

Гурбатов С.Н.  
Руденко О.В.  
Саичев А.И.

**Волны и  
структуры в  
нелинейных средах  
без дисперсии**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 534.22  
ББК 22.32  
Г 95



Издание осуществлено при поддержке  
Российского фонда фундаментальных  
исследований по проекту 08-02-07041

Гурбатов С.Н., Руденко О.В., Саичев А.И. **Волны и структуры в нелинейных средах без дисперсии. Приложения к нелинейной акустике.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 496 с. — ISBN 978-5-9221-1042-6.

Излагаются основные идеи и методы анализа нелинейных моделей гидродинамического типа. Теория иллюстрируется примерами интенсивных акустических волн, роста поверхностей, распространения лазерных пучков, движения фронта пожара. Детально исследуются явления искажения волн, формирования ударных фронтов и возникновения «многопотоковости». Особое внимание уделено обобщенным решениям нелинейных уравнений в средах без дисперсии, их связи с законами сохранения и физической реализуемости. Подробно обсуждаются правило Максвелла построения разрывных решений, принцип абсолютного минимума Олейник–Лэкса и глобальный принцип Е–Рыкова–Синяя. Значительное место занимают вопросы учета диссипации, описание свойств решений Кардара–Паризи–Цванга (КПЗ) и Бюргерса, в частности, особенностей поведения  $N$ -волн,  $U$ -волн и пилообразных волн, многомасштабных сигналов и шумовых полей. Анализируются модельные уравнения типа Бюргерса, учитывающие конкурентное действие нелинейности и поглощения. На примере двумерного уравнения КПЗ и трехмерного уравнения Бюргерса обсуждаются слабые и регуляризованные решения, описывающие поведение многомерных нелинейных недиспергирующих волн. Во второй части книги изложены задачи нелинейной акустики: эволюция волновых пучков, волны и пучки в кубично-нелинейной среде, нелинейные волны в системах со сложной частотно-зависимой диссипацией и внешними источниками, нелинейные волны в ограниченных системах и резонаторах.

Монография предназначена студентам естественных факультетов университетов, академий и институтов, а также магистрам и аспирантам, изучающим теорию нелинейных волн разной физической природы. Монография может также служить полезным справочным пособием для инженеров и научных работников, сталкивающихся в своей практической деятельности с необходимостью учета нелинейных волновых эффектов.

ISBN 978-5-9221-1042-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© С. Н. Гурбатов, О. В. Руденко,  
А. И. Саичев, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	9
Список литературы . . . . .	15

### Часть I. Основы теории волн в средах без дисперсии

Глава 1. <b>Нелинейные уравнения первого порядка</b> . . . . .	18
§ 1. Уравнение простой волны . . . . .	18
1.1. Каноническая форма уравнения (18). 1.2. Поток частиц (19). 1.3. Обсуждение решения Римана (20). 1.4. Сжатия и растяжения потока частиц (21). 1.5. Уравнение непрерывности (22). 1.6. По- строение поля плотности (24). 1.7. Закон сохранения импуль- са (24). 1.8. Фурье-образы плотности и скорости (26).	
§ 2. Уравнение роста линии . . . . .	28
2.1. Распространение лесного пожара (28). 2.2. Анизотропный рост поверхности (31). 2.3. Решение уравнения роста поверхно- сти (33).	
§ 3. Законы одномерной гравитации . . . . .	35
3.1. Лагранжево описание одномерной гравитации (35). 3.2. Эй- лерово описание одномерной гравитации (37). 3.3. Коллапс одно- мерной Вселенной (38).	
§ 4. Упражнения к главе 1 . . . . .	40
Глава 2. <b>Обобщенные решения нелинейных уравнений</b> . . . . .	52
§ 1. Эталонные уравнения . . . . .	52
1.1. Уравнения потока частиц (52). 1.2. Рост линии в мало- угловом приближении (53). 1.3. Уравнение нелинейной акусти- ки (53).	
§ 2. Многопоточковые решения . . . . .	54
2.1. Интервал однопоточкового движения (54). 2.2. Возникновение многопоточковости (55). 2.3. Градиентная катастрофа (56).	
§ 3. Сумма потоков . . . . .	58
3.1. Суммарная плотность частиц (59). 3.2. Суммирование пото- ков обратным преобразованием Фурье (59). 3.3. Алгебраическая	

