная стабилизация перевёрнутого маятника . . . . .	168
4. Область управляемости . . . . .	172
5. Синтез траекторий, оптимальных по времени . . . . .	173
6. Маятник на тележке . . . . .	175
7. Об уменьшении частот при наложении связи . . . . .	176
Глава 3. <b>Шар на стержне</b> . . . . .	178
§ 12. Стабилизация шара на прямолинейном стержне . . . . .	178
1. Математическая модель системы . . . . .	179
2. Линеаризованная модель . . . . .	181
3. Построение обратной связи . . . . .	183
4. Численные исследования . . . . .	186
§ 13. Стабилизация шара на криволинейном стержне . . . . .	191
1. Математическая модель системы . . . . .	191
2. Линеаризованная модель . . . . .	194
3. Обратная связь . . . . .	196
4. Численные исследования . . . . .	198
Глава 4. <b>Гироскопическая стабилизация двухколёсного велосипеда</b> . . . . .	203
§ 14. Конструкции велосипедов . . . . .	203
1. Велосипед с одним управляемым колесом . . . . .	204
2. Велосипед с двумя управляемыми колёсами. . . . .	208
3. Гироскопический стабилизатор. . . . .	209
4. Уравнения колебаний велосипеда по крену . . . . .	211
§ 15. Синтез закона управления (стабилизации) велосипеда по крену . . . . .	213
1. Измерение угла крена велосипеда с помощью акселерометров. . . . .	213
2. Движение велосипеда по прямой . . . . .	214
3. Движение велосипеда по окружности . . . . .	216
4. Численные и экспериментальные исследования. . . . .	219
Список литературы . . . . .	221

## Предисловие

Существуют объекты, у которых в отсутствие управления желаемый режим работы неустойчив. Таким объектом является сравнительно недавно изобретенное индивидуальное транспортное средство типа «Segway» [143], которое вместе с пассажиром на борту представляет собой неустойчивый перевёрнутый маятник на колёсной паре. Большинство звеньев двуногого антропоморфного шагающего механизма, так же как и его прототипа — человека, представляют собой неустойчивые перевёрнутые маятники. К подобным объектам относятся и летательные аппараты, у которых центр давления расположен впереди центра масс. Летательный аппарат с большим запасом статической устойчивости, когда центр давления расположен «далеко» позади центра масс, не может быть манёвренным. Для увеличения манёвренности, которая необходима в ряде ситуаций, требуется уменьшить запас устойчивости аппарата, а иногда даже «выйти» в область неустойчивости. Задачи стабилизации нужного режима функционирования возникают при конструировании экзоскелетона, а также различных неустойчивых систем в магнитном или электростатическом подвесе.

Если в отсутствие управления нужный режим функционирования объекта устойчив, т. е. этот объект собственно устойчив [43], то задача системы управления состоит в улучшении качества переходных процессов, возникающих при отклонениях объекта от желаемого режима под воздействием внешних возмущений. Если же в отсутствие управления желаемый режим работы неустойчив, т. е. объект собственно неустойчив, то перед системой управления на первый план выдвигается более ответственная задача, состоящая в стабилизации желаемого режима. При этом нужный режим функционирования объекта вообще невозможно реализовать в отсутствие системы управления, а что касается вопроса о качестве переходных процессов, то он отодвигается на второй план.

Задача синтеза управления неустойчивым объектом, стабилизации нужного режима его работы сопряжена с определёнными трудностями. Дело в том, что во всякой реальной системе ресурсы управления так или иначе ограничены, поэтому неустойчивый объект может быть выведен на нужный режим работы не из всякого состояния [70, 77]. Другими словами, множество состояний, из которых при заданных ресурсах управления объект можно вывести на желаемый режим, занимает часть фазового пространства. Это множество принято называть областью управляемости. Область притяжения желаемого

режима работы, возникающая при построении *конкретного* закона управления, например, в виде обратной связи, принадлежит области управляемости; чаще всего она занимает лишь часть последней. Здесь областью притяжения, как обычно, называется множество начальных состояний, из которых управляемая система асимптотически стремится к желаемому режиму. Если область притяжения оказывается малой по сравнению с практически возможными возмущениями движения объекта, то желаемый режим функционирования объекта *практически* нереализуем. Область притяжения может оказаться малой, когда ресурсы управления недостаточны, либо когда закон управления построен не лучшим образом. Таким образом, при заданных ограничениях на ресурсы управления весьма важной оказывается проблема построения управления, при котором достигается максимально возможная область притяжения. Подобная проблема рассматривается в настоящей книге.

Значительные трудности вызывает обычно задача построения управления объектами, в которых число управляющих воздействий меньше числа степеней свободы. В этом случае про объект говорят, что у него *дефицит* числа управлений. В англоязычной литературе такой объект называют *under-actuated object*. К таким объектам относятся маятниковые системы, шагающие механизмы, у которых приводы установлены только в межзвенных шарнирах. Животные, человек также могут перемещать «звенья» своего тела только одно относительно другого. Однако делают они это так, чтобы внешние силы, возникающие при относительном движении, — силы взаимодействия с окружающей средой, гравитационные силы — осуществляли движение тела как целого желаемым образом. Например, ходьба, бег животных, ползание пресмыкающихся происходят благодаря силам трения с опорной поверхностью. Животные организуют надлежащие воздействия этих внешних сил при относительном движении звеньев тела. Человек управляет колебаниями качелей вокруг точки подвеса, перемещаясь на них подходящим образом, в то время как в точке подвеса качелей отсутствует какой-либо внешний управляющий момент. Гимнаст раскачивается на перекладине, управляя преимущественно углом в тазобедренном суставе; момент в запястном суставе при этом весьма мал. В обоих последних случаях человек надлежащим образом использует силу тяжести.

