БИБЛИОТЕКА
УЧИТЕЛЯ И ШКОЛЬНИКА

ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА

Издание второе,
исправленное и дополненное

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2007

УДК 512
ББК 22.14
З 15

Задачи по математике. Алгебра / Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 456 с. — (Библиотека учителя и школьника). — ISBN 978-5-9221-0865-2.

Книга создана на основе курса математики подготовительного отделения МГУ и содержит основные методы решения задач по алгебре. Изложение методов сопровождается необходимыми теоретическими сведениями и разбором примеров. По каждой теме приводятся задания и упражнения для ее более глубокого усвоения и закрепления.

Для школьников старших классов и слушателей подготовительных отделений. Может использоваться для самостоятельной подготовки к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вуз.

ISBN 978-5-9221-0865-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая книга является справочным пособием по методам решения алгебраических задач. Она создана на основе опыта преподавания математики на подготовительном отделении и в школе им. А. Н. Колмогорова Специализированного учебно-научного центра Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. По различным отзывам преподавателей математики, использующих эту книгу, она удачно дополняет школьные методические комплексы и в течение ряда лет с успехом применялась в школьном специализированном обучении.

Книга содержит материал по четырем темам: «Действительные числа и алгебраические выражения», «Уравнения, неравенства и системы», «Элементы комбинаторики», «Комплексные числа».

В начале каждого параграфа приводятся краткие теоретические сведения; затем на примерах, в процессе решения типовых задач, иллюстрируются различные методы их решения. В целях типизации методов не всегда даны самые короткие решения; иногда для сравнения эффективности методов излагаются несколько различных способов решения одной и той же задачи. В конце каждого параграфа имеются задания на отработку понятий и методов решения задач; они нацелены на помощь преподавателю и обучающемуся в планировании своих занятий и для контроля качества обучения.

Как количество задач в задании, так и число самих заданий значительно превышают необходимый минимум для усвоения материала, и авторы не предполагают, что все задачи из заданий и все методы решений будут изучаться одинаково подробно и тщательно. Следует иметь в виду, что справочное пособие не является безусловной рекомендацией. Главная цель пособия — дать возможную схему изучения той или иной темы и подкрепить ее специально подобранным материалом и соответствующими методическими указаниями, обеспечив достаточно богатый выбор задач для усвоения понятий и методов.

Книга в целом или отдельные ее главы могут быть полезны для организации учебного процесса в специализированных средних школах и классах и на подготовительных факультетах вузов, в средних специальных учебных заведениях, при самостоятельной подготовке к ЕГЭ и поступлению в высшие учебные заведения. Справочник поможет без активных консультаций с преподавателем организовать планомерное повторение нужного материала — не только основных положений теории, но и основных приемов и методов решения задач.

Авторы глубоко признательны рецензенту профессору М. К. Потапову за полезные замечания.

Отзывы, критические замечания и пожелания просим направлять по адресу: 117997 Москва, Профсоюзная ул. 90, издательство ФИЗМАТЛИТ.

СПИСОК НЕКОТОРЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ И СОКРАЩЕНИЙ

$\mathbf{N}$ — множество натуральных чисел
$\mathbf{Z}$ — множество целых чисел
$\mathbf{Q}$ — множество рациональных чисел
$\mathbf{R}$ — множество действительных чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$a \in M$ — элемент a принадлежит множеству M
$\{a;\ b;\ c;\ d\}$ — множество, состоящее из элементов a, b, c, d
$\cup$ — знак объединения
$[a;\ b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a;\ b)$ — открытый промежуток с началом a и концом b
$A \Rightarrow B$ — из A следует B
$A \Leftrightarrow B$ — A эквивалентно B (из A следует B, и обратно: из B следует A)
$a = b$ — знак равенства: a равно b
$a > b$ — знак неравенства: a больше b
$a < b$ — знак неравенства: a меньше b
$a \geqslant b$ $(a \leqslant b)$ — знак нестрогого неравенства: a не меньше (не больше) b
$a \neq b$ — знак сравнения: a не равно b
$A \equiv B$ — знак сравнения: A тождественно равно B
ОДЗ — область допустимых значений
НОД $(a,\ b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b
НОК $(a,\ b)$ — наименьшее общее кратное чисел a и b
$|a|$ — абсолютная величина числа a
$[a]$ — целая часть числа a
$\min\limits_i a_i$ — наименьшее из всех чисел a_i
$\max\limits_i a_i$ — наибольшее из всех чисел a_i
$\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0}$ — позиционная запись натурального числа
$\frac{a}{b}$; $a : b$ — частное от деления a на b
$\sqrt[n]{a}$ — корень n-й степени из числа a
$\log_a b$ — логарифм числа b по основанию a
$\lg b$ — логарифм числа b по основанию 10
$\ln b$ — логарифм числа b по основанию e
$\pi = 3{,}1415\ldots$ — отношение длины окружности к ее диаметру
$e = 2{,}718\ldots$ — основание натурального логарифма
i — мнимая единица $(i^2 = -1)$

$\operatorname{Re} z$ — действительная часть комплексного числа z
$\operatorname{Im} z$ — мнимая часть комплексного числа z
$\bar{z}$ — число, сопряженное числу z
$\operatorname{Arg} z$ — аргумент комплексного числа z
$\arg z$ — главное значение аргумента комплексного числа z
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)$
$(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$
A_n^m — число размещений из n элементов по m
C_n^m — число сочетаний из n элементов по m
P_n — число перестановок из n элементов
$\{$ — знак системы
$[$ — знак совокупности
$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$
$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \ldots a_n$

Глава 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Натуральные и целые числа

Числа 1, 2, 3, …, употребляемые для счета, называются *натуральными*. Множество натуральных чисел обозначается символом $\mathbf{N}$.

Если число n представимо в виде произведения двух натуральных чисел m и k, т. е. $n = m \cdot k$, то говорят, что число n *делится* (*нацело*) на m и на k, а каждое из чисел m и k называется *делителем* числа n.

По определению считается, что 0 делится на любое число, отличное от нуля.

Натуральное число, большее единицы, называется *простым*, если оно не имеет других делителей, кроме единицы и самого числа. Например, числа 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 — простые.

Натуральное число называется *составным*, если оно имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого себя. Например, числа 6, 20, 21 — составные.

Натуральное число называется *четным*, если оно делится (нацело) на число 2, и *нечетным*, если оно не делится на 2.

Каждое составное число n можно разложить на простые множители, т. е. представить его в виде

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_k^{m_k}, \tag{1}$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа, а $k, m_1, m_2, \ldots, m_k$ — натуральные числа. Указанное представление часто называют также *каноническим разложением числа*; такое разложение *единственно* с точностью до перестановки множителей в правой части равенства (1). Например,

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \qquad 258 = 2 \cdot 3 \cdot 43, \qquad 180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Любое число n представимо в десятичной системе счисления в виде

$$n = a_k \cdot 10^k + a_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0, \tag{2}$$

где числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ могут принимать значения 0, 1, 2, …, 9, а число a_k — значения 1, 2, …, 9; позиционная запись числа вида (2) следующая:

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0}.$$

Числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 в таком представлении натурального числа называются *цифрами.*

Некоторые признаки делимости натуральных чисел. Пусть

$$n = \overline{a_k a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0},$$

тогда:

1. Число n делится на 2 в том и только в том случае, когда a_0 делится на 2.

Например, число 123547894 делится на 2, так как 4 делится на 2; число 123547899 не делится на 2, так как 9 не делится на 2.

2. Число n делится на 4 в том и только в том случае, когда число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 4.

Например, число 83745656 делится на 4, так как 56 делится на 4; число 5349741414 не делится на 4, так как 14 не делится на 4.

3. Число n делится на 8 в том и только в том случае, когда число $\overline{a_2 a_1 a_0}$ делится на 8.

Например, число 437258112 делится на 8, так как 112 делится на 8; число 256124 не делится на 8, так как 124 не делится на 8.

4. Число n делится на 3 в том и только в том случае, когда сумма всех его цифр делится на 3.

Например, число 123547812 делится на 3, так как $1 + 2 + 3 + 5 + 4 + 7 + 8 + 1 + 2 = 33$ делится на 3; число 57312427 не делится на 3, так как $5 + 7 + 3 + 1 + 2 + 4 + 2 + 7 = 31$ не делится на 3.

5. Число n делится на 9 в том и только в том случае, когда сумма всех его цифр делится на 9.

Например, число 23752827 делится на 9, так как $2 + 3 + 7 + 5 + 2 + 8 + 2 + 7 = 36$ делится на 9; число 1541547179 не делится на 9, так как $1 + 5 + 4 + 1 + 5 + 4 + 7 + 1 + 7 + 9 = 44$ не делится на 9.

6. Число n делится на 5 в том и только в том случае, когда a_0 делится на 5.

Например, число 278324170 делится на 5, так как 0 делится на 5; число 12937234 не делится на 5, так как 4 не делится на 5.

7. Число n делится на 25 в том и только в том случае, когда число $\overline{a_1 a_0}$ делится на 25.

Например, число 4 381 997 550 делится на 25, так как 50 делится на 25; число 1 112 221 740 не делится на 25, так как 40 не делится на 25.

Пример 1. Найти наименьшее натуральное число вида $\overline{123X43Y}$, которое делится нацело на 3.

Решение. Сумма цифр числа данного вида равна $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + X + Y = 13 + X + Y$. Наименьшее значение этой суммы, при которой заданное число делится на 3, равно 15, т.е. когда $X + Y = 2$. Среди всех чисел данного вида при условии, что $X + Y = 2$, имеются три числа 1 230 432, 1 232 430, 1 231 431, из которых наименьшим является число $a = 1\,230\,432$.

Кроме значения 2, сумма $X+Y$ для чисел указанного вида, делящихся на 3, может принимать только значения 5, 8, 11, 14, 17. Ясно, что если $X+Y=5$, то наименьшим является число 1 230 435, а если $X+Y=8$, то наименьшим будет число 1 230 438; оба найденных числа больше числа a. В каждом из оставшихся трех случаев ($X+Y=11$, $X+Y=14$, $X+Y=17$) в качестве наименьшего будет также получаться число, большее, чем число a.

Таким образом, искомым числом является число 1 230 432.

Если натуральные числа n_1 и n_2 делятся нацело на одно и то же число m, то m называется их *общим делителем*.

Наибольшее число, на которое нацело делятся числа n_1 и n_2, называется их *наибольшим общим делителем* и обозначается НОД(n_1, n_2). Например,

$$\text{НОД}\,(18,\ 15)=3; \qquad \text{НОД}\,(32,\ 40)=8; \qquad \text{НОД}\,(72,\ 128)=8.$$

Если НОД$(n_1, n_2)=1$, то числа n_1 и n_2 называются *взаимно простыми*.

Например, числа 33 и 35 взаимно простые, так как НОД$(33, 35) = 1$, а числа 21 и 14 не являются взаимно простыми, так как НОД$(21, 14)=7$.

Если натуральные числа n_1 и n_2 взаимно просты и натуральное число n делится на n_1 и n_2, то n делится на произведение $n_1 \cdot n_2$. Например, 24 делится на число 6, равное произведению двух взаимно простых делителей 2 и 3, но не делится на число 32, равное произведению делителей 4 и 8, которые не являются взаимно простыми.

Пример 2. Найти все пятизначные числа вида $\overline{34X5Y}$, каждое из которых делится на 36.