сумма поля скорости (60). 3.4. Плотность «теплого» потока частиц (61).	
§ 4. Слабые решения нелинейных уравнений первого порядка . . . . .	62
4.1. Лесной пожар (63). 4.2. Принцип абсолютного минимума Олейник–Лэкса (65). 4.3. Геометрическое построение слабых решений (66). 4.4. Выпуклая оболочка (67). 4.5. Правило Максвелла (69).	
§ 5. Глобальный принцип Е–Рыкова–Синяя. . . . .	72
5.1. Поток неупруго слипающихся частиц (72). 5.2. Неупругие столкновения частиц (73). 5.3. Формулировка глобального принципа (75). 5.4. Механический смысл глобального принципа (75). 5.5. Условие физической реализуемости (76). 5.6. Геометрия глобального принципа (79). 5.7. Решения уравнения непрерывности (82).	
§ 6. Геометрия роста линий . . . . .	83
6.1. Параметрическое уравнение линии (83). 6.2. Контур в полярных координатах (85). 6.3. Оболочки контуров (88).	
§ 7. Упражнения к главе 2 . . . . .	90
<b>Глава 3. Нелинейные уравнения второго порядка . . . . .</b>	<b>95</b>
§ 1. Регуляризация нелинейных уравнений . . . . .	95
1.1. Уравнение Кардара–Паризи–Цванга (95). 1.2. Уравнение Бюргерса (97).	
§ 2. Свойства уравнения Бюргерса. . . . .	98
2.1. Галилеевская инвариантность (98). 2.2. Число Рейнольдса (99). 2.3. Расширение Хаббла (101). 2.4. Стационарная волна (103). 2.5. Решение Хохлова (105). 2.6. Решение Руденко (106).	
§ 3. Общее решение уравнения Бюргерса . . . . .	112
3.1. Подстановка Хопфа–Коула (112). 3.2. Общее решение уравнения Бюргерса (113). 3.3. Усредненная лагранжева координата (114). 3.4. Решение уравнения Бюргерса при исчезающей вязкости (115).	
§ 4. Модельные уравнения газовой динамики . . . . .	116
4.1. Модель одномерного политропного газа (116). 4.2. Обсуждение физических свойств модельного газа (119).	
§ 5. Упражнения к главе 3 . . . . .	123
<b>Глава 4. Эволюция поля в рамках уравнения Бюргерса . . . . .</b>	<b>127</b>
§ 1. Эволюция одномасштабных сигналов . . . . .	127
1.1. Еще раз об автомодельном решении (127). 1.2. Выход на линейную стадию (129). 1.3. $N$ -волна и $U$ -волна (130). 1.4. Пилообразные волны (133). 1.5. Периодические волны (138).	
§ 2. Эволюция сложных сигналов . . . . .	142