В настоящей монографии, которая состоит из четырёх глав, рассматриваются в основном задачи управления неустойчивыми системами с дефицитом числа управляющих воздействий. Здесь исследуется ряд конкретных задач. Однако подходы к синтезу управления, используемые для решения этих задач, можно, по мнению автора, применить и при рассмотрении других проблем. Некоторые выводы, сделанные на основе исследования сравнительно простых задач, применимы и к более сложным.

Подходы к синтезу управления неустойчивыми системами, развитаемые в настоящей монографии, базируются на методах теории



оптимального управления. При этом используется аппарат областей достижимости, областей управляемости. Развита методика синтеза управления системами, степень неустойчивости которых не превышает двух. В большинстве рассматриваемых задач управление, стабилизирующее желаемый режим работы объекта, строится таким образом, что все ресурсы, которыми обладает система, используются для подавления неустойчивых мод движения. При таком способе синтеза управления максимизируется область притяжения желаемого режима работы. В книге решаются задачи как локальной, так и глобальной стабилизации. При решении задач глобальной стабилизации приходится строить существенно нелинейные законы управления. В ряде случаев при синтезе законов управления привлекаются интуитивные соображения.

*Глава 1* посвящена исследованию задач управления однозвенным маятником. Начинается она с рассмотрения (§ 1) перевёрнутого однозвенного маятника с неподвижной точкой подвеса. В этой точке приложен ограниченный по абсолютной величине управляющий момент. Рассматривается вопрос о стабилизации опрокинутого маятника. Построены область управляемости и закон управления, при котором область притяжения неустойчивого состояния равновесия является максимально возможной. Изучается влияние запаздывания в цепи обратной связи на устойчивость процесса стабилизации. Оценка этого влияния представляет интерес не только для рассматриваемой системы, но и для изучаемых далее. После рассмотрения этой задачи об управлении *простейшим* маятником с неподвижной точкой подвеса в § 2 исследуется вопрос о стабилизации опрокинутого маятника, точка подвеса которого расположена в центре колеса, способного катиться без проскальзывания по опорной поверхности. Управление маятником осуществляется при помощи привода, ротор которого жёстко скреплён с маятником, а статор — с колесом. Это — уже система с двумя степенями свободы и с одним «внутренним» управляющим моментом, который, как и в предыдущей задаче, считается ограниченным по абсолютной величине. Оказывается, что область управляемости для маятника на колесе больше, нежели для маятника с неподвижной точкой подвеса. Получены соотношения, позволяющие оценить влияние различных параметров — как маятника, так и колеса — на величину области притяжения неустойчивого состояния равновесия. Задача об управлении маятником на колесе представляет не только чисто теоретический интерес. Она, по-видимому, может найти приложение и к проблеме синтеза управления транспортным средством типа «Segway».

В § 3 снова рассматривается маятник с неподвижной точкой подвеса. Однако на конце маятника смонтирован маховик, управляемый электродвигателем, статор которого жёстко скреплён с маятником, а ротор — с маховиком. Другими словами, в отличие от § 2, где рассматривается движение маятника на колесе, в § 3 изучается движение колеса (маховика) на маятнике. Обе системы имеют две степени

свободы, и их математические модели близки. Управляющим параметром в системе «маятник + маховик» является ограниченное по значению напряжение, которое подаётся на электропривод. Решается задача синтеза управления маховиком, при котором маятник из нижнего устойчивого положения равновесия переводится в верхнее неустойчивое и стабилизируется в нём. Тем самым решается задача глобальной устойчивости перевёрнутого маятника, поскольку в нижнее положение равновесия его нетрудно перевести из любого начального состояния. Описаны результаты — как математического моделирования, так и экспериментальные. Последние подтверждают эффективность построенного закона управления. Маховичные системы могут быть использованы для подавления колебаний грузов, подвешенных на тросе к стреле подъёмного крана. Подобные системы стабилизации могут применяться также для увеличения области устойчивости башенных кранов. Гиродины, которые представляют собой по существу маховичные системы, используются для управления ориентацией спутников Земли.

В § 4 изучается возможность качения колеса по опорной поверхности путём отклонения от вертикали маятника, подвешенного в центре колеса. Считается, что маятник управляется электродвигателем, статор которого жёстко скреплён с колесом, а ротор — с маятником. Отклоняя маятник от вертикали, можно катить колесо не только по горизонтальной поверхности, но и вверх по наклонной. Найден максимальный угол наклона поверхности, на которую может подниматься колесо. Этот угол зависит, естественно, от параметров маятника и колеса.

§ 5 посвящён задаче об оптимальном перемещении человека на качелях, при котором в конце каждого полупериода колебаний достигается максимальное отклонение качелей от вертикали. Здесь также найдено оптимальное перемещение человека, при котором в конце каждого полупериода колебаний минимизируется отклонение качелей от вертикали. Иными словами, решается задача наилучшего гашения колебаний качелей.