Решение. Число 36 можно представить в виде произведения взаимно простых чисел 4 и 9; следовательно, искомые числа делятся на 4 и на 9. Применим признаки делимости на 4 и на 9. Число $\overline{5Y}$ должно делиться на 4, значит, Y равно либо 2, либо 6. Число $3+4+X+5+Y=12+X+Y$ должно делиться на 9. При $Y=2$ находим такую цифру X, чтобы число $14+X$ делилось на 9. Отсюда получаем $X=4$. При $Y=6$ находим такую цифру X, чтобы число $18+X$ делилось на 9. Отсюда получаем X равным либо 0, либо 9. Следовательно, условию задачи удовлетворяют только три числа, а именно 34 452, 34 056, 34 956.

Правило нахождения НОД(n_1, n_2):

а) найти канонические разложения чисел n_1 и n_2;

б) выписать все общие простые множители, входящие в канонические разложения обоих чисел n_1 и n_2;

в) возвести каждый из выписанных в п. б) простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в канонические разложения чисел n_1 и n_2;

г) произведение полученных степеней простых множителей дает НОД (n_1, n_2).

П р и м е р 3. Найти НОД (360, 8 400).

Р е ш е н и е. а) Находим канонические разложения чисел 360 и 8 400: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $8\,400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$;

б) выписываем общие простые множители, входящие в канонические разложения чисел 360 и 8 400: 2, 3, 5;

в) наименьшая степень числа 2, входящего множителем в каждое из разложений данных чисел, равна 3; наименьшая степень числа 3 равна 1; наименьшая степень числа 5 равна 1;

г) находим НОД $(360, 8\,400) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 120$.

Наименьшее натуральное число n, которое делится нацело на p_1 и p_2, называется их *наименьшим общим кратным* и обозначается НОК (n_1, n_2). Например, НОК $(24, 50) = 600$; НОК $(12, 48) = 48$; НОК $(72, 40) = 360$.

П р а в и л о н а х о ж д е н и я НОК (n_1, n_2):

а) найти канонические разложения чисел n_1 и n_2;

б) выписать все простые множители, входящие в каноническое разложение хотя бы одного из чисел n_1 и n_2;

в) возвести каждый из выписанных в п. б) простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в канонические разложения чисел n_1 и n_2;

г) произведение полученных степеней простых множителей дает НОК (n_1, n_2).

Отметим, что НОД и НОК чисел n_1 и n_2 связаны соотношением

$$\text{НОД}\,(n_1, n_2) \cdot \text{НОК}\,(n_1, n_2) = n_1 \cdot n_2.$$

П р и м е р 4. Найти НОК (360, 8 400).

Р е ш е н и е. а) Находим канонические разложения чисел 360 и 8 400: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, $8\,400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$;

б) выписываем простые множители, входящие в канонические разложения хотя бы одного из данных чисел: 2, 3, 5, 7;

в) наибольшая степень числа 2, входящего множителем в каждое из данных чисел, равна 4; наибольшая степень числа 3 равна 2; наибольшая степень числа 5 равна 2; наибольшая степень числа 7 равна 1;

г) находим НОК $(360, 8\,400) = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25\,200$.

С в о й с т в а о с н о в н ы х а р и ф м е т и ч е с к и х д е й с т в и й:

1) $m + n = n + m$, $m \cdot n = n \cdot m$ — *коммутативность*;

2) $(m + n) + k = m + (n + k)$, $m(nk) = (mn)\,k$ — *ассоциативность*;

3) $m(n + k) = mn + mk$ — *дистрибутивность*.

Множество, состоящее из натуральных чисел, целых *отрицательных* чисел (т. е. чисел $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$) и нуля (с арифметическими операциями), называется *множеством целых чисел*, а сами эти числа называются *целыми числами*. Множество целых чисел обозначается символом $\mathbf{Z}$.

Если в числовом выражении, не содержащем скобок, надо произвести арифметические действия, то сначала выполняются умножение и деление, а затем сложение и вычитание. Если в числовом выражении содержатся скобки, то сначала проводятся действия в скобках (по указанному выше правилу).

Напомним правила сложения, вычитания и умножения целых чисел.

Пусть m и n — натуральные числа. Тогда:

$$(-m)+(-n)=-(m+n);$$
$$(-m)+0=-m;$$
$$(-m)+n=\left[\begin{array}{ll} -(m-n), & m>n, \\ n-m, & m<n, \\ 0, & n=m; \end{array}\right.$$
$$(-m)\cdot n=-mn;$$
$$(-m)(-n)=mn;$$
$$(-m)\cdot 0=0;$$
$$0-(-n)=n;$$
$$n-m=n+(-m).$$

Например,

$$\begin{array}{ll} (-2)+(-3)=-(2+3)=-5; & (-2)(-3)=6; \\ (-7)+3=-(7-3)=-4; & (-3)\cdot 4=-12; \\ (-5)+8=8-5=3; & -(-3)=3; \\ (-2)+2=0; & 5-(+2)=5+(-2)=3. \end{array}$$

Пример 5. Вычислить $2\cdot(-3)+(-2)-(-3)(-4)(-2)$.

Решение. $2\cdot(-3)+(-2)-(-3)(-4)(-2)=-6+(-2)-(-24)=$ $=-6-2+24=-(6+2)+24=-8+24=24-8=16$.

Если целое число $k\neq 0$ представимо в виде произведения двух целых чисел d и q, то говорят, что число k делится нацело на число d и делится нацело на число q, а каждое из чисел d и q является делителем числа k. Например, для числа (-10) его делителями будут числа ± 1, ± 2, ± 5, ± 10.

Целое число называется *четным*, если число 2 является его делителем, и *нечетным* — в противном случае. Например, числа

$$\ldots,\ -8,\ -6,\ -4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \ldots$$

четные, а числа

$$\ldots, -7, \ -5, \ -3, \ -1, \ 1, \ 3, \ 5, \ 7, \ \ldots$$

нечетные.

Основные свойства делимости нацело. Пусть n, d, m, p, $q \in \mathbf{Z}$. Тогда:

1. Если n делится на d, то произведение nm также делится на d.
2. Если n и m делятся на d, то сумма $m+n$ и разность $m-n$ также делятся на d.
3. Если m делится на p, а n делится на q, то произведение mn делится на произведение pq.
4. Если m делится на n, а n делится на p, то m делится на p.

Пример 6. Найти наибольшую цифру X, при которой сумма $12 + \overline{2X3}$ делится на 3.

Решение. Так как число 12 делится на 3 и данная сумма делится на 3, то число $\overline{2X3}$, равное их разности, также должно делиться на 3. Наибольшая цифра, при которой $5+X$ делится на 3, равна 7, т. е. $X = 7$.

Для любого целого числа k и натурального числа n существует единственная пара целых чисел p и q, таких, что

$$k = np + q,$$

причем $0 \leqslant q < n$. Число p называется *частным*.

При $q = 0$ число k делится на n нацело.

При $q \neq 0$ говорят, что число k *делится* на n *с остатком*; число q называется *остатком*. Например, при делении числа 25 на число 7 получаем $25 = 3 \cdot 7 + 4$, где 3 — частное, а 4 — остаток. При делении числа (-25) на число 7 получаем $-25 = (-4) \cdot 7 + 3$, где (-4) — частное, а 3 — остаток.

При делении целого числа k на натуральное число n имеем:

а) либо число k делится на число n нацело;

б) либо при делении числа k на число n получаем в остатке одно из чисел $1, 2, \ldots, n-1$.

Например, при делении числа k на 3 имеем либо $k = 3m$, либо $k = 3r + 1$, либо $k = 3l + 2$.

Пример 7. Доказать, что при любом натуральном n число n^5 оканчивается на ту же цифру, что и число n.

Решение. Любое натуральное число n можно представить в виде $n = 10k + l$, где k — натуральное число либо 0, а l — целое число, такое, что $0 \leqslant l \leqslant 9$.

Тогда $n^5 = (10k + l)^5 = 10r + l^5$, где r — натуральное число либо 0. Отсюда следует, что число n^5 оканчивается на ту же цифру, что и число l^5. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число l^5 оканчивается на ту же цифру, что и число l.

Пример 8. Доказать, что для любого натурального числа n число $n^3 - n$ делится на 6.

Решение. Представим $n^3 - n$ в виде

$$n^3 - n = (n-1)\,n(n+1).$$

Число n можно представить в виде $n = 6k + l$, где k — натуральное число либо 0, а l принимает одно из следующих значений: $l = 0$, $l = 1$, $l = 2$, $l = 3$, $l = 4$, $l = 5$.

Если $l = 0$, то $n = 6k$, поэтому число n делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Если $l = 1$, то $n = 6k + 1$, поэтому число $n - 1 = 6k$ делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Если $l = 2$, то $n = 6k + 2$, поэтому число

$$n(n-1)(n+1) = (6k+2)(6k+1)(6k+3) = \\ = 2(3k+1)(6k+1)\cdot 3\cdot(2k+1) = 6(3k+1)(6k+1)(2k+1)$$

делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Если $l = 3$, то $n = 6k + 3$, поэтому число

$$n(n-1)(n+1) = (6k+3)(6k+2)(6k+4) = \\ = 3(2k+1)\cdot 2(3k+1)(6k+4) = 6(2k+1)(3k+1)(6k+4)$$

делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Если $l = 4$, то $n = 6k + 4$; поэтому число

$$n(n-1)(n+1) = (6k+4)(6k+3)(6k+5) = \\ = 2(3k+2)\cdot 3(2k+1)(6k+5) = 6(3k+2)(2k+1)(6k+5)$$

делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Если $l = 5$, то $n = 6k + 5$; поэтому число

$$n(n-1)(n+1) = (6k+5)(6k+4)(6k+6) = 6(6k+5)(6k+4)(k+1)$$

делится на 6, и, следовательно, число $n(n-1)(n+1)$ также делится на 6.

Итак, при любом натуральном числе n число $n^3 - n$ делится на 6.

Пример 9. Найти все целые числа, которые при делении на 17 дают остаток 2, а при делении на 5 дают остаток 3.

Решение. Целые числа, делящиеся на 17 с остатком 2, можно записать в виде

$$n_k = 17k + 2, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

а все целые числа, делящиеся на 5 с остатком 3, можно записать в виде

$$n_l = 5l + 3, \qquad l \in \mathbf{Z}.$$

Пусть $n_k = n_l$, т. е. $17k + 2 = 5l + 3$, тогда

$$5l = 17k - 1 = 15k + (2k - 1),$$

следовательно, число $2k - 1$ делится на 5. Поскольку $2k - 1 = 5m$ (где $m \in \mathbf{Z}$) и $2k = 4m + m + 1$, то число $m + 1$ делится на 2, т. е.

$$m + 1 = 2d.$$

Таким образом, $m = 2d - 1$ и, следовательно, $k = 2m + d$ (где $d \in \mathbf{Z}$).

Выразим k и l через d; имеем

$$k = 5d - 2, \qquad l = 3(5d - 2) + 2d - 1 = 17d - 7.$$

Поэтому

$$n_k = 17k + 2 = 17(5d - 2) + 2 = 85d - 32,$$
$$n_l = 5l + 3 = 5(17d - 7) + 3 = 85d - 32.$$

Таким образом, все числа вида

$$85d - 32 = 85(d - 1) + 85 - 32 = 85(d - 1) + 53, \qquad d \in \mathbf{Z},$$

являются искомыми.