2.1. Квазипериодические сложные сигналы (142).	2.2. Эволюция фрактальных сигналов (143).	2.3. Эволюция многомасштабных сигналов — динамическая модель турбулентности (145).	
§ 3. Упражнения к главе 4 . . . . .			157
<b>Глава 5. Эволюция шумовых полей в рамках уравнения Бюргера</b>			
			163
§ 1. Турбулентность Бюргера — акустическая турбулентность . . . . .			163
§ 2. Начальная стадия эволюции турбулентности Бюргера . . . . .			165
2.1. Одноточечная плотность вероятности эйлерова случайного поля скорости (167).	2.2. Свойства плотности вероятности случайного поля скорости (170).	2.3. Спектры поля скорости (173).	
§ 3. Эволюция турбулентности на стадии развитых разрывов . . . . .			178
3.1. Феноменология турбулентности Бюргера (178).	3.2. Эволюция турбулентности Бюргера: статистически однородные потенциал и скорость ( $n > 1$ и $n < -3$ ) (182).	3.3. Точная автомодельность ( $n > 2$ ) (185).	3.4. Нарушение автомодельности ( $1 < n < 2$ ) (188).
3.5. Эволюция турбулентности: статистически неоднородный потенциал ( $-3 < n < 1$ ) (190).	3.6. Статистически однородная скорость и неоднородный потенциал ( $-1 < n < 1$ ) (191).	3.7. Статистически неоднородная скорость и неоднородный потенциал ( $-3 < n < -1$ ) (192).	3.8. Об эволюции интенсивных акустических шумов (195).
<b>Глава 6. Многомерные нелинейные уравнения . . . . .</b>			
			199
§ 1. Нелинейные уравнения первого порядка . . . . .			199
1.1. Основные уравнения трехмерных потоков (199).	1.2. Лагранжево и эйлерово описание трехмерного потока (201).	1.3. Якобиан перехода лагранжевых в эйлеровы координаты (201).	1.4. Плотность многомерного потока (203).
1.5. Слабое решение уравнения растущей поверхности (204).	1.6. Потоки локально взаимодействующих частиц и сингулярное поле плотности (206).		
§ 2. Многомерные нелинейные уравнения второго порядка . . . . .			211
2.1. Двумерное уравнение КПЗ (211).	2.2. Трехмерное уравнение Бюргера (212).	2.3. Модельное поле плотности (213).	2.4. Поле концентрации (214).
§ 3. Эволюция основных типов возмущений в уравнении KPZ и многомерном уравнении Бюргера . . . . .			217
3.1. Асимптотические решения многомерного уравнения Бюргера и локальная автомодельность (218).	3.2. Эволюция простых локализованных возмущений (222).	3.3. Эволюция периодических структур при бесконечных числах Рейнольдса (225).	3.4. Эволюция анизотропной турбулентности Бюргера (229).
3.5. Эволюция возмущений со сложной внутренней структурой (236).	3.6. Асимптотическое поведение локализованного возмущения на больших временах (242).	3.7. Приложение к §3. Статистиче-	

ские свойства максимумов неоднородных случайных гауссовых полей (244).	
§ 4. Модельное описание эволюции крупномасштабной структуры Вселенной. . . . .	248
4.1. Гравитационная неустойчивость в расширяющейся Вселенной (248). 4.2. От уравнения Власова–Пуассона к приближению Зельдовича и модели слипания (adhesion model) (250).	
Список литературы . . . . .	255

## **Часть II. Математические модели и физические явления в нелинейной акустике**

<b>Глава 7. Модельные уравнения и способы отыскания их точных решений . . . . .</b>	<b>262</b>
§ 1. Введение. . . . .	262
1.1. Сведения из линейной теории (262). 1.2. Как дополнить упрощенные уравнения нелинейными членами (268). 1.3. Более общие эволюционные уравнения (270). 1.4. Два типа эволюционных уравнений (271).	
§ 2. Группы Ли и некоторые точные решения . . . . .	272
2.1. Точные решения уравнения Бюргерса (273). 2.2. Нахождение точных решений уравнения Бюргерса методами теории групп (274). 2.3. Некоторые способы нахождения точных решений (276).	
§ 3. Метод априорного использования симметрий. . . . .	281
<b>Глава 8. Типы акустических нелинейностей и методы нелинейной акустической диагностики . . . . .</b>	<b>284</b>
§ 1. Введение. . . . .	284
1.1. Физическая и геометрическая нелинейности (284).	
§ 2. Классификация типов акустической нелинейности . . . . .	287
2.1. Граничные нелинейности (288).	
§ 3. Некоторые механизмы объемной структурной нелинейности . . . . .	294
3.1. Нелинейность сред с сильно сжимаемыми включениями (294). 3.2. Нелинейность твердых структурно-неоднородных сред (298).	
§ 4. О нелинейной диагностике. . . . .	304
4.1. Обратные задачи нелинейной диагностики (306). 4.2. Особенности методов нелинейной диагностики (308).	
§ 5. О приложениях методов нелинейной диагностики . . . . .	311
5.1. Обнаружение пузырьков в жидкости и трещин в твердом теле (311). 5.2. Измерения, основанные на использовании радиационного давления (314). 5.3. Нелинейная акустическая диагностика в строительстве (314).	