В § 6 исследуются задачи управления физическим маятником, обеспечивающего минимум затрат механической энергии. Изучаются задачи приведения маятника как в нижнее устойчивое положение равновесия, так и в верхнее неустойчивое. Движение маятника рассматривается на фазовом цилиндре. Оптимальное управление оказывается импульсным — оно описывается дельта-функциями Дирака.

В главе 2 изучаются задачи управления двухзвенным маятником с управлением в межзвенном шарнире или в точке подвеса. Управляющий момент, как и ранее, считается ограниченным по абсолютной величине. Начинается эта глава (§ 7) с решения задачи локальной стабилизации положения равновесия маятника, в котором оба звена перевёрнуты. Найдены области управляемости этого неустойчивого состояния равновесия. Получено в виде обратной связи управление, стабилизирующее это состояние равновесия. Обратную связь удаётся построить таким образом, что соответствующая ей область притяжения

является максимально возможной (в линейном приближении). Задача максимизации области притяжения для двухзвенного маятника оказывается более трудной, нежели для однозвенного, поскольку двухзвенный маятник имеет две неустойчивые моды, а однозвенный — только одну. При этом имеет место дефицит числа управляющих воздействий, поскольку двухзвенный маятник имеет две степени свободы и только одно управляющее воздействие — в межзвенном шарнире или в точке подвеса.

В §8 рассматривается задача управления двойным маятником при условии, что управляющим параметром является угол в межзвенном шарнире. При этом исходную систему нелинейных дифференциальных уравнений движения четвёртого порядка удаётся свести к одному уравнению. После этого оказывается возможным построить оптимальное управление раскачиванием, а также торможением маятника.

В следующем §9 изучается задача управления двухзвенным маятником при помощи момента, приложенного в межзвенном шарнире. В виде нелинейной обратной связи построен алгоритм управления, обеспечивающий глобальную устойчивость перевёрнутого маятника. При построении этого алгоритма используются результаты, полученные в §§7 и 8.

В §10 исследуется задача управления двухзвенным маятником при помощи момента, приложенного в точке подвеса. Построен алгоритм управления, обеспечивающий глобальную устойчивость перевёрнутого маятника. При построении этого алгоритма используются полученные в §7 результаты, касающиеся синтеза алгоритма локальной стабилизации с максимальной областью притяжения.

В §11 составлены уравнения плоского движения многозвенного (с произвольным числом звеньев) маятника, шарнирно закреплённого на подвижном основании — колесе или тележке. Управляющий момент, приложенный между основанием и первым звеном маятника, не зависит от положения основания и его скорости. При этом из математической модели системы удаётся выделить уравнения, описывающие *только* движение маятника. Получающиеся уравнения отличаются от известных уравнений движения маятника с фиксированной точкой подвеса. Они содержат параметры, характеризующие подвижное основание. Построен фазовый портрет движений свободного (без управления) однозвенного маятника на колесе или тележке. Построено в виде обратной связи ограниченное по абсолютной величине управление маятником, обеспечивающее глобальную стабилизацию его верхнего неустойчивого положения равновесия. В виде обратной связи получено оптимальное по быстрдействию управление.

*Глава 3* посвящена изучению задачи стабилизации шара на стержне. Она состоит из двух параграфов — §§12 и 13. В §12 изучается задача стабилизации системы, состоящей из *прямолинейного* стержня и шара, который может катиться по стержню без проскальзывания.

Точка подвеса стержня находится под ним, тем самым горизонтальное положение стержня неустойчиво. Предполагается, что в точке подвеса стержня смонтирован электропривод. Учитывается ограничение на напряжение, подаваемое на электродвигатель. Таким образом, исследуемая система имеет две степени свободы, но к ней приложено только одно управляющее воздействие. Изучаемая задача состоит в синтезе управления напряжением, подаваемым на двигатель, при котором неустойчивое (без управления) положение равновесия системы стабилизируется. При синтезе управления ставится цель не только стабилизировать неустойчивое состояние равновесия, но и максимизировать область притяжения этого состояния.

В § 13, как и в § 12, рассматривается задача о стабилизации шара на стержне. Но здесь, в отличие от § 12, предполагается, что стержень является *криволинейным* (изогнутым). В линеаризованной модели системы с прямолинейным стержнем содержится только одна неустойчивая мода, а в линеаризованной модели системы с криволинейным стержнем при «большой» его кривизне — две неустойчивые моды. Поэтому задача стабилизации шара на криволинейном стержне вызывает большие трудности, нежели на прямолинейном.

В *главе 4* (последней главе книги) рассматривается задача гироскопической стабилизации вертикального (неустойчивого) положения двухколёсного велосипеда. Глава состоит из двух параграфов — §§ 14 и 15. В § 14 описываются конструкции двух макетов велосипедов, построенных в Институте механики МГУ. У одного из них переднее колесо является, как у обычного велосипеда, одновременно ведущим и рулевым (поворотным), заднее колесо — пассивное. У другого велосипеда каждое колесо является одновременно и ведущим, и рулевым. Описана конструкция гиростабилизатора. Приведена математическая модель колебаний аппарата по крену и гироскопов по углу прецессии.