Итак, условию задачи удовлетворяют все числа, которые при делении на 85 дают остаток 53, т. е. числа вида $85t + 53$ (где $t \in \mathbf{Z}$).

ЗАДАНИЕ 1

1. Какие из первых 15 натуральных чисел являются простыми, а какие составными?

2. Представить числа 1375 и 9009 в виде произведения простых множителей.

3. Найти НОД (a, b):
1) $a = 120, \quad b = 144$; 2) $a = 275, \quad b = 180$;
3) $a = 372, \quad b = 156$.

4. Найти НОК (a, b):
1) $a = 70, \quad b = 112$; 2) $a = 75, \quad b = 114$;
3) $a = 544, \quad b = 720$.

5. Делится ли число на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15:
1) 2 025; 2) 2 160; 3) 5 184; 4) 91 215;
5) 37 342 488; 6) 9 714 832; 7) 8 756 442; 8) 48 478 300?

6. Найти наименьшее трехзначное число, которое делится на 2, но не делится нацело на 4.

7. Найти цифру X, при которой число $\overline{5X793X4}$ делится на 3.

ЗАДАНИЕ 2

1. Представить числа 1124 и 24 180 в виде произведения простых множителей.

2. Найти НОД $(a,\, b)$:

1) $a = 108, \quad b = 105;$ 2) $a = 144, \quad b = 174;$

3) $a = 192, \quad b = 102.$

3. Найти НОК $(a,\, b)$:

1) $a = 36, \quad b = 54;$ 2) $a = 111, \quad b = 30;$

3) $a = 216, \quad b = 270.$

4. Делится ли число на 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 15, 25:

1) 1 080; 2) 1 296; 3) 10 800; 4) 11 223 344;

5) 73 885 635; 6) 547 711 300; 7) 46 787 641 200; 8) 3 893 435 594?

5. Доказать, что если натуральное число m больше натурального числа n и каждое из этих чисел делится нацело на число p, то разность $m - n$ также делится нацело на число p.

6. Привести пример пятизначного числа, которое делится на 8 и 9.

7. Найти цифру X, при которой число $\overline{12X347X}$ делится нацело на 8.

ЗАДАНИЕ 3

1. Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2.

2. Доказать, что число $\overline{ab} - \overline{ba}$ делится на 9.

3. Доказать, что число $\overline{abcd}$ тогда и только тогда делится на 101, когда $\overline{ab} - \overline{cd} = 0$.

4. Являются ли следующие числа взаимно простыми:

1) 51 и 76; 2) 1 081 и 2 924; 3) 80 600 и 5 187?

5. Найти все пятизначные числа вида $\overline{64X5Y}$, делящиеся на 36.

6. Доказать, что число является составным:

1) $\underbrace{22\ldots23}_{1986\ \text{цифр}};$ 2) $17^{14} + 21^{30};$ 3) $2^{15} + 424;$

4) $1\,517^2 - 1\,516^2;$ 5) $11\,111\,111;$

6) $4^{15} - 1;$ 7) $100^{100} - 1;$ 8) $10^6 - 5^7;$

9) $10^{13} - 7;$ 10) $10^{240} - 4;$ 11) $55^{37} - 71^{17};$

12) $126^{1985} - 51^{1986}.$

ЗАДАНИЕ 4

1. Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится нацело на 24.

2. Доказать, что число $\overline{ab} + \overline{ba}$ делится на 11.

3. Доказать, что число $\overline{abcd}$ тогда и только тогда делится на 99, когда число $\overline{ab} + \overline{cd}$ делится на 99.

4. Являются ли взаимно простыми следующие числа:

1) 27 и 88; 2) 1155 и 338; 3) 1 224 и 2 487 651?

5. Найти все пятизначные числа вида $\overline{71X1Y}$, делящиеся на 45.

6. Доказать, что число является составным:

1) $123\,123\,123\,123$; 2) $6^5 - 9^2$; 3) $2^{30} - 1$;

4) $13^{15} + 17^3$; 5) $\underbrace{444\ldots41}_{1985\text{ цифр}}$; 6) $4^{17} - 284$;

7) $8^5 + 2^{21}$; 8) $17\,867^2 - 15\,944^2$.

ЗАДАНИЕ 5

1. Найти остатки от деления числа:

1) $78\,346\,791$; 2) $1\,231\,234\,155$

на 5, 8, 9, 10, 25.

2. Привести пример четырехзначного числа, которое делится на 9, а при делении на 4 дает в остатке 3.

3. Вычислить:

1) $(-2) + (-3) : (-1) - (-7)$;

2) $[3 \cdot (-2) - (-8)] \cdot (-7) - (-2)(-5) + 3 : (-1)$;

3) $\dfrac{(-1) \cdot (-2) + (-3) \cdot (-4) - (-2) \cdot (-3)}{(-2) \cdot (-3) : (-1) - (-3) \cdot (-2) : (-6) + (-2)}$.

4. Найти целые числа x и y, такие, что:

1) $(x+2)(y-1) = 4$; 2) $(x-3)(yx+5) = 1$.

5. Доказать, что сумма квадратов двух последовательных целых чисел при делении на 4 дает в остатке 1.

6. Доказать, что при любом целом m число $m(m^2+5)$ делится нацело на 6.

7. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из этих чисел равна 28. Найти все такие числа.

ЗАДАНИЕ 6

1. Найти остатки от деления числа:

1) $278\,456\,789$; 2) $321\,792\,413$

на 3, 4, 5, 8, 9, 125.

2. Привести пример шестизначного числа, которое делится на 3, а при делении на 5 дает в остатке 2.

3. Вычислить:

1) $(-2) \cdot 3 + (-4) - 7 \cdot 0 + 1$; 2) $(-6) : (-2) + (-8) : 4 - (-2)$;

3) $(5-3)(4 - ((-3) - 7))$; 4) $\dfrac{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot (-5)}{(-3) - (-5)}$;

5) $\dfrac{(-2) + (-3) \cdot (-1) \cdot 0 + (-4)}{(-1) \cdot (-1) + 3}$.

4. Найти целые числа x и y, такие, что:

1) $(x+1)(y-2) = 2$; 2) $(y+1)(xy-1) = 3$.

5. Доказать, что квадрат нечетного целого числа при делении на 8 дает остаток 1.

6. Доказать, что при любом целом m число $m(m+1)(2m+1)$ делится нацело на 6.

7. Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем квадратный корень из суммы их квадратов, а сумма этих чисел равна 45. Найти все такие числа.

Упражнения

1. Натуральные числа m и n делятся на натуральное число p. Доказать, что сумма $m+n$ делится на p.

2. Натуральное число m делится на натуральное число p, а число n делится на натуральное число q. Доказать, что число mn делится на число pq.

3. Натуральное число m делится на натуральное число p. Доказать, что число m^k делится на p^k $(k \in \mathbf{N})$.

4. Последняя цифра числа равна 5. Доказать, что квадрат этого числа делится на 25.

5. Привести пример шестизначного числа, делящегося на 121; найти наименьшее такое число.

6. Доказать, что число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммой его цифр, стоящих на четных местах, и суммой цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11.

7. Сумма двух трехзначных чисел $\overline{abc}$ и $\overline{efg}$ делится на 37. Доказать, что число $\overline{abcefg}$ делится на 37.

8. Найти все числа вида $\overline{56X3Y}$, делящиеся на 36.

9. Найти все числа вида $\overline{71X1Y}$, делящиеся на 15.

10. Найти все числа вида $\overline{135XY}$, делящиеся на 45.

11. Найти все числа вида $\overline{517XY}$, делящиеся на 6 и 9.

12. В шестизначном числе первая цифра совпадает с четвертой, вторая — с пятой, третья — с шестой. Доказать, что число делится:

1) на 7; 2) на 11; 3) на 13.

13. Делится ли число $123\ldots9\,899\,100$ (выписаны подряд все числа от 1 до 100):

1) на 4; 2) на 8; 3) на 3; 4) на 9?

14. Делится ли число $\underbrace{1\ldots1}_{81 \text{ цифра}}$ на 81?

15. Делится ли число $\underbrace{7\ldots7}_{27 \text{ цифр}}$:

1) на 189; 2) на 333; 3) на 777; 4) на 567?

16. Доказать, что число является составным:

1) $2^{33}+1$;	2) $2^{50}-1$;
3) $13^{25}+17^{89}+2^{71}$;	4) $2^{3^{1979}}+1$;
5) $2^{3^{1979}}-1$;	6) $4\cdot10^{400}+1$;
7) $4\cdot(10\,000)^{40}+1$;	8) $43^{43}-17^{17}$;
9) $10^{333}+8$;	10) $(3299^5+6)^{18}-1$;

11) $3^{105}+4^{105}$; 12) $5\cdot 2^{298}+3^{299}$;

13) $5^{501}+4^{502}+3^{500}$; 14) $11\cdot 21\cdot 31\cdot 41\cdot\ldots\cdot 91-111$;

15) $\dfrac{10^{198}+2}{3}+\dfrac{10^{297}+8}{9}$; 16) $(2\cdot 5^7-5\cdot 2^7)^{83}-((2\cdot 5^7)^{83}-(5\cdot 2^7)^{83})$;

17) $2222^{5555}+5555^{2222}$; 18) $222^{333}+333^{222}$.

17. Сумма трех натуральных чисел больше, чем их произведение, а сумма двух из них равна 33. Найти эти числа.

18. Доказать, что для любого натурального числа n число $n/3+ + n^2/2+n^3/6$ натуральное.

19. Доказать, что для любого нечетного натурального n число $n^{12}-n^8-n^4+1$ делится на 512.

20. Доказать, что сумма квадратов двух нечетных чисел не является квадратом целого числа.

21. Доказать, что в прямоугольном треугольнике, длины сторон которого выражаются натуральными числами, по крайней мере одно из чисел, выражающих длину катета, делится на 3.

22. Доказать, что если в прямоугольном треугольнике длины сторон выражаются натуральными числами, то хотя бы одно из этих чисел делится на 5.

23. Найти все натуральные n, для которых сумма $1+2+3+\ldots \ldots+n$ при делении на 5 дает остаток 1.

24. Доказать, что при любом натуральном n число:

1) $10^n+18n-1$ делится на 27;

2) $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64;

3) $50^n-5^n(2^n+1)+1$ делится на 36;

4) $42^{4n}-21^{4n}+8(n+11)+37n+2$ делится на 45.

25. Верно ли, что каждое натуральное нечетное число может быть записано в виде:

1) $2n-1,\ n\in\mathbf{N}$; 2) $2n+7,\ n\in\mathbf{N}$;

3) $4n+1$ или $4n-1,\ n\in\mathbf{N}$; 4) $2n^2+3,\ n\in\mathbf{N}$?

26. Верно ли, что каждое четное натуральное число может быть представлено в виде:

1) $2n-2,\ n\in N$; 2) $4n+2,\ n\in\mathbf{N}$; 3) $n^2+2,\ n\in\mathbf{N}$?

27. Найти наибольшее целое число, которое при делении с остатком на 15 дает частное 19.

28. Какой цифрой оканчивается сумма всех двузначных чисел?

29. Какой цифрой оканчивается сумма всех трехзначных чисел?

30. Найти все числа k, для которых число k^2+3k+5 делится на 121.