---

§ 6. Нетипичные нелинейные явления в структурно-неоднородных средах . . . . .	316
<b>Глава 9. Нелинейные пилообразные волны . . . . .</b>	<b>320</b>
§ 1. О пилообразных волнах . . . . .	320
§ 2. Полевой и спектральный подходы в теории нелинейных волн . . . . .	323
2.1. Общие замечания (323).   2.2. Генерация гармоник (325).	
2.3. Вырожденное параметрическое взаимодействие (325).	
§ 3. Дифрагирующие пучки пилообразных волн . . . . .	330
§ 4. Волны в неоднородных средах и нелинейная геометрическая акустика . . . . .	336
§ 5. Фокусировка разрывных волн . . . . .	341
§ 6. Нелинейное поглощение и насыщение . . . . .	349
§ 7. Кинетика пилообразных волн . . . . .	354
§ 8. О взаимодействиях волн, содержащих ударные фронты . . . . .	358
<b>Глава 10. Самовоздействия ограниченных в пространстве волн, содержащих ударные фронты . . . . .</b>	<b>365</b>
§ 1. Введение . . . . .	365
§ 2. Самовоздействие пучков пилообразных ультразвуковых волн за счет нагревания среды и формирования акустического ветра . . . . .	368
§ 3. Саморефракция слабых ударных волн в квадратично-нелинейной среде . . . . .	376
§ 4. Безынерционное самовоздействие в кубично-нелинейной среде . . . . .	382
§ 5. Симметрии и законы сохранения для эволюционного уравнения, описывающего распространение пучков в нелинейной среде . . . . .	389
§ 6. Заключение . . . . .	395
<b>Глава 11. Нелинейные стоячие волны, резонансные явления и частотные характеристики распределенных систем . . . . .</b>	<b>397</b>
§ 1. Введение . . . . .	397
§ 2. Метод расчета характеристик нелинейных резонаторов . . . . .	398
§ 3. Стоячие волны и добротность резонатора, заполненного диссипативной средой . . . . .	403
§ 4. Частотные отклики квадратично-нелинейного резонатора . . . . .	409
§ 5. Увеличение добротности при внесении в резонатор потерь . . . . .	418
§ 6. Геометрическая нелинейность, обусловленная подвижностью границы . . . . .	422
§ 7. Резонатор, заполненный кубично-нелинейной средой . . . . .	435
Список литературы . . . . .	450

Приложение. <b>Основные свойства обобщенных функций</b> . . . . .	465
§ 1. Определение обобщенных функций . . . . .	465
§ 2. Фундаментальные последовательности . . . . .	468
§ 3. Производные обобщенных функций . . . . .	473
§ 4. Формула Лейбница . . . . .	475
§ 5. Производные разрывных функций . . . . .	478
§ 6. Обобщенные функции сложного аргумента . . . . .	480
§ 7. Многомерные обобщенные функции . . . . .	483
§ 8. Уравнение непрерывности . . . . .	488
8.1. Сингулярное решение (488). 8.2. Функция Грина (489).	
8.3. Лагранжевы и эйлеровы координаты (491).	
§ 9. Метод характеристик . . . . .	491



## Введение

Эволюция достаточно интенсивных волн определяется нелинейными процессами, на протекание которых существенно влияет дисперсия, то есть зависимость фазовой скорости волны от частоты. Среды без дисперсии, в которых фазовая скорость от частоты не зависит, наиболее просты в отношении их физических свойств и широко распространены в природе. Однако нелинейные взаимодействия составляющих Фурье-спектра в таких средах отличаются особой сложностью и разнообразием. Практически все «виртуальные» процессы обмена энергией между волнами разных частот здесь становятся резонансными и протекают с высокой эффективностью. Происходит лавинообразное нарастание числа спектральных компонент поля, что в пространственно-временном представлении отвечает формированию структур с сильно выраженными нелинейными свойствами. Примерами таких структур служат разрывы функции, описывающей волновое поле или разрывы ее производной, крутые ударные фронты разных типов и ячеистые многомерные структуры.

Нелинейные структуры могут быть стабильными только в сильных полях, в условиях конкуренции с эффектами поглощения, дисперсии, дифракции и т.п., стремящимися разрушить структуру. Эти объекты обладают свойствами квазичастиц. Ударные фронты, например, сталкиваются между собой по законам неупругого соударения. Таким образом, в средах без дисперсии нелинейность обеспечивает как возможность взаимодействия устойчивых структур между собой, так и само их существование. Другой хорошо известный в нелинейной физике объект — солитон — стабилен, вообще говоря, в идеализированных консервативных системах. В то же время квазистабильность структур типа ударных фронтов или пилообразных волн имеет место в реальных диссипативных системах.