В § 15 речь идёт о синтезе системы управления гиростабилизатором. Здесь описана схема измерения двумя акселерометрами угла крена велосипеда, знание которого требуется при синтезе системы стабилизации аппарата. Построен закон управления моментом, прилагаемым к оси прецессии гироскопов с целью стабилизации вертикального положения велосипеда. Описаны результаты численных и экспериментальных исследований.

В книге при рассмотрении ряда задач приводятся результаты численных исследований. Эти результаты получены при помощи программ, составленных в среде «Matlab», а также в среде «Mathematica». Составленные программы позволяют также осуществлять анимацию изучаемых движений, с которой, однако, при чтении книги ознакомиться, к сожалению, невозможно. Что касается маятника с маховиком, двухколёсных велосипедов с гироскопической системой стабилизации, то проведённые с ними экспериментальные исследования зафиксированы в видеофильмах. Эти фильмы можно посмотреть на сайте [142].

В книге принята сквозная нумерация параграфов. Формулы, а также рисунки нумеруются двузначными номерами: первое число соответствует номеру параграфа, второе — порядковому номеру формулы или рисунка в этом параграфе.

Настоящая монография написана при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (государственный контракт № 07.524.11.4012).

Автор будет всегда помнить Анатолия Викторовича Ленского, с которым ему посчастливилось в течение многих лет вместе работать и заниматься различными проблемами. В их числе рассматриваемые в настоящей книге задачи об управлении маятником с маховиком, двухколёсным велосипедом с гироскопической системой стабилизации. Некоторые результаты, изложенные в книге, получены и опубликованы автором вместе с Юрием Григорьевичем Мартыненко, память о котором он будет бережно хранить.

**ОДНОЗВЕННЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ МАЯТНИК**

Многие неустойчивые механические системы содержат звенья в виде перевёрнутых маятников. Это, например, индивидуальное транспортное средство типа «Segway» [143], платформы на двух соосных колёсах, двуногие шагающие механизмы [10, 11, 79, 96, 112]. В проблеме управления неустойчивыми маятниковыми системами задачи управления *однозвенным* маятником, стабилизации его неустойчивого верхнего положения равновесия можно назвать «узловыми». Они относятся к числу классических в теоретической механике и теории управления. В большинстве исследований подобные задачи решаются путём управляемого перемещения точки подвеса маятника. Так, в [34, 134] предложено стабилизировать перевёрнутый маятник путём вертикальных перемещений его точки подвеса. Стабилизированный таким образом маятник часто называют маятником Капицы. В [126] рассматривается задача стабилизации не только однозвенного, но и многозвенного перевёрнутого маятника путём горизонтальных перемещений точки подвеса. Такой маятник может быть смонтирован на тележке, способной перемещаться горизонтально [106]. Общеизвестно, что, перемещая ладонь руки в горизонтальной плоскости, можно удерживать от падения стоящий на ней вертикально стержень. В [22] рассматривается задача о работе-эквilibристе на цилиндре.

В настоящей главе рассматривается несколько задач управления плоским физическим однозвенным маятником [6–8, 78–82, 111]. Сначала рассматривается обычный физический маятник с управляющим моментом, приложенным в точке подвеса. Этот момент считается ограниченным по абсолютной величине. Затем изучается маятник, точка подвеса которого находится в центре колеса [81, 82, 111]. Это колесо может катиться по ровной горизонтальной прямой. Управляющий момент приложен в точке подвеса маятника. Он действует, с одной стороны, на маятник, а с другой стороны, на колесо. Требуется стабилизировать маятник в верхнем положении равновесия. Затем рассматривается маятник, к концу которого прикреплён маховик [6–8, 111]. Построен закон управления вращением маховика, при котором удаётся перевести маятник из нижнего устойчивого в верхнее неустойчивое положение равновесия и стабилизировать его в этом неустойчивом равновесном состоянии. Далее рассматривается задача об управлении качением колеса при помощи закреплённого в его центре маятника.

Сформулированы условия, при которых колесо может катиться в гору. В последнем параграфе этой главы снова рассматривается обычный однозвенный физический маятник с управляющим моментом, приложенным в неподвижной точке подвеса [78, 79]. Исследуется вопрос о приведении маятника в нижнее — устойчивое — положение равновесия, а также в верхнее — неустойчивое. Среди множества возможных управлений отыскивается то, при котором затраты механической энергии минимальны. Это управление оказывается импульсным.

## § 1. Маятник с неподвижной точкой подвеса

... дорогой Фагот, а публика начинает скучать.  
Покажи нам для начала что-нибудь простенькое.  
*М.А. Булгаков. Мастер и Маргарита.*

На рис. 1.1 показан однозвенный физический маятник с фиксированной точкой подвеса  $O$ . Момент  $L$  приложен в этой точке (шарнире)  $O$ . Положительным направлением момента считается направление против часовой стрелки. Момент  $L$  ограничен по абсолютной величине константой  $L_0$ :

$$|L| \leq L_0. \quad (1.1)$$

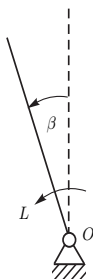


Рис. 1.1. Маятник с фиксированной точкой подвеса

### 1. Уравнения движения

Уравнение движения маятника хорошо известно, его можно представить в виде

$$mr^2\ddot{\beta} - mgb\sin\beta = L. \quad (1.2)$$

Здесь  $m$  — масса маятника,  $b$  — расстояние от точки подвеса  $O$  маятника до его центра масс  $C$ ,  $r$  — радиус инерции маятника относительно

точки  $O$ ,  $\beta$  — угол отклонения отрезка  $OC$  от направления того же отрезка, соответствующего верхнему положению равновесия маятника, этот угол отсчитывается против часовой стрелки,  $g$  — ускорение свободного падения. Точка означает дифференцирование по времени  $t$ . Силой трения в оси подвеса пренебрегаем.