31. Доказать, что если каждое из двух натуральных чисел при делении на натуральное число m дает остаток 1, то их произведение при делении на m также дает остаток 1.

32. Доказать, что числа вида $3m + 2$ ($m \in \mathbf{N}$) не являются квадратами целых чисел.

33. Доказать, что любая натуральная степень числа 15 при делении на 7 дает остаток 1.

34. Доказать, что все числа вида $2^{2^n} + 1$ ($n \geqslant 2$, $n \in \mathbf{N}$) оканчиваются цифрой 7.

35. Доказать, что все числа вида $2^{4^n} - 5$ ($n \in \mathbf{N}$) оканчиваются цифрой 1.

36. Доказать, что простое число $p \geqslant 5$ при делении на 6 дает остаток 1 или 5.

37. Доказать, что квадрат простого числа $p \geqslant 5$ при делении на 24 дает остаток 1.

38. Натуральное число $n > 1$ не делится нацело на 2 и на 3. Доказать, что число $n^2 - 1$ делится на 24.

39. Пусть $p > 3$ — простое число. Доказать, что число $p^2 - 1$ делится на 24.

40. Найти все натуральные p, для которых числа $p + 1$, $p + 2$ и $p + 4$ простые.

41. Найти все пары простых чисел p и q, удовлетворяющие условию $p^2 - 2q^2 = 1$.

42. Найти все простые p, для которых число $2p^2 + 1$ также простое.

43. Найти все простые p, для которых числа $4p^2 + 1$ и $6p^2 + 1$ также простые.

44. Найти все простые p, для которых числа $p + 10$ и $p + 14$ также простые.

45. Доказать, что не существует простого числа p, для которого числа $p + 5$ и $p + 10$ простые.

46. Доказать, что не существует простого числа p, для которого числа $p + 2$ и $p + 5$ простые.

47. Числа p и $8p^2 + 1$ простые. Доказать, что число $8p^2 + 2p + 1$ простое.

48. Доказать, что для любого $n > 3$ хотя бы одно из чисел n, $n + 2$ или $n + 4$ не будет простым.

49. Сколько существует вариантов представления числа 496 в виде $2x + 15y$ с натуральными x и y?

50. Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $3x + 20y = 231$?

51. Доказать равенство $\sqrt{\underbrace{1\ldots1}_{2n\text{ цифр}} - \underbrace{2\ldots2}_{n\text{ цифр}}} = \underbrace{3\ldots3}_{n\text{ цифр}}$.

52. Доказать, что для любого натурального числа n число $\underbrace{4\ldots4}_{n\text{ цифр}}\underbrace{8\ldots8}_{(n-1)\text{ цифр}}9$ является полным квадратом.

53. Найти все натуральные числа x и y, удовлетворяющие условию:
1) $2^{x^2} \cdot 3^y = 12^x$; 2) $2^{x^2} \cdot 3^{y^2} = 6^{x+y}$;
3) $18^{xy} = 2^{x^2} \cdot 3^{4y}$; 4) $5^{-x} \cdot 10^y = 20^{x^2}$.

54. Существуют ли натуральные числа n и m, такие, что $n^2 - m^2 = 101\,010$?

55. Доказать, что целое число n делится на 7, 11 или 13 тогда и только тогда, когда разность между числом его тысяч и остатком от деления его на 1000 делится соответственно на 7, 11 или 13 (например, число 452 312 делится на 7, так как число $452 - 312 = 140$ делится на 7).

56. Доказать, что если в числе произвольно переставить цифры, то разность между заданным числом и полученным делится на 9.

57. Доказать, что разность двух чисел с одинаковой суммой цифр делится на 9.

58. Доказать, что сумма $(2n+1)$ последовательных чисел делится на число $2n+1$.

59. Доказать, что для двух натуральных чисел, одно из которых есть разность квадратов нечетных чисел, а другое — сумма квадратов этих чисел, число 4 не является общим делителем.

60. Найти НОД и НОК чисел:
1) 308 и 264; 2) 112 и 490;
3) 144, 420 и 252; 4) 1 512, 1 188 и 1 260.

61. Доказать, что общее кратное двух чисел делится на их наименьшее общее кратное.

62. Доказать, что:
1) $\text{НОД}\,(a,\, b,\, c) = \text{НОД}\,(\text{НОД}\,(a,\, b),\, c)$;
2) $\text{НОК}\,(a,\, b,\, c) = \text{НОК}\,(\text{НОК}\,(a,\, b),\, c)$;
3) $\text{НОД}\,(a,\, b) \cdot \text{НОК}\,(a,\, b) = a \cdot b$;
4) $\text{НОД}\,(ac,\, bc) = c\,\text{НОД}\,(a,\, b)$;
5) $\text{НОК}\,(ac,\, bc) = c\,\text{НОК}\,(a,\, b)$;
6) $\text{НОД}\,(n,\, n+1,\, n+2) = 1$;
7) $\text{НОК}\,(n,\, n+1,\, n+2)$ равен либо $n(n+1)(n+2)$, либо $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{2}$ (в зависимости от четности числа n);
8) $\text{НОД}\,(2n,\, 2n+2) = 2$.

63. Доказать, что числа $\dfrac{a}{\text{НОД}\,(a,\, b)}$ и $\dfrac{b}{\text{НОД}\,(a,\, b)}$ взаимно простые.

64. Доказать, что $\text{НОД}\,(ab,\, bc,\, ca)$ делится на $\text{НОД}\,(a,\, b,\, c)$.

65. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа. Доказать, что числа a и $a+b$ также взаимно простые.

66. Доказать, что если $\text{НОД}\,(a,\, b) = 1$, то $\text{НОД}\,(ac,\, b) = \text{НОД}\,(c,\, b)$.

67. Доказать, что $\text{НОД}\,(m,\, n)$, $m > n$, меньше числа $m - n$ или равен ему.

68. Найти все пары натуральных чисел n и m, удовлетворяющие системе:

1) $\begin{cases} m+n=20, \\ \text{НОД}\,(m,\,n)=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} mn=6, \\ \text{НОД}\,(m,\,n)=1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} mn=420, \\ \text{НОД}\,(m,\,n)=20; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} mn=20, \\ \text{НОД}\,(m,\,n)=10. \end{cases}$

69. Если $\text{НОД}\,(n,\,m,\,k)=1$, то $\text{НОД}\,(pn,\,lm,\,k)=\text{НОД}\,(p,\,l,\,k)$. Доказать.

70. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие условию:

1) $x+y=xy$; 2) $x^2-3xy+2y^2=3$;

3) $x^2+23=y^2$; 4) $x^2-47=y^2$;

5) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{xy}=1$; 6) $x(y^2+1)=48$;

7) $y^2-5x^2=6$; 8) $x^2=4y^2$;

9) $y=\dfrac{2}{3}\,x$; 10) $3^x-y^3=1$.

71. Найти все тройки целых чисел x, y и z, удовлетворяющие системе:

1) $\begin{cases} x+2y+5z=1, \\ 3x+y+5z=3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y-3z=1, \\ x+y-2z=1. \end{cases}$

72. Найти все целые числа z, удовлетворяющие условию:

1) $\sqrt{z+2}<\sqrt[4]{1-z}$; 2) $\sqrt[6]{z+1}<\sqrt[8]{6-z}$;

3) $\sqrt{z+2}>\sqrt[4]{1-z}$; 4) $\sqrt[6]{z+1}>\sqrt[8]{6-z}$.

73. Число $x+\dfrac{1}{x}$ целое. Доказать, что целым будет и число $x^8+\dfrac{1}{x^8}$.

74. Пусть x и y — целые числа, удовлетворяющие условию $x^2-4y^2=4xy$. Доказать, что $x=y=0$.

75. Сколько целых чисел n удовлетворяют условию:

1) $(n^2-2)(n^2-20)<0$;

2) $(n^2-1)(n^2-11)(n^2-101)(n^2-1001)<0$;

3) $(n^2-3)(n^2-33)(n^2-103)(n^2-203)<0$?

76. Найти все пары целых чисел x и y, удовлетворяющие системе:

1) $\begin{cases} x>y, \\ 2x+y<32, \\ x+2y>28; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 20x<y, \\ 23(x-1)\geqslant y, \\ 21x+y=500. \end{cases}$

§ 2. Рациональные и иррациональные числа

Обыкновенная дробь (*дробь*) — число, представляемое в виде $\dfrac{p}{q}$, где q — *знаменатель* дроби (натуральное число), p — *числитель* дроби (целое число).

Если p — натуральное число, то число $\frac{p}{q}$ называется положительной дробью; если p — целое отрицательное число, то число $\frac{p}{q}$ называется отрицательной дробью. Отметим, что число $\frac{p}{q}$ можно записать в виде $\frac{-p}{-q}$, или $-\frac{-p}{q}$, или $-\frac{p}{-q}$, а число $\left(-\frac{p}{q}\right)$ можно записать в виде $\frac{-p}{q}$ или $\frac{p}{-q}$.

Любое целое число k представимо в виде дроби $\frac{k}{1}$.

Две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ равны, если справедливо равенство $pn = qm$. Например, дроби $\frac{4}{7}$ и $\frac{8}{14}$ равны, так как $4 \cdot 14 = 7 \cdot 8$.

Основное свойство дробей. *Если числитель и знаменатель данной дроби умножить на одно и то же целое, отличное от нуля число, или разделить на их общий множитель, то получится дробь, равная данной, т.е.*

$$\frac{p}{q} = \frac{p \cdot k}{q \cdot k}, \qquad k \in \mathbf{Z}, \qquad k \neq 0.$$

Например, дроби $\frac{3}{7}$, $\frac{6}{14}$ и $\frac{-9}{-21}$ равны.

Деление числителя и знаменателя положительной дроби на их общий делитель называется *сокращением* дроби.

Положительная дробь $\frac{p}{q}$ называется *несократимой*, если числа p и q взаимно простые. Например, дробь $\frac{13}{7}$ несократимая, так как НОД $(13, 7) = 1$.

Отрицательная дробь $\frac{p}{q}$ называется несократимой, если положительная дробь $\frac{-p}{q}$ несократимая.

Всякую дробь можно записать в виде несократимой дроби.

Для того чтобы положительную дробь $\frac{p}{q}$ записать в виде несократимой дроби, надо сократить на НОД (p, q) числитель и знаменатель дроби.

Пример 1. Записать дроби $\frac{105}{147}$ и $-\frac{18}{42}$ в виде несократимых дробей.

Решение. Поскольку $105 = 3 \cdot 35 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, а $147 = 3 \cdot 49 = 3 \cdot 7^2$, то, сокращая числитель и знаменатель дроби $\frac{105}{147}$ на множители 3 и 7, получим

$$\frac{105}{147} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 7 \cdot 7} = \frac{5}{7}.$$

Поскольку $\frac{-18}{42} = -\frac{18}{42}$ и $18 = 3 \cdot 3 \cdot 2$, $42 = 3 \cdot 2 \cdot 7$, то $-\frac{18}{42} = -\frac{3}{7}$.

Арифметические действия над дробями:

а) $\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$ (сумма дробей);

б) $\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 - p_2 q_1}{q_1 q_2}$ (разность дробей);

в) $\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2}$ (произведение дробей); в частности, $\frac{p}{q} \cdot \frac{q}{p} = 1$;

г) $\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2}{q_1 p_2}$ (частное дробей); в частности, $1 : \frac{p}{q} = \frac{q}{p}$.