Структуры различной физической природы описываются похожими математическими моделями. Эти модели используются не только в теории волн, но и для описания разнообразных неволновых объектов (фронта лесного пожара, плотности потока невзаимодействующих частиц и др.). В силу универсальности таких нелинейных моделей требуется их анализ с общих позиций математической физики, безотносительно к природе описываемого явления.

С другой стороны, недиспергирующие волны и структуры находят широкое применение в науке и технике. Обзор этих приложений, с точки зрения авторов, «оживляет» изложение теории и может представлять интерес для многих читателей.

Теория нелинейных волн и структур — это очень широкая, находящаяся в непрерывном развитии область физики (прежде всего, радиофизики и математической физики). Она имеет множество конкретных приложений. Среди них укажем как на хорошо известные задачи акустики, электродинамики и физики плазмы (см., например, [3, 7, 9, 12, 13]), так и на менее известные задачи, например, описание роста поверхностей [15, 17], динамики турбулентности [14, 18], развития гравитационной неустойчивости крупномасштабного распределения вещества во Вселенной [4, 5, 8, 16, 20, 21]. Широкий спектр возникающих здесь явлений привел к появлению разнообразных математических методов, эффективных при изучении различных классов нелинейных полей и волн (см., например, [1, 10, 11]). Ясно, что в одной монографии невозможно дать сколько-нибудь полный обзор проблемы. По этой причине авторы ограничились обсуждением лишь нелинейных волн «гидродинамического» типа в средах без дисперсии. Прежде всего, детально изучаются свойства решений таких эталонных нелинейных уравнений для волн в средах без дисперсии, как уравнения простой волны, Бюргерса, Кардара–Паризи–Цванга. Помимо важности этих уравнений для теории и приложений, анализ их решений позволяет детально проследить стадии развития типичных нелинейных процессов, и, в первую очередь, нелинейное искажение профиля, градиентную катастрофу и возникновение ударных волн. Чтобы теория нелинейных волн в средах без дисперсии не выглядела слишком абстрактной, изложение опирается на наглядные геометрические трактовки как самих уравнений, так и их решений, разностороннее обсуждение физического смысла найденных решений и используемых методов.

Монография состоит из двух частей. Первая часть посвящена детальному описанию понятий и методов анализа нелинейных волн и структур в средах без дисперсии. Во второй части главное внимание уделяется конкретизации нелинейной теории применительно к одному типу волн — акустическим волнам большой интенсивности. Этот объект, с одной стороны, наиболее прост, а с другой — имеет важные практические приложения.

Перейдем к содержанию книги.

**В первой главе** последовательно излагается теория нелинейных волн, описываемых уравнениями в частных производных первого порядка. Подчеркивается универсальный характер основных «эталонных» нелинейных уравнений, и, прежде всего, уравнения простых волн (или уравнения римановых волн). Это уравнение возникает в разнообразных задачах оптики, акустики, теории волн в транспортном потоке и др. На основе этого уравнения и родственных ему подробно обсуждаются основные нелинейные эффекты, такие как искажение формы профиля волн, сжатие и растяжение распределения невзаимодействующих частиц в потоках. Изложение иллюстрируется примерами, связанными с нелинейной акустикой, гидродинамикой и теорией нелинейного роста поверхностей.

**Во второй главе** рассматриваются основные принципы построения обобщенных решений нелинейных уравнений, таких как «многопоточковые» и разрывные решения. Особое внимание уделяется анализу физического смысла обобщенных решений. Детально обсуждаются принцип абсолютного минимума Олейник–Лэкса и глобальный принцип Е–Рыкова–Синая, а также условия физической реализуемости обобщенных решений. Подробно излагаются геометрические методы построения обобщенных решений, такие как принцип Максвелла, метод касающихся парабол и выпуклых оболочек.

**В третьей главе** исследуются свойства решений регуляризованных уравнений нелинейной акустики, сводящихся к эталонному уравнению Бюргерса, находящему применение в самых разных областях физики и механики. Вводится понятие числа Рейнольдса, как количественной меры степени проявления нелинейности исследуемых полей. Подробно обсуждаются стационарное и автомодельное решения уравнения Бюргерса. Здесь же приводится знаменитая подстановка Хопфа–Коула, позволяющая свести нелинейное уравнение Бюргерса к линейному уравнению диффузии и получить явное интегральное представление решения.