После введения безразмерного времени  $\tau$  и безразмерного момента  $\mu$  по формулам

$$\tau = t\sqrt{gb}/r, \quad \mu = L/(mgb) \quad (1.3)$$

уравнение движения (1.2) можно представить в простой форме

$$\beta'' - \sin \beta = \mu. \quad (1.4)$$

Штрих ' означает дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Безразмерный момент  $\mu$  ограничен постоянной величиной  $\mu_0$ :

$$|\mu| \leq \mu_0, \quad \mu_0 = L_0/(mgb). \quad (1.5)$$

Множество кусочно-непрерывных функций  $\mu(\tau)$ , удовлетворяющих неравенству (1.5), обозначим через  $W$ , т. е.  $W = \{\mu(\tau) : |\mu(\tau)| \leq \mu_0\}$ . Если  $\mu_0 > 1$ , то маятник может быть приведён из любого начального состояния

$$\beta(0), \quad \beta'(0) = 0 \quad (1.6)$$

в неустойчивое состояние равновесия

$$\beta = 0, 2\pi; \quad \beta' = 0 \quad (1.7)$$

при монотонном изменении угла  $\beta$  в интервале  $0 \leq \beta \leq \pi$  или  $\pi \leq \beta \leq 2\pi$ . Если  $\mu_0 < 1$ , т. е. на момент наложено жёсткое ограничение, то существуют такие начальные состояния (1.6), из которых маятник может быть приведён в неустойчивое состояние равновесия (1.7) только после некоторого количества колебаний (с нарастающей амплитудой) около нижнего устойчивого положения равновесия

$$\beta = \pi, \quad \beta' = 0. \quad (1.8)$$

Таким начальным состоянием является и равновесие (1.8).

Будем предполагать далее, что  $\mu_0 < 1$ .

Линеаризуем уравнение (1.4) около состояния равновесия  $\beta = 0$ ,  $\beta' = 0$  (1.7), предполагая, что во время своего движения маятник «мало» отклоняется от вертикали:

$$\beta'' - \beta = \mu. \quad (1.9)$$

Легко проверить [18, 37], что система (1.9) вполне управляема по Калману [32, 33, 117].



Уравнение (1.9) может быть представлено в жордановой форме:

$$y' = y + \mu, \quad y = \beta + \beta'; \quad (1.10)$$

$$z' = -z - \mu, \quad z = \beta - \beta'. \quad (1.11)$$

Уравнения (1.10) и (1.11) описывают неустойчивую и устойчивую моды движения соответственно.

## 2. Область управляемости

Множество  $Q$  начальных состояний, для каждого из которых существует управление  $\mu(\tau) \in W$ , которое приводит систему (1.10), (1.11) в равновесное состояние  $y = 0$ ,  $z = 0$  ( $\beta = 0$ ,  $\beta' = 0$ ), называется областью управляемости [77]. Это множество ограничено только по неустойчивой координате  $y$  [77] и описывается следующим неравенством:

$$|y| < \mu_0, \quad \text{или} \quad |\beta + \beta'| < \mu_0. \quad (1.12)$$

Действительно, если  $|y(0)| < \mu_0$ , то при управлении  $\mu = -\mu_0 \operatorname{sign} [y(0)]$  переменная  $y$  приходит за конечное время в нуль. Положим после этого  $\mu = 0$ . При  $\mu = 0$  координата  $y$  остаётся равной нулю, а решение  $z(\tau)$  уравнения (1.11) при *любом* начальном условии  $z(0)$  стремится к нулю, если  $\tau \rightarrow \infty$ . Таким образом, при  $\mu = 0$  система (1.10), (1.11) за конечное время попадает в любую наперёд заданную сколь угодно малую окрестность начала координат  $y = z = 0$ . Но из этой достаточно малой окрестности она уже может быть приведена в начало координат  $y = z = 0$  (за конечное время) при помощи допустимого управления  $|\mu(\tau)| \leq \mu_0$ , поскольку система (1.10), (1.11) вполне управляема по Калману [32, 33, 117].

Интервал (1.12) оси  $y$  показан на рис. 1.2.

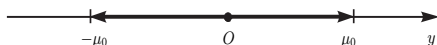
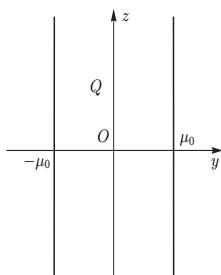


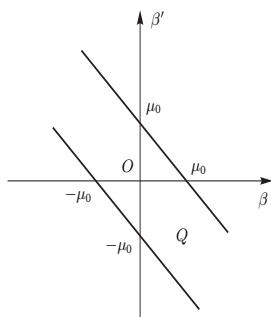
Рис. 1.2. Область управляемости по переменной  $y$

На плоскости переменных  $y$ ,  $z$  область управляемости  $Q$  представляет собой *полосу*, неограниченную по переменной  $z$ . Её границы параллельны оси  $y$  (вертикальны). Эта полоса показана на рис. 1.3.