В некоторых случаях правило нахождения суммы (разности) дробей допускает упрощение.

1. Для того чтобы сложить (вычесть) две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{q}$ с одинаковыми знаменателями, надо написать дробь, у которой знаменатель равен знаменателю данных дробей, а числитель — сумме (разности) числителей этих дробей.

Например,

$$\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{2+8}{3} = \frac{10}{3}; \qquad \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{3+2+5}{7} = \frac{10}{7}.$$

2. Для того чтобы сложить (вычесть) две дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{s}$ с разными знаменателями, надо найти наименьшее общее кратное A знаменателей этих дробей и привести данные дроби к этому общему знаменателю A, а затем произвести сложение (вычитание) полученных дробей с одинаковыми знаменателями.

Пример 2. Сложить дроби:

а) $\frac{5}{21}$ и $\frac{4}{9}$; б) $\frac{7}{90}$ и $\frac{11}{105}$; в) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ и $\frac{5}{6}$.

Решение. а) Наименьшее общее кратное чисел 21 и 9 есть 63. Приводя дроби к этому общему знаменателю, получим

$$\frac{5}{21} = \frac{15}{63}, \qquad \frac{4}{9} = \frac{28}{63};$$

поэтому

$$\frac{5}{21} + \frac{4}{9} = \frac{15}{63} + \frac{28}{63} = \frac{15+28}{63} = \frac{43}{63}.$$

б) Так как $90 = 2 \cdot 5 \cdot 3^2$ и $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, то НОК $(95, 105) = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 630$; поэтому

$$\frac{7}{90} + \frac{11}{105} = \frac{7 \cdot 7 + 6 \cdot 11}{630} = \frac{49+66}{630} = \frac{115}{630} = \frac{23}{126}.$$

в) $$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6} = \frac{1 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 15 + 4 \cdot 12 + 5 \cdot 10}{60} = \frac{30+40+45+48+50}{60} = \frac{213}{60} = \frac{71}{20}.$$

Пример 3. Вычислить разность:

а) $\frac{23}{36} - \frac{1}{24}$; б) $\frac{2}{15} - \frac{7}{27}$.

Решение. а) Так как $36 = 2^2 \cdot 3^2$ и $24 = 2^3 \cdot 3$, то НОК $(36, 24) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$; поэтому

$$\frac{23}{36} - \frac{1}{24} = \frac{2 \cdot 23 - 3 \cdot 1}{72} = \frac{46-3}{72} = \frac{43}{72}.$$

б) Так как $15 = 3 \cdot 5$ и $27 = 3^3$, то НОК$\,(15,\,27) = 3^3 \cdot 5 = 135$, поэтому

$$\frac{2}{15} - \frac{7}{27} = \frac{9 \cdot 2 - 5 \cdot 7}{135} = \frac{18 - 35}{135} = \frac{-17}{135} = -\frac{17}{135}.$$

Говорят, что дробь $\frac{p}{q}$ *больше* (*меньше*) дроби $\frac{m}{n}$, и пишут $\frac{p}{q} > \frac{m}{n}$ $\left(\frac{p}{q} < \frac{m}{n}\right)$, если дробь $\frac{p}{q} - \frac{m}{n}$ положительная (отрицательная).

Из двух положительных дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{p}{r}$ *с одинаковым знаменателем больше та, у которой числитель больше.*

Из двух положительных дробей $\frac{p}{q}$ и $\frac{r}{q}$ *с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше.*

Пример 4. Сравнить дроби:

а) $\frac{11}{12}$ и $\frac{12}{13}$; б) $\frac{11}{18}$ и $\frac{17}{21}$.

Решение. а) Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 13, а второй на 12; тогда

$$\frac{11}{12} = \frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 13} = \frac{143}{156} \quad \text{и} \quad \frac{12}{13} = \frac{12 \cdot 12}{13 \cdot 12} = \frac{144}{156}.$$

Поскольку у этих дробей знаменатели одинаковые, то первая дробь меньше, чем вторая; следовательно, $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$.

б) Так как

$$\frac{11}{18} - \frac{17}{21} = \frac{7 \cdot 11 - 6 \cdot 17}{126} = \frac{77 - 102}{126} = -\frac{25}{126},$$

то $\frac{11}{18} < \frac{17}{21}$.

Положительная дробь $\frac{p}{q}$ называется *правильной*, если ее числитель меньше знаменателя; в противном случае (т.е. если числитель равен знаменателю или больше его) — *неправильной*. Например, дроби $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{11}{123}$ правильные, а дроби $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{17}{11}$ неправильные.

Если положительная дробь $\frac{p}{q}$ неправильная, то ее числитель можно единственным образом представить в виде $p = nq + r$, где n — натуральное число, а r — целое число, удовлетворяющее условию $0 \leqslant r < q$.

При $r \neq 0$ неправильная дробь $\frac{p}{q}$ записывается в виде $n + \frac{r}{q}$ или $n\,\frac{r}{q}$. Число $n\,\frac{r}{q}$ называется *смешанной дробью*, где n — целая часть, а $\frac{r}{q}$ — дробная часть. Например, неправильные дроби $\frac{31}{3}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{15}{4}$ записываются в виде смешанных дробей соответственно следующим образом: $10\,\frac{1}{3}$, $1\,\frac{1}{7}$ и $3\,\frac{3}{4}$.

Любую смешанную дробь можно обратить в неправильную дробь; например,

$$2\,\frac{2}{5} = 2 + \frac{2}{5} = \frac{2}{1} + \frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 2 \cdot 1}{5} = \frac{12}{5}.$$

Отрицательная дробь $\frac{p}{q}$ называется *правильной* (*неправильной*), если положительная дробь $\left(-\frac{p}{q}\right)$ правильная (неправильная). Если отрицательная дробь $\frac{p}{q}$ неправильная, то ее можно записать следующим образом: представить в виде смешанной дроби положительную дробь $\left(\frac{-p}{q}\right)$ и перед этой смешанной дробью поставить знак «$-$».

Пример 5. Представить в виде смешанной дроби дробь $-\frac{17}{3}$.

Решение. Так как $\frac{17}{3} = 5\,\frac{2}{3}$, то $-\frac{17}{3} = -5\,\frac{2}{3}$.

Пример 6. Выполнить действия:

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$; б) $3\,\frac{4}{5} \cdot 2\,\frac{2}{3}$;

в) $\frac{4}{5} - 5\,\frac{1}{7}$; г) $2\,\frac{1}{2} : \frac{5}{6}$.

Решение.

а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$;

б) $3\,\frac{4}{5} \cdot 2\,\frac{2}{3} = \frac{19}{5} \cdot \frac{8}{3} = \frac{19 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{152}{15} = 10\,\frac{2}{15}$;

в) $\frac{4}{5} - 5\,\frac{1}{7} = \frac{4}{5} - \frac{36}{7} = \frac{4 \cdot 7 - 36 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{28 - 180}{35} = \frac{-152}{35} = -4\,\frac{12}{35}$;

г) $2\,\frac{1}{2} : \frac{5}{6} = \frac{5}{2} : \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 5} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1} = 3$.

Пример 7. Вычислить:

а) $2\,\frac{5}{6} + 3\,\frac{7}{9}$; б) $5\,\frac{11}{24} - 3\,\frac{5}{18}$;

в) $3\,\frac{1}{2} - 5\,\frac{1}{6}$; г) $4\,\frac{1}{5} - 6\,\frac{2}{3}$.

Решение.

а) $$2\,\frac{5}{6} + 3\,\frac{7}{9} = (2+3) + \left(\frac{5}{6} + \frac{7}{9}\right) = 5 + \frac{5 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{18} =$$
$$= 5 + \frac{15 + 14}{18} = 5 + \frac{29}{18} = 5 + 1 + \frac{11}{18} = 6 + \frac{11}{18} = 6\,\frac{11}{18};$$

б) $$5\,\frac{11}{24} - 3\,\frac{5}{18} = (5-3) + \left(\frac{11}{24} - \frac{5}{18}\right) = 2 + \frac{11 \cdot 3 - 5 \cdot 4}{72} =$$
$$= 2 + \frac{33 - 20}{72} = 2 + \frac{13}{72} = 2\,\frac{13}{72};$$

в) $$3\,\frac{1}{2} - 5\,\frac{1}{6} = (3-5) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = -2 + \frac{3-1}{6} = -2 + \frac{2}{6} =$$
$$= -2 + \frac{1}{3} = \frac{-2}{1} + \frac{1}{3} = \frac{(-2) \cdot 3 + 1 \cdot 1}{3} = \frac{-6+1}{3} = \frac{-5}{3} = -1\,\frac{2}{3};$$

г) $$4\,\frac{1}{5} - 6\,\frac{2}{3} = (4-6) + \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right) = -2 + \frac{3 - 10}{15} =$$
$$= -2 + \frac{-7}{15} = -2 - \frac{7}{15} = -\left(2 + \frac{7}{15}\right) = -2\,\frac{7}{15}.$$

Свойства арифметических действий над дробями. Пусть r_1, r_2 и r_3 — положительные дроби; тогда

$$r_1 + r_2 = r_2 + r_1;$$
$$(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3) = r_1 + r_2 + r_3;$$
$$r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1;$$
$$r_1(r_2 \cdot r_3) = (r_1 \cdot r_2)\, r_3 = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3;$$
$$r_1 - r_2 = -(r_2 - r_1) = r_1 + (-r_2);$$
$$-r_1 - r_2 = -(r_1 + r_2);$$
$$-(-r_1) = r_1;$$
$$r_1(-r_2) = -(r_1 r_2) = (-r_1)\, r_2;$$
$$(-r_1)(-r_2) = r_1 r_2;$$
$$r_1(r_2 - r_3) = r_1 r_2 - r_1 r_3;$$
$$r_1(-r_2 - r_3) = -r_1 r_2 - r_1 r_3 = -(r_1 r_2 + r_1 r_3);$$
$$(-r_1)(r_2 + r_3) = -r_1 r_2 - r_1 r_3 = -(r_1 r_2 + r_1 r_3);$$
$$(-r_1)(-r_2 - r_3) = r_1(r_2 + r_3) = r_1 r_2 + r_1 r_3;$$
$$(-r_1)(r_2 - r_3) = -r_1 r_2 + r_1 r_3 = -(r_1 r_2 - r_1 r_3);$$
$$r_1 : r_2 = r_1 \cdot \frac{1}{r_2} = \frac{r_1}{r_2};$$
$$r_1 : (-r_2) = (-r_1) : r_2 = -(r_1 : r_2) = -\frac{r_1}{r_2};$$
$$(-r_1) : (-r_2) = r_1 : r_2 = \frac{r_1}{r_2};$$
$$(r_1 + r_2) : r_3 = \frac{r_1}{r_3} + \frac{r_2}{r_3};$$
$$(r_1 - r_2) : r_3 = \frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3};$$
$$(-r_1 - r_2) : r_3 = -\frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} = -\left(\frac{r_1}{r_3} + \frac{r_2}{r_3}\right);$$
$$(r_1 + r_2) : (-r_3) = -\frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3} = -\left(\frac{r_1}{r_3} + \frac{r_2}{r_3}\right);$$
$$(r_1 - r_2) : (-r_3) = -\frac{r_1}{r_3} + \frac{r_2}{r_3} = -\left(\frac{r_1}{r_3} - \frac{r_2}{r_3}\right);$$
$$(-r_1 - r_2) : (-r_3) = \frac{r_1}{r_3} + \frac{r_2}{r_3}.$$

Пример 8. Вычислить:

а) $\left(1\,\frac{3}{7} - 2\,\frac{1}{4}\right) \cdot 3\,\frac{1}{3}$; б) $\left(2\,\frac{1}{3} + 3\,\frac{1}{2}\right) : \left(-4\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{1}{7}\right) + 7\,\frac{1}{2}$;

в) $$\frac{\left(13\,\frac{1}{4} - 2\,\frac{5}{27} - 10\,\frac{5}{6}\right) \cdot 230\,\frac{1}{25} + 46\,\frac{3}{4}}{\left(1\,\frac{3}{7} + \frac{10}{3}\right) : \left(12\,\frac{1}{3} - 14\,\frac{2}{7}\right)}.$$

Решение. а) Так как $1\,\frac{3}{7} - 2\,\frac{1}{4} = \frac{10}{7} - \frac{9}{4} = \frac{40 - 63}{28} = \frac{-23}{28}$ и $3\frac{1}{3} = \frac{10}{3}$, то $\left(1\,\frac{3}{7} - 2\,\frac{1}{4}\right) \cdot 3\,\frac{1}{3} = \left(\frac{-23}{28}\right) \cdot \frac{10}{3} = -\left(\frac{23}{28} \cdot \frac{10}{3}\right) = -\frac{115}{42} = -2\,\frac{31}{42}$.