**В четвертой главе** обсуждаются такие ключевые понятия теории нелинейных волн без дисперсии, как выход на линейную стадию, понятия  $U$ -волн и  $N$ -волн. Отдельно исследуются важные для приложения пилообразные волны. Обсуждается приближение неупруго сталкивающихся частиц. Анализируется эволюция сложных и фрактальных сигналов, важных для понимания структуры и поведения шумовых акустических волн и крупномасштабной структуры распределения вещества во Вселенной.

Динамическим и статистическим свойствам случайных полей, удовлетворяющих уравнению Бюргерса (так называемой «турбулентности Бюргерса») посвящена **пятая глава** монографии. Здесь дается краткий обзор свойств турбулентности Бюргерса как на начальной стадии, так и на стадии развитых разрывов. Подробно обсуждаются автомодельные свойства турбулентности, а также связь ее спектрально-корреляционных характеристик с возможными характерными особенностями начального потенциала турбулентности Бюргерса.

**В шестой главе** рассматриваются особенности поведения потенциальных решений трехмерного уравнения Бюргерса. Вначале, с помощью связей между лагранжевым и эйлеровым описанием гидродинамических полей, исследуются обобщенные решения для скорости и плотности гидродинамических потоков невзаимодействующих частиц. Затем подробно исследуются решения неоднородных уравнений Бюргерса, и детально обсуждается физический смысл подобных решений. Здесь же дается краткий обзор применения трехмерной турбулентности Бюргерса к модельному описанию эволюции крупномасштабной структуры Вселенной.

**В седьмой главе** приведены наиболее важные и простые математические модели нелинейной акустики. В частности, обсуждаются часто используемые обобщенные уравнения типа Бюргерса и Хохлова–Заболотской. Дан иллюстративный вывод этих уравнений. Проведено сравнение с уравнениями, записанными в обозначениях, которые были удобны для общего анализа в Части 1. Перечислены точные частные решения уравнения Бюргерса, представляющие особенный интерес для нелинейной акустики. Рассказано об истории «угадывания» этих решений и о регулярном способе их нахождения, основанном на теории групп Ли. Затем обсуждаются другие точные решения нелинейных акустических задач и способы нахождения этих решений.

**Восьмая глава** посвящена физике акустических нелинейностей. Предложена классификация, основанная на выделении трех типов: физической, геометрической и структурной нелинейностей, каждая из которых может быть сосредоточена на границе или распределена по объему среды. Приведены примеры систем, обладающих тем или иным типом нелинейности. Подробно обсуждается структурная нелинейность, которая может на 2–3 порядка превосходить обычную физическую или граничную нелинейность. Рассказано о новом направлении — нелинейной акустической диагностике, методы которой начинают широко использоваться в строительстве, геофизике и медицине.

**Девятая глава** посвящена нелинейным волновым явлениям в акустике. Основное внимание здесь уделено существенно ангармоническим волнам, содержащим крутые ударные фронты. На примере простейших волновых эффектов — генерации высших гармоник и вырожденного параметрического взаимодействия — детально анализируются различия в протекании этих процессов в средах с сильной и со слабой дисперсией. Сравняются полевой и спектральный подходы в теории нелинейных волн. Рассказано об основных явлениях, протекающих в акустических пучках, описываемых как с учетом явлений дифракции, так и в приближении нелинейной геометрической акустики. Анализируются процессы фокусировки нелинейных волн, их распространения в неоднородных средах, в средах с селективным поглощением, в волноводах и трубах.

**Десятая глава** посвящена эффектам самовоздействия ограниченных в пространстве волн, содержащих ударные фронты. Такие явления как тепловая самофокусировка и дефокусировка протекают в акустике существенно иначе, чем в средах с сильной дисперсией. Аналогичные явления могут наблюдаться в результате формирования течений («акустического ветра»). Специфичным для акустики является саморефракция широкополосных импульсов с ударными фронтами, приводящая к насыщению пикового давления в фокусе. Безынерционное самовоздействие в кубично-нелинейной среде может наблюдаться для сдвиговых волн, пилообразный профиль которых состоит из периодической последовательности «зубцов» трапециевидной формы.