На рис. 1.4 область  $Q$  (1.12) изображена в плоскости переменных  $\beta$ ,  $\beta'$ . Множество  $Q$  открыто, т.е. оно не содержит свою границу. Заметим, что при максимальных по абсолютной величине управляющих воздействиях  $\mu(\tau) = \mp \mu_0$  линейное уравнение (1.9) имеет стационарные состояния  $\beta = \pm \mu_0$ ,  $\beta' = 0$ . Эти состояния равновесия принадлежат границе области  $Q$  (1.12). В то же время нелинейное уравнение (1.4) при  $\mu(\tau) = \mp \mu_0$  имеет состояния равновесия  $\beta = \pm \arcsin \mu_0$ ,  $\beta' = 0$ . Напомним, что  $\arcsin \mu_0 > \mu_0$ , так что

Рис. 1.3. Область управляемости в плоскости переменных  $y, z$ 

в состоянии равновесия исходной нелинейной системы угол  $\beta$  отклонения маятника от вертикали больше, чем в линеаризованной системе.

Рис. 1.4. Область управляемости  $Q$ 

Из соотношения (1.12) при  $\beta'(0) = 0$  или  $\beta(0) = 0$  получаются неравенства, ограничивающие начальные значения  $\beta(0)$  и  $\beta'(0)$ . Если  $\beta'(0) = 0$ , то ограничение на начальный угол  $\beta(0)$ , при котором маятник может быть приведён в неустойчивое состояние  $\beta = 0, \beta' = 0$  (1.7), имеет вид

$$|\beta(0)| < \mu_0 \quad \left( |\beta(0)| < \frac{L_0}{mgb} \right). \quad (1.13)$$

Это неравенство имеет простую физическую интерпретацию. При отклонении маятника от вертикали на угол  $\beta$  момент силы тяжести

(в линейном приближении) меньше максимально возможного момента  $L_0$ , развиваемого двигателем. Если  $\beta(0) = 0$ , то ограничение на начальную угловую скорость  $\beta'(0)$ , при которой маятник может быть приведён в неустойчивое состояние  $\beta = 0$ ,  $\beta' = 0$  (1.7), выглядит так:

$$|\beta'(0)| < \mu_0 \quad \left( |\dot{\beta}(0)| < \frac{L_0}{m\tau\sqrt{gb}} \right). \quad (1.14)$$

### 3. Максимизация области притяжения

Неустойчивую моду движения системы (1.10), (1.11) можно «подавить» при помощи управления в виде обратной связи

$$\mu = \gamma y, \quad \gamma < -1. \quad (1.15)$$

Действительно, при управлении (1.15) уравнение (1.10) принимает вид

$$y' - (1 + \gamma)y = 0. \quad (1.16)$$

Если  $\gamma < -1$ , то  $1 + \gamma < 0$  и при любом начальном значении  $y(0)$  решение уравнения (1.16)  $y(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Но если  $y(\tau) \rightarrow 0$ , то и управление  $\mu(\tau) \rightarrow 0$ , поскольку  $\mu = \gamma y$ . А тогда и решение  $z(\tau)$  уравнения (1.11) при *любом* начальном значении  $z(0)$  стремится к нулю.

Если учесть ограничение (1.5) на управление, то вместо линейной обратной связи (1.15) следует рассматривать линейную обратную связь с *насыщением*, т. е. *нелинейную* обратную связь вида

$$\mu = \mu(y) = \begin{cases} -\mu_0 & \text{при } \gamma y \leq -\mu_0, \\ \gamma y & \text{при } |\gamma y| \leq \mu_0, \\ \mu_0 & \text{при } \gamma y \geq \mu_0; \end{cases} \quad \gamma < -1. \quad (1.17)$$

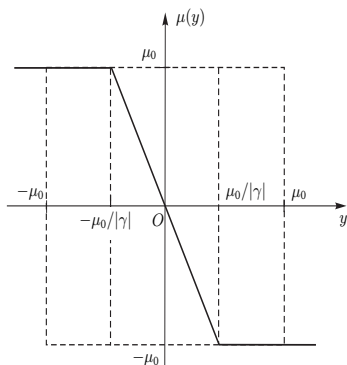
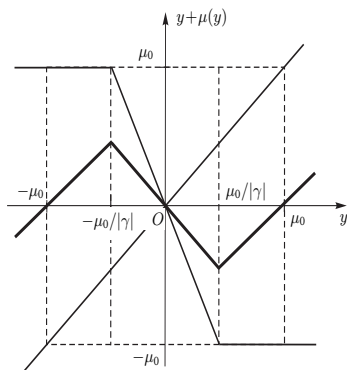
График зависимости (1.17) показан жирной линией на рис. 1.5.

При управлении (1.17) уравнение (1.10) принимает вид

$$y' = y + \mu(y). \quad (1.18)$$

График функции  $y + \mu(y)$ , стоящей в правой части уравнения (1.18), показан жирной линией на рис. 1.6. Тонкими линиями здесь показаны график функции (1.17), а также биссектриса первого и третьего квадрантов.