б) Пусть $A = 2\,\frac{1}{3} + 3\,\frac{1}{2}$, $B = -4\,\frac{1}{6} + 3\,\frac{1}{7}$; тогда

$$A = \frac{7}{3} + \frac{7}{2} = \frac{14+21}{6} = \frac{35}{6},$$

$$B = -\frac{25}{6} + \frac{22}{7} = \frac{-175+132}{42} = -\frac{43}{42},$$

$$A : B = \frac{35}{6} : \left(\frac{-43}{42}\right) = -\frac{35 \cdot 42}{6 \cdot 43} = -\frac{245}{43} = -5\,\frac{30}{43},$$

$$A : B + 7\,\frac{1}{2} = -5 + 7 - \frac{30}{43} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{-60+43}{86} = 2 - \frac{17}{86} = 1\,\frac{69}{86}.$$

в) Пусть

$$A = 13\,\frac{1}{4} - 2\,\frac{5}{27} - 10\,\frac{5}{6}, \qquad B = 1\,\frac{3}{7} + \frac{10}{3}, \qquad C = 12\,\frac{1}{3} - 14\,\frac{2}{7};$$

тогда

$$A = 13 - 2 - 10 + \frac{1}{4} - \frac{5}{27} - \frac{5}{6} = 1 + \frac{27-20-90}{108} = 1 - \frac{83}{108} = \frac{25}{108},$$

$$A \cdot 230\,\frac{1}{25} = \frac{25}{108} \cdot \frac{5751}{25} = \frac{25 \cdot 5751}{108 \cdot 25} = \frac{5751}{108} = \frac{213}{4},$$

$$A \cdot 230\,\frac{1}{25} + 46\,\frac{3}{4} = \frac{213}{4} + \frac{187}{4} = \frac{213+187}{4} = \frac{400}{4} = 100;$$

$$B = \frac{10}{7} + \frac{10}{3} = \frac{30+70}{21} = \frac{100}{21};$$

$$C = 12\,\frac{1}{3} - 14\,\frac{2}{7} = 12 - 14 + \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = -2 + \frac{7-6}{21} = -\frac{41}{21};$$

$$B : C = \frac{100}{21} : \left(-\frac{41}{21}\right) = -\frac{100}{41};$$

$$\frac{A \cdot 230\,\frac{1}{25} + 46\,\frac{3}{4}}{B : C} = \frac{100}{-100/41} = -41.$$

Дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой равен 10^k, где k — натуральное число, можно записать специальным образом.

Если $p > 0$, то пишут числитель этой дроби — число p — и, отсчитав с правой стороны k цифр, отделяют их запятой. При этом если в числителе меньше цифр, чем k, например, n $(n < k)$, то пишут числитель и перед его первой цифрой вписывают $(k - n)$ нулей, затем ставят запятую и перед ней пишут еще один нуль. Если в числителе k цифр, то пишут числитель, перед его первой цифрой ставят запятую и перед ней ставят нуль. Такое представление числа называется *положительной конечной десятичной дробью*.

Если $p < 0$, то дробь $\frac{p}{q}$ записывают в виде $-\left(\frac{-p}{q}\right)$, затем положительную дробь $\frac{-p}{q}$ записывают в виде конечной десятичной дроби и перед ней ставят знак минус. Такое представление называется *отрицательной конечной десятичной дробью*.

Например:

$$\frac{17}{10}=1{,}7;\ \frac{17}{100}=0{,}17;\ \frac{17}{1000}=0{,}017;\ -\frac{3}{100}=-0{,}03;\ -\frac{1}{1000}=-0{,}001.$$

Любая конечная десятичная дробь легко переводится в обыкновенную дробь. Для этого надо записать в числителе целое число, которое получится, если у десятичной дроби отбросить запятую и нули, стоящие слева, а в знаменателе написать единицу и после нее столько нулей, сколько цифр стоит у десятичной дроби после запятой, после чего дробь можно сократить на общий множитель, если он есть; например,

$$1{,}15=\frac{115}{100}=\frac{23}{20};\quad -2{,}755=-\frac{2755}{1000}=-\frac{551}{200};\quad 0{,}05=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}.$$

Для того чтобы несократимую дробь $\frac{p}{q}$ можно было записать в виде конечной десятичной дроби, необходимо и достаточно, чтобы ее знаменатель не содержал других простых множителей, кроме 2 и 5. Например, дробь $\frac{17}{20}$ в виде конечной десятичной дроби записывается следующим образом:

$$\frac{17}{20}=\frac{17}{4\cdot 5}=\frac{17\cdot 5}{2\cdot 5\cdot 2\cdot 5}=\frac{85}{100}=0{,}85.$$

В то же время дробь $\frac{5}{21}$ нельзя записать в виде конечной десятичной дроби, так как знаменатель этой дроби содержит простые множители, отличные от 2 и 5.

Бесконечной периодической десятичной дробью называется десятичная дробь, у которой после запятой стоит бесконечно много цифр, причем одна цифра или упорядоченная группа цифр, начиная с некоторого разряда после запятой, повторяется. Эта повторяющаяся цифра или упорядоченная группа цифр называется *периодом*.

Например, десятичная дробь 13,74331331331... является бесконечной периодической десятичной дробью с периодом 331.

Период принято писать один раз, заключая его в круглые скобки:

$$13{,}74331331\ldots=13{,}74(331);\qquad -0{,}888\ldots=-0{,}(8).$$

Каждая несократимая дробь $\frac{p}{q}$, знаменатель которой содержит хотя бы один простой множитель, отличный от 2 и 5, может быть представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Каждая бесконечная периодическая десятичная дробь может быть единственным образом представлена в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$.

Для того чтобы обратить бесконечную периодическую десятичную дробь в обыкновенную, надо из числа, стоящего до второго периода, вычесть число, стоящее до первого периода, и сделать эту разность числителем, а в знаменателе написать цифру 9 столько раз, сколько цифр в периоде, и после девяток дописать столько нулей, сколько цифр между запятой и первым периодом.

Например:

$$0{,}11(7) = \frac{117-11}{900} = \frac{106}{900} = \frac{53}{450}; \qquad 0{,}(37) = \frac{37-0}{99} = \frac{37}{99};$$

$$-2{,}15(16) = -\frac{21\,516-215}{9\,900} = -\frac{21\,301}{9\,900};$$

$$0{,}18(0) = \frac{180-18}{900} = \frac{162}{900} = \frac{18\cdot 9}{18\cdot 50} = \frac{9}{50}.$$

Пользуясь правилом обращения бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную, можно показать, что любую конечную десятичную дробь можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, причем двумя способами; например:

$$0{,}15(0) = \frac{150-15}{900} = \frac{135}{900} = \frac{15}{100} = 0{,}15;$$

$$0{,}14(9) = \frac{149-14}{900} = \frac{135}{900} = 0{,}15.$$

Чтобы не было двух разных представлений одной и той же конечной десятичной дроби в виде бесконечной периодической десятичной дроби, принято исключить из рассмотрения период 9. Тогда каждая конечная десятичная дробь может быть единственным образом записана в виде бесконечной периодической десятичной дроби с периодом 0 и, наоборот, каждая такая дробь есть конечная десятичная дробь.

Итак, каждая обыкновенная дробь $\frac{p}{q}$ может быть единственным образом представлена в виде бесконечной периодической десятичной дроби и, наоборот, каждая бесконечная периодическая десятичная дробь может быть единственным образом представлена в виде обыкновенной (несократимой) дроби $\frac{p}{q}$. Следовательно, можно сказать, что каждая бесконечная периодическая десятичная дробь есть другая форма записи некоторой обыкновенной дроби.

Например:

$$\frac{1}{3} = 0{,}(3); \qquad 0 = 0{,}(0); \qquad 2 = 2{,}(0);$$

$$-17 = -17{,}(0); \qquad \frac{17}{7} = 2{,}(428\,571); \qquad \frac{1}{5} = 0{,}2(0).$$

Всякая бесконечная периодическая десятичная дробь (обыкновенная дробь) называется *рациональным числом*.

Периодическими бесконечными десятичными дробями не исчерпывается множество всех бесконечных десятичных дробей.

Например, покажем, что дробь 0,12345..., где после запятой выписаны подряд все натуральные числа, не является бесконечной периодической десятичной дробью, т. е. не является рациональным числом.

Предположим, что данная дробь является периодической. Пусть период ее начинается с k-го места после запятой и состоит из n цифр, среди которых хотя бы одна отлична от нуля (число 0 не является периодом дроби). В записи данной дроби, начиная с некоторого места l

$(l > k)$, стоят цифры натурального числа 10^{2n+k}, т.е. цифра 1, а за ней $(2n+k)$ нулей. Ввиду того что длина периода равна n, то период данной дроби целиком попадет в отрезок из $(2n+k)$ нулей, т.е. состоит из одних нулей, что противоречит предположению.

Всякая бесконечная непериодическая десятичная дробь называется *иррациональным числом*.

Иррациональное число нельзя представить в виде дроби $\frac{p}{q}$, и обратно, каждое число, не представимое в виде $\frac{p}{q}$, является иррациональным.

Множество всех рациональных чисел принято обозначать символом $\mathbf{Q}$; множество всех рациональных и иррациональных чисел обозначается символом $\mathbf{R}$ и называется множеством *действительных чисел*.

Два действительных числа a и b равны $(a = b)$, если одинаковы их представления в виде бесконечных десятичных дробей. В противном случае числа a и b не равны $(a \neq b)$.

Пример 9. Доказать иррациональность каждого из следующих положительных чисел:

а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{m}$, где m — натуральное число; в) $\log_7 6$; г) $\operatorname{tg} 5°$.

Решение. а) Предположим, что число $\sqrt{3}$ является рациональным, т.е. $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда $p^2 = 3q^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 3, то и левая его часть должна делиться на 3. Следовательно, число p^2 делится на 3. Докажем, что тогда и число p делится на 3. В самом деле, если p не делится на 3, то либо $p = 3k+1$, либо $p = 3k+2$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Пусть $p = 3k+1$, тогда

$$p^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1,$$

и так как p^2 делится на 3, то и разность $p^2 - (9k^2 + 6k)$ должна делиться на 3; в то же время эта разность равна 1. Получили противоречие.

Аналогичными рассуждениями получим противоречие при $p = 3k+2$.

Поскольку p делится на 3, то существует целое число m такое, что $p = 3m$. Подставляя это значение в равенство $p^2 = 3q^2$, получаем $q^2 = 3m^2$. Поскольку правая часть этого равенства делится на 3, то аналогично предыдущему рассуждению получаем $q = 3l$.

Итак, числа p и q имеют общий множитель — число 3, однако по предположению числа p и q взаимно простые. Это противоречие означает, что сделанное предположение неверно. Следовательно, число $\sqrt{3}$ не является рациональным.

б) Предположим, что данное число является рациональным, т.е. $\frac{\sqrt{3}}{m} = \frac{p}{q}$; тогда $\sqrt{3} = \frac{pm}{q}$ также является рациональным, что противоречит доказанному в п. а). Следовательно, число $\frac{\sqrt{3}}{m}$ является иррациональным.

в) Предположим, что число $\log_7 6$ является рациональным, т. е. $\log_7 6 = \dfrac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. По определению логарифма

$$7^{p/q} = 6, \quad \text{или} \quad 7^p = 6^q.$$

Равенство $7^p = 6^q$ невозможно, так как 6^q — натуральное четное число, а 7^p — натуральное нечетное число. Следовательно, число $\log_7 6$ иррациональное.

г) Предположим, что число $\operatorname{tg} 5^\circ$ является рациональным, т. е. $\operatorname{tg} 5^\circ = \dfrac{p}{q}$. Тогда рациональными будут числа $\operatorname{tg} 10^\circ$, $\operatorname{tg} 20^\circ$, $\operatorname{tg} 30^\circ$, поскольку

$$\operatorname{tg} 10^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 5^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 5^\circ} = \frac{2 \cdot p/q}{1 - p^2/q^2} = \frac{l}{m}, \qquad l \in \mathbf{Z}, \qquad m \in \mathbf{N};$$

$$\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2 \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \frac{2 \cdot l/m}{1 - l^2/m^2} = \frac{r}{s}, \qquad r \in \mathbf{Z}, \qquad s \in \mathbf{N};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(10^\circ + 20^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ}{1 - \operatorname{tg} 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 20^\circ} =$$

$$= \frac{l/m + r/s}{1 - lr/(ms)} = \frac{d}{t}, \qquad d \in \mathbf{Z}, \qquad t \in \mathbf{N}.$$

Однако $\operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, а число $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ — иррациональное. Полученное противоречие означает, что число $\operatorname{tg} 5^\circ$ — иррациональное.

Прямая, на которой выбраны начало отсчета (точка O), положительное направление и введен масштаб, называется *числовой прямой* (*числовой осью*).

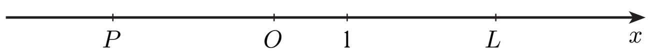

Рис. 1.1

Точка O определяет два луча (рис. 1.1): луч OL, направленный вправо, называется *положительной полуосью*; луч OP, направленный влево, называется *отрицательной полуосью*.

Каждой точке числовой прямой ставится в соответствие единственное действительное число по следующему правилу:

1) точке O ставится в соответствие число 0;

2) каждой точке A на положительной полуоси ставится в соответствие положительное число a, где a — длина отрезка OA;

3) каждой точке B на отрицательной полуоси ставится в соответствие число $-|b|$, где $|b|$ — длина отрезка OB.

При этом разным точкам числовой прямой соответствуют разные действительные числа, и нет ни одного действительного числа, которое не соответствовало бы какой-либо точке числовой прямой. Таким образом, между множеством действительных чисел и множеством точек числовой прямой существует *взаимно однозначное соответствие*.

Сравнение действительных чисел.

1. Два действительных числа a и b равны, если их разность $a-b$ равна нулю.

2. Число a больше числа b, если разность $a-b$ положительная.

3. Число a меньше числа b, если разность $a-b$ отрицательная.

Свойства равенств.

1. Если $a=b$ и $b=c$, то $a=c$.

2. Если $a=b$ и $c=d$, то $a+c=b+d$ и $a-c=b-d$.

3. Если $a=b$ и $c=d$ $(c\neq 0)$, то $ac=bd$ и $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$. В частности, если $a=b$, то $a^n=b^n$ $(n\in\mathbf{N})$, и, обратно, если $a^n=b^n$ $(n\in\mathbf{N})$ и $ab>0$, то $a=b$.

4. Если $a=b$, то $a+c=b+c$ и $a-c=b-c$.

5. Если $a=b$ и $c\neq 0$, то $ac=bc$ и $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{c}$.

Свойства неравенств.

1. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

2. Если $a>b$ и $c>d$, то $a+c>b+d$.

3. Если $a>b$ и $c<d$, то $a-c>b-d$.

4. Если $a>b>0$ и $c>d>0$, то $ac>bd$ и $\dfrac{a}{d}>\dfrac{b}{c}$. В частности, если $a>b>0$, то $a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N})$, и, обратно, если $a>0$, $b>0$ и $a^n>b^n$ $(n\in\mathbf{N})$, то $a>b$.

5. Если $a>b$, то $a+c>b+c$ и $a-c>b-c$.

6. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$ и $\dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$.

7. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$ и $\dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$.

Наряду с неравенствами $a>b$ и $a<b$ рассматриваются нестрогие неравенства $a\geqslant b$ и $a\leqslant b$. Числовое неравенство $a\geqslant b$ считается верным и при $a>b$, и при $a=b$, и неверным в случае $a<b$. Например, неравенство $2\geqslant 2$ верно, так как $2=2$; неравенство $3\geqslant 2$ верно, так как $3>2$.

Перечисленные выше свойства неравенств справедливы и для нестрогих неравенств $a\geqslant b$ и $a\leqslant b$.

Говорят, что справедливо *двойное неравенство* $a<b<c$, если одновременно справедливы неравенства $a<b$ и $b<c$.

Пример 10. Доказать равенства:

а) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}=-0{,}8$; б) $2^{200}=4^{100}$;

в) $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=1$;

г) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$; д) $0{,}(3)+3\,\dfrac{1}{3}+0{,}4(2)=4\,\dfrac{4}{45}$.

Решение. а) Приводя дроби $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ к общему знаменателю, получим

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}=\frac{30+10+5+3}{60}=\frac{48}{60}=\frac{8}{10}=0{,}8.$$

б) $4^{100}=(2^2)^{100}=2^{2\cdot100}=2^{200}$.

в) Поскольку

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}=\sqrt[6]{(1+\sqrt{2})^2}=\sqrt[6]{1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}},$$

то

$$\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=\sqrt[6]{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{3-2\sqrt{2}}=$$
$$=\sqrt[6]{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}=\sqrt[6]{3^2-(2\sqrt{2})^2}=\sqrt[6]{9-8}=1.$$

г) Умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{3}+\sqrt{2}$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1}=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$$

д) Поскольку $0{,}(3)=\frac{3-0}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ и $0{,}4(2)=\frac{42-4}{90}=\frac{38}{90}=\frac{19}{45}$, то

$$0{,}(3)+3\,\frac{1}{3}+0{,}4(2)=\frac{1}{3}+\frac{10}{3}+\frac{19}{45}=\frac{11}{3}+\frac{19}{45}=\frac{165+19}{45}=\frac{184}{45}=4\,\frac{4}{45}.$$

Пример 11. Выяснить, какое из двух чисел больше:

а) $\frac{1}{\sqrt{6}}-1$ или $-\frac{4}{5}$; б) $\frac{131}{273}$ или $\frac{179}{235}$; в) 2 или $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$;

г) 3^{21} или 2^{31}; д) $\frac{3-\sqrt{123}}{4}$ или $\frac{2-\sqrt{37}}{3}$; е) $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ или $6{,}9$;

ж) $2\log_{12}145$ или $\sqrt{15}$; з) $\sqrt{12}-\sqrt{11}$ или $\sqrt{11}-\sqrt{10}$.

Решение. а) Найдем разность $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}-1\right)-\left(-\frac{4}{5}\right)$.

Так как $\frac{1}{\sqrt{6}}-1+\frac{4}{5}=\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{1}{5}=\frac{5-\sqrt{6}}{5\sqrt{6}}>0$, то число $\frac{1}{\sqrt{6}}-1$ больше числа $-\frac{4}{5}$.

б) Рассмотрим частное данных чисел:

$$\frac{131}{273}:\frac{179}{235}=\frac{131\cdot235}{273\cdot179}=\frac{131}{179}\cdot\frac{235}{273}.$$

Так как каждая из дробей произведения меньше 1, то число $\frac{179}{235}$ больше числа $\frac{131}{273}$.

в) Так как $(3\sqrt{3})^2=27>25=5^2$, то $3\sqrt{3}>5$. Так как $(2\sqrt{2})^2=8<9=3^2$, то $2\sqrt{2}<3$. Вычитая из неравенства $3\sqrt{3}>5$ неравенство $2\sqrt{2}<3$, получаем $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}>5-3=2$. Следовательно, число $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ больше числа 2.

г) Представим исходные числа в виде

$$3^{21} = 3^{20} \cdot 3 = (3^2)^{10} \cdot 3 = 9^{10} \cdot 3,$$
$$2^{31} = 2^{30} \cdot 2 = (2^3)^{10} \cdot 2 = 8^{10} \cdot 2.$$

Поскольку $9^{10} > 8^{10}$, то $3 \cdot 9^{10} > 3 \cdot 8^{10} > 2 \cdot 8^{10}$.

Следовательно, $3^{21} = 3 \cdot 9^{10} > 2 \cdot 8^{10} = 2^{31}$, т. е. число 3^{21} больше числа 2^{31}.

д) Так как $11 < \sqrt{123} < 12$ и $6 < \sqrt{37} < 7$, то $-12 < -\sqrt{123} < -11$ и $-7 < -\sqrt{37} < -6$; поэтому $\frac{-9}{4} < \frac{3-\sqrt{123}}{4} < -2$ и $\frac{-5}{3} < \frac{2-\sqrt{37}}{3} < \frac{-4}{3}$. Так как $-2 < -\frac{5}{3}$, то число $\frac{2-\sqrt{37}}{3}$ больше числа $\frac{3-\sqrt{123}}{4}$.

е) Так как $\frac{3\sqrt{7}+5\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10}$ и $\sqrt{35} < 6$, $\sqrt{10} < 3{,}2$, то $\frac{3}{5}\sqrt{35} + \sqrt{10} < \frac{3 \cdot 6}{5} + 3{,}2 = 6{,}8 < 6{,}9$.

ж) Так как $\log_{12} 145 > \log_{12} 144 = 2$, то $2\log_{12} 145 > 4$.

Следовательно, $2\log_{12} 145 > 4 > \sqrt{15}$, т. е. число $2\log_{12} 145$ больше числа $\sqrt{15}$.

з) Так как $\sqrt{12} - \sqrt{11} = \frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}}$ и $\sqrt{11} - \sqrt{10} = \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$, и поскольку $\frac{1}{\sqrt{12}+\sqrt{11}} < \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{10}}$, то $\sqrt{12} - \sqrt{11} < \sqrt{11} - \sqrt{10}$.