В интервале  $-\mu_0 < y < 0$  величина  $y + \mu(y)$  положительна, а в интервале  $0 < y < \mu_0$  — отрицательна ( $y + \mu(y) < 0$ ). Поэтому  $y' > 0$  при  $-\mu_0 < y < 0$  и  $y' < 0$  при  $0 < y < \mu_0$ . Следовательно, при всех начальных условиях  $-\mu_0 < y(0) < \mu_0$  решение уравнения (1.18)  $y(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Но если  $y(\tau) \rightarrow 0$ , то в соответствии с соотношением (1.17)  $\mu(\tau) \rightarrow 0$ . А тогда и решение  $z(\tau)$  уравнения (1.11) при *любом*

Рис. 1.5. График функции  $\mu(y)$ Рис. 1.6. График функции  $y + \mu(y)$ 

начальном значении  $z(0)$  стремится к нулю [27], поскольку решение однородного уравнения (1.11) экспоненциально стремится к нулю при любом начальном значении  $z(0)$ . Таким образом, тривиальное решение  $y(\tau) = 0$ ,  $z(\tau) = 0$  системы (1.10), (1.11) с управлением (1.17) асимптотически устойчиво при всех начальных условиях  $-\mu_0 < y(0) < \mu_0$ , независимо от начального условия  $z(0)$ . Следовательно, область притяжения  $B$  начала координат  $y = 0$ ,  $z = 0$  при управле-

нии (1.17) совпадает с областью управляемости  $Q$ :  $B = Q$ . (Областью притяжения называется, как обычно, множество начальных состояний  $y(0)$ ,  $z(0)$ , из которых управляемая система асимптотически стремится к желаемому режиму.) Из рассмотрения рис. 1.6 видно между прочим, что  $y' > 0$  при  $y > \mu_0$  и  $y' < 0$  при  $y < -\mu_0$ ; следовательно, при  $\tau \rightarrow \infty$  решение  $y(\tau) \rightarrow +\infty$ , если  $y(0) > \mu_0$ , и  $y(\tau) \rightarrow -\infty$ , если  $y(0) < -\mu_0$ .

Заметим, что чем больше по абсолютной величине коэффициент усиления  $\gamma$ , тем быстрее стремится к нулю величина  $y$ , поскольку при большем по модулю значении  $\gamma$ , во-первых, управление  $\mu$  дольше «лежит на упоре», т. к. отношение  $\mu_0/|\gamma|$  меньше (см. рис. 1.5), а во-вторых, линейный участок управления (1.17) круче. В п. 4 будет показано, однако, что «большой» коэффициент усиления  $\gamma$  может привести к неустойчивости системы при наличии запаздывания в цепи обратной связи.

Рассмотрим теперь линейную (с насыщением) обратную связь, в которую включены не только неустойчивая координата  $y$ , но и устойчивая  $z$ :

$$\mu = \mu(y, z) = \begin{cases} -\mu_0 & \text{при } \gamma y + \delta z \leq -\mu_0, \\ \gamma y + \delta z & \text{при } |\gamma y + \delta z| \leq \mu_0, \\ \mu_0 & \text{при } \gamma y + \delta z \geq \mu_0. \end{cases} \quad (1.19)$$

Здесь  $\delta = \text{const}$ . Условия асимптотической устойчивости системы (1.10), (1.11) при обратной связи (1.19) описываются неравенствами:  $\gamma + \delta < -1$ ,  $\delta > \gamma$ . Покажем, что в области управляемости  $Q$  (1.12) найдутся такие начальные состояния  $y(0)$ ,  $z(0)$ , при которых система (1.10), (1.11) с управлением (1.19) не приходит в начало координат  $y = z = 0$  и, более того, покидает область  $Q$ .

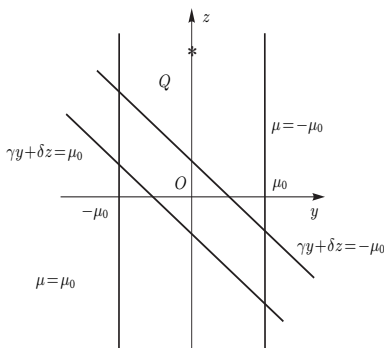
На рис. 1.7 в плоскости переменных  $y$ ,  $z$  показана область управляемости  $Q$  (1.12) со своими границами  $y = \pm\mu_0$ , а также две прямые:  $\gamma y + \delta z = -\mu_0$ ,  $\gamma y + \delta z = \mu_0$ . Между этими прямыми — в области

$$|\gamma y + \delta z| \leq \mu_0 \quad (1.20)$$

— управление (1.19) является линейным. Границы области (1.20) изображены при  $\gamma < 0$  и  $\delta < 0$ .