Целой частью числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее числа a. Например, целая часть числа 2,5 равна 2; целая часть числа 3 равна 3; целая часть числа $(-3{,}7)$ равна (-4); целая часть числа (-2) есть число (-2).

Целая часть числа a обозначается символом $[a]$; например, $[5{,}7] = 5$; $[-5{,}1] = -6$; $[-\sqrt{2}\,] = -2$.

Дробной частью числа a называется число $a - [a]$. Например, дробная часть числа 2,1 равна $2{,}1 - 2 = 0{,}1$; дробная часть числа $(-3{,}7)$ равна $(-3{,}7) - (-4) = 0{,}3$; дробная часть числа $(-\sqrt{2}\,)$ равна $(-\sqrt{2}\,) - (-2) = 2 - \sqrt{2}$.

Дробная часть числа a обозначается символом $\{a\}$, т. е. $\{a\} = a - [a]$. Например, $\{1{,}1\} = 0{,}1$, $\{-2{,}3\} = 0{,}7$.

Пример 12. Найти целую часть числа $1/\varepsilon$, где $\varepsilon > 1/2$.

Решение. Если $\varepsilon > 1$, то $0 < 1/\varepsilon < 1$, и, следовательно, $[1/\varepsilon] = 0$. Если $1/2 < \varepsilon \leqslant 1$, то $1 \leqslant 1/\varepsilon < 2$, и, следовательно, $[1/\varepsilon] = 1$.

Равенство двух отношений $a/b = c/d$ $(bd \neq 0)$ называется *пропорцией*, а числа a, b, c, d — *членами пропорции*, при этом числа a и d называются *крайними* членами пропорции, а числа b и c — *средними* членами пропорции.

Основное свойство пропорции $a/b = c/d$, $bd \neq 0$, состоит в том, что произведение ее крайних членов равно произведению ее средних членов, т. е. $ad = bc$.

Из основного свойства пропорции вытекает, что если $abcd \neq 0$, то равенство $ad = bc$ можно записать в виде одной из следующих пропорций:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \qquad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \qquad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}.$$

Если дана пропорция $a/b = c/d$, $bd \neq 0$, то при любых m и n, таких, что $nb + ma \neq 0$ и $nd + mc \neq 0$, и любых α и β справедливо равенство

$$\frac{\alpha a + \beta b}{ma + nb} = \frac{\alpha c + \beta d}{mc + nd},$$

называемое *производной пропорцией*.

В частности, из пропорции $a/b = c/d$ получаем следующие производные пропорции:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 1,\ m = 0,\ n = 1);$$

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \qquad (\alpha = 1,\ \beta = -1,\ m = 0,\ n = 1);$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d} \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 0,\ m = 1,\ n = 1);$$

$$\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d} \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 0,\ m = 1,\ n = -1);$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d} \qquad (\alpha = 1,\ \beta = 1,\ m = 1,\ n = -1).$$

Отношения величин и пропорции широко используются при решении многих задач.

Пример 13. Один сплав состоит из двух металлов, входящих в него в отношении 1 : 2, а другой сплав содержит те же металлы в отношении 2 : 3. Сколько надо взять частей каждого из сплавов, чтобы получить новый сплав, содержащий те же металлы в отношении 17 : 27?

Решение. Обозначим через x количество первого сплава, а через y количество второго сплава, содержащихся в новом сплаве. Тогда в новом сплаве содержится $\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}$ первого металла и $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{5}$ второго металла; поэтому

$$\frac{x/3 + 2y/5}{2x/3 + 3y/5} = \frac{17}{27}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{5x + 6y}{10x + 9y} = \frac{17}{27}, \qquad \text{или} \qquad \frac{x}{y} = \frac{9}{35}.$$

Итак, в новом сплаве содержится 9 частей первого и 35 частей второго металла.

Пример 14. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 10, а противолежащий ей угол равен $\pi/6$. Найти радиус описанной окружности.

Решение. Обозначим радиус окружности через R. Согласно теореме синусов, отношение длины стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной около данного треугольника окружности. Поэтому имеем

$$2R = \frac{10}{\sin(\pi/6)} = 20, \quad \text{откуда} \quad R = 10.$$

Итак, радиус описанной окружности равен 10.

Пример 15. Найти площадь треугольника, вписанного в окружность радиуса 4, если величины углов треугольника относятся как $5:4:3$.

Решение. Так как сумма углов треугольника равна π и суммарное количество частей всех углов равно 12, то на одну часть приходится $\pi/12$ радиан, и, следовательно, углы треугольника равны соответственно $5\pi/12$, $\pi/3$ и $\pi/4$.

Если длины сторон, противолежащих углам $\pi/3$ и $\pi/4$, обозначить соответственно через a и c, то, согласно теореме синусов,

$$\frac{a}{\sin(\pi/3)} = 8, \qquad \frac{b}{\sin(\pi/4)} = 8.$$

Отсюда получаем $a = 4\sqrt{3}$ и $b = 4\sqrt{2}$.

Так как площадь треугольника равна полупроизведению длин двух его сторон на синус угла между ними, то получаем

$$S = \frac{1}{2}\, ab \sin\frac{5\pi}{12}.$$

Так как $0 < \frac{5\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$, то $\sin\frac{5\pi}{12} = \sqrt{\frac{1-\cos(5\pi/6)}{2}}$, т. е. $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Следовательно,

$$S = 4\sqrt{6}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}} = 4\sqrt{12+6\sqrt{3}} = 4\sqrt{9+2\cdot 3\sqrt{3}+3} = 4(3+\sqrt{3}).$$

Пример 16. Решить уравнение

$$\frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{5+x^2+5x}{x+5}.$$

Решение. Проверкой убеждаемся, что $x = 0$ не является решением данного уравнения. Пусть $x = x_0$ — некоторое решение данного уравнения, тогда равенство

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 + 4}{x_0 - 2} = \frac{5 + x_0^2 + 5x_0}{x_0 + 5}$$

является пропорцией, и при $x_0 \neq 0$ напишем производную пропорцию:

$$\frac{x_0^2 - 2x_0 + 4 - (x_0 - 2)\,x_0}{x_0 - 2} = \frac{5 + x_0^2 + 5x_0 - (x_0 + 5)\,x_0}{x_0 + 5},$$

или

$$\frac{4}{x_0 - 2} = \frac{5}{x_0 + 5};$$

отсюда $x_0 = 30$.

Таким образом, решением данного уравнения может быть только число $x = 30$. Проверкой убеждаемся, что $x = 30$ действительно является решением данного уравнения.

Пример 17. Найти длину дуги AB и площадь сектора OAB, если в окружности радиуса R с центром в точке O вписанный угол, опирающийся на дугу AB, равен $\pi/6$ (рис. 1.2).

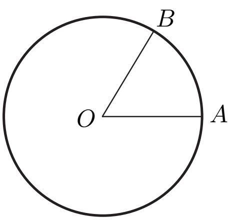

Рис. 1.2

Решение. Центральный угол AOB в два раза больше вписанного угла, опирающегося на дугу AB, и поэтому $\widehat{OAB} = \pi/3$. Так как длине окружности соответствует угол 2π, а длине дуги AB — угол $\pi/3$, то имеем пропорцию

$$\frac{2\pi R}{\smile{AB}} = \frac{2\pi}{\pi/3},$$

откуда $\smile{AB} = \pi R/3$.

Так как площади круга πR^2 соответствует угол 2π, а площади сектора S_{OAB} — угол $\pi/3$, то имеем пропорцию

$$\frac{\pi R^2}{S_{OAB}} = \frac{2\pi}{\pi/3},$$

откуда $S_{OAB} = \pi R^2/6$.

Итак, искомая длина дуги равна $\pi R/3$, а искомая площадь сектора равна $\pi R^2/6$.

Пример 18. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точки K, M и N делят ребра AB, AC и DA соответственно на отрезки так, что

$$\frac{|AK|}{|KB|} = \frac{3}{4}, \quad \frac{|AM|}{|MC|} = \frac{5}{6}, \quad \frac{|AN|}{|ND|} = \frac{5}{9}.$$

Найти отношение объемов тел, на которые плоскость KMN (рис. 1.3) рассекает пирамиду.

Решение. Проведем из точки D и точки N к плоскости ABC перпендикуляры и обозначим через O_1 и O_2 соответственно точки их пересечения с плоскостью ABC.

Треугольники ANO_2 и ADO_1 прямоугольные, и угол DAO_1 у них общий; поэтому эти треугольники подобны (по признаку подобия треугольников, имеющих два равных угла). Следовательно, их сходственные стороны пропорциональны; в частности,

$$\frac{|AN|}{|AD|} = \frac{|NO_2|}{|DO_1|}, \quad \text{или} \quad \frac{5}{14} = \frac{|NO_2|}{|DO_1|}.$$

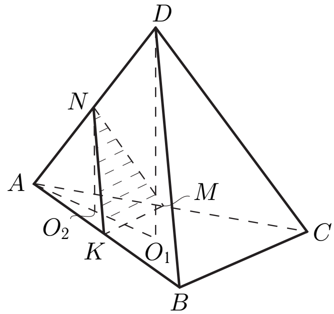

Рис. 1.3

Так как объемы пирамид $DABC$ и $NAKM$ равны соответственно

$$V_{DABC} = \frac{1}{3}\,|SO_1| \cdot S_{ABC}, \qquad V_{NAKM} = \frac{1}{3}\,|NO_2| \cdot S_{AKM},$$

а площади их оснований равны

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\,|AB||AC| \sin\widehat{BAC}, \qquad S_{AKM} = \frac{1}{2}\,|AK||AM| \sin\widehat{BAC},$$

то получаем

$$\frac{V_{DABC}}{V_{NAKM}} = \frac{\frac{1}{3}\,|DO_1| \cdot \frac{1}{2}\,|AB||AC| \sin\widehat{BAC}}{\frac{1}{3}\,|NO_2| \cdot \frac{1}{2}\,|AK||AM| \sin\widehat{BAC}} = \\ = \frac{|DO_1||AB||AC|}{|NO_2||AK||AM|} = \frac{14}{5}\,\frac{|AB||AC|}{|AK||AM|}.$$

Так как $\dfrac{|AK|}{|KB|} = \dfrac{3}{4}$, то $\dfrac{|AK|}{|AB|} = \dfrac{|AK|}{|AK|+|KB|} = \dfrac{3}{4+3} = \dfrac{3}{7}$, или $\dfrac{|AB|}{|AK|} = \dfrac{7}{3}$.

Так как $\dfrac{|AM|}{|MC|} = \dfrac{5}{6}$, то $\dfrac{|AM|}{|AC|} = \dfrac{|AM|}{|MC|+|AM|} = \dfrac{5}{6+5} = \dfrac{5}{11}$, или $\dfrac{|AC|}{|AM|} = \dfrac{11}{5}$.

Итак, имеем:

$$\frac{V_{DABC}}{V_{NAKM}} = \frac{14}{5} \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{11}{5} = \frac{1078}{75} \quad \text{и} \quad \frac{V_{DBCMKN}}{V_{NAKM}} = \frac{1003}{75}.$$

Процентом данного числа называется его сотая часть. Следовательно, само число составляет 100 процентов. Один процент обозначается символом 1 %.

Например, 45 % от числа 100 есть 45; 30 % от числа 120 есть число $\dfrac{120}{100} \cdot 30 = 36$.