Правее (выше) правой (верхней) границы полосы (1.20)  $\mu = -\mu_0$ , а левее (ниже) левой границы этой полосы  $\mu = \mu_0$ . Если  $\delta \neq 0$ , то полоса (1.20) пересекается с полосой (1.12). Правая (верхняя) граница области (1.20)  $\gamma y + \delta z = -\mu_0$  пересекается с прямой  $y = -\mu_0$  в точке  $y = -\mu_0$ ,  $z = \frac{\mu_0}{\delta}(\gamma - 1)$ . Выберем начальное состояние  $y(0)$ ,  $z(0)$

системы (1.10), (1.11), (1.19) так, что  $y(0) = 0$ , т. е. внутри области  $Q$  (1.12) (см. точку, помеченную на рис. 1.7 звездочкой). Пусть значение  $z(0)$  при этом настолько велико, что состояние  $y(0)$ ,  $z(0)$  лежит вне

Рис. 1.7. Область управляемости  $Q$  (1.12) и полоса (1.20)

области (1.20) — выше неё. Тогда управление (1.19) принимает в начальный момент времени  $\tau = 0$  значение  $-\mu_0$ . Если в уравнении (1.10) положить  $\mu(\tau) \equiv -\mu_0$ , то при условии  $y(0) = 0$  через некоторое конечное время  $\bar{\tau}$  его решение  $y(\tau) < -\mu_0$ . Одновременно значение  $z(0)$  может быть выбрано настолько большим, что решение  $z(\tau)$  уравнения (1.11) при  $\mu(\tau) \equiv -\mu_0$  остаётся больше величины  $z = \frac{\mu_0}{\delta}(\gamma - 1)$  на всём промежутке времени  $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ . Следовательно, начинающаяся из состояния  $0$ ,  $z(0)$ , где величина  $z(0)$  достаточно велика, траектория системы (1.10), (1.11) при управлении (1.19) выходит из области управляемости  $Q$  (через её левую границу  $y = -\mu_0$ ). Из сказанного вытекает существование множества таких начальных состояний  $y(0)$ ,  $z(0) \in Q$ , что начинающиеся из них траектории системы (1.10), (1.11), (1.19) выходят из области управляемости  $Q$ . Из теоремы о непрерывной зависимости решения дифференциальных уравнений от начальных условий вытекает, что мера множества таких начальных состояний не равна нулю. Следовательно, если  $\delta \neq 0$ , то при управлении (1.19) область притяжения  $V$  может занимать лишь часть области управляемости  $Q$ .

Таким образом, имеет место следующая

**Теорема.** При управлении (1.19) область притяжения  $V$  совпадает с областью управляемости  $Q$ , т. е. является максимально возможной, тогда и только тогда, когда коэффициент  $\delta = 0$ , а коэффициент  $\gamma < -1$ .

Итак, для того чтобы максимизировать область притяжения системы (1.10), (1.11), нужно все ресурсы управления использовать для подавления неустойчивой моды.

Управление (1.17), записанное в переменных  $\beta$  и  $\beta'$ , имеет вид

$$\mu = \begin{cases} -\mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + \beta') \leq -\mu_0, \\ \gamma(\beta + \beta') & \text{при } |\gamma(\beta + \beta')| \leq \mu_0, \quad \gamma < -1. \\ \mu_0 & \text{при } \gamma(\beta + \beta') \geq \mu_0; \end{cases} \quad (1.21)$$

Закон управления (1.21) максимизирует область притяжения системы (1.9), и в этом смысле он оптимален. Заметим, что при управлении реальным устройством, содержащим маятник, нужно измерять угол  $\beta$  и угловую скорость  $\dot{\beta}$ . Последняя связана с производной  $\beta'$  соотношением  $\dot{\beta} = \beta' \frac{\sqrt{gb}}{r}$  (см. первое из соотношений (1.3)).

Закон управления (1.21), записанный в исходных (оригинальных) переменных, имеет вид

$$L = \begin{cases} -L_0 & \text{при } \gamma mgb(\beta + \dot{\beta}r/\sqrt{gb}) \leq -L_0, \\ \gamma mgb(\beta + \dot{\beta}r/\sqrt{gb}) & \text{при } |\gamma mgb(\beta + \dot{\beta}r/\sqrt{gb})| \leq L_0, \quad \gamma < -1. \\ L_0 & \text{при } \gamma mgb(\beta + \dot{\beta}r/\sqrt{gb}) \geq L_0; \end{cases} \quad (1.22)$$

Для реализации закона управления (1.22) нужно знать массу маятника  $m$ , расстояние  $b$  от точки подвеса  $O$  до его центра масс и радиус  $r$  инерции маятника относительно точки подвеса.

#### 4. Запаздывание в цепи обратной связи

Выше говорилось о том, что чем больше по абсолютной величине коэффициент усиления  $\gamma$ , тем быстрее стремится к нулю величина  $y$ . Покажем, что при наличии запаздывания в цепи обратной связи коэффициент усиления  $\gamma$  не может быть слишком большим. Иначе система может потерять устойчивость. Запаздывание возникает из-за задержек в контуре управления, а также при поступлении информации с датчиков. Вопрос об оценке допустимого запаздывания в цепи обратной связи весьма важен в задаче стабилизации всякого неустойчивого объекта, поскольку уже при «небольшом» запаздывании стабилизация такого объекта может оказаться невозможной.

Для решения вопроса об устойчивости системы (1.10), (1.11) с управлением (1.17) при наличии чистого запаздывания в цепи обратной связи достаточно рассмотреть уравнения движения (1.10), (1.11) с линейной обратной связью (1.15). При наличии чистого запаздывания в цепи обратной связи уравнения (1.10), (1.11), (1.15) принимают вид:

$$y'(\tau) = y(\tau) + \mu(\tau), \quad (1.23)$$

$$z'(\tau) = -z(\tau) - \mu(\tau), \quad (1.24)$$