**В одиннадцатой главе** дан обзор результатов по исследованию сильно искаженных нелинейных волн в акустических резонаторах. Изложен метод расчета, основанный на выделении резонансных и нерезонансных взаимодействий во встречных нелинейных волнах. Рассчитаны формы акустических колебаний и частотные отклики квадратично-нелинейных резонаторов, определена их нелинейная добротность. Обсуждены способы повышения добротности, позволяющие повысить плотность запасенной в резонаторе волновой энергии. В частности, указана возможность усилить поле, вводя специальным образом дополнительные потери. Рассчитаны колебания в резонаторе с линейной средой, но при учете нелинейности подвижности границ. Подробно изучены пилообразные по форме колебания в резонаторе, заполненном кубично-нелинейной средой. В этих задачах удалось также рассчитать частотный отклик и оценить добротность при различных уровнях возбуждения.

Авторы пытались изложить весь материал «на двух уровнях» сложности. Первый уровень, по замыслу, рассчитан на то, чтобы ввести начинающих исследователей (прежде всего, студентов, магистрантов и аспирантов) в круг понятий и методов теории нелинейных волн и структур в средах без дисперсии. С целью более глубокого понимания основ полезно решить задачи, которые даны в конце глав первой части. Второй, более высокий уровень, предназначен для научных сотрудников, которые уже имеют опыт работы в данной области и которые интересуются состоянием исследований или конкретными результатами. Конечно, в одной монографии нельзя отобразить все многообразие подходов, применяемых при изучении нелинейных полей и волн. Поэтому материал изложен по возможности просто, «на физическом уровне» строгости. Тем, кто интересуется более серьезной математической подоплекой обсуждаемых проблем, можно посоветовать обратиться к монографиям [1, 11], где обстоятельно обсуждены математические основы многих затронутых ниже вопросов. Серьезный обзор методов, используемых при решении нелинейных задач, вместе с глубокими результатами теории нелинейных полей, читатель найдет в книге [10]. В монографии [19], а также в учебном пособии [6], детально освещается теория обобщенных функций, необходимая при построении обобщенных решений нелинейных уравнений. Тем, кто намерен глубже вникнуть в теорию нелинейных полей, не слишком погружаясь при этом в математические тонкости, рекомендуем обстоятельные монографии и учебники [3, 7, 9, 13], написанные физиками и для физиков. Базовые понятия теории нелинейных волн вместе с наглядными физическими примерами читатель найдет в замечательном учебнике [5]. Собирающимся профессионально заняться нелинейной акустикой рекомендуем монографию [12] и задачник [2], где дана подборка задач, помогающих освоить разные аспекты нелинейной акустики. Кто же интересуется статистическими свойствами нелинейных случайных полей в применении к нелинейной акустике, астрофизике и

турбулентности, может почерпнуть необходимые сведения из монографии [4] и ее сильно расширенной и дополненной англоязычной версии [16]. Советуем также обратиться к монографии [14], излагающей основы теории сильной турбулентности и присущих ей явлений, таких как перемежаемость (intermittency) и мультифрактальность.

Несколько слов о нумерации рисунков и формул. Рисунки имеют двойную нумерацию: первая цифра обозначает номер главы, вторая — номер рисунка. Формулы пронумерованы по главам и параграфам: первая цифра указывает номер главы, вторая — номер параграфа, третья — номер формулы в параграфе.

Мы благодарны известным ученым, плодотворное общение с которыми в разные годы сформировало наше видение проблем и методов нелинейной науки. В первую очередь это относится к академикам А.В. Гапонову-Грехову, Я.Б. Зельдовичу, Р.В. Хохлову, В.И. Арнольду и Я.Г. Синаю, членам-корреспондентам РАН М.И. Рабиновичу и Д.И. Трубецкову, профессорам А.Н. Малахову, Л.А. Островскому, С.А. Рыбаку, С.И. Солуяну, А.П. Сухорукову, А.С. Чиркину и С.Ф. Шандарину. Нам приятно вспомнить годы сотрудничества с иностранными коллегами, среди которых — Д. Крайтон, У. Фриш, Б. Энфлю, Д. Блэксток, М. Гамильтон, Л. Крам, Э. Аурелл, А. Ноуллез, В. Войчинский и многие другие.

## Список литературы

1. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. 304 с.
2. Акустика в задачах / Под ред. С.Н. Гурбатова, О.В. Руденко. — М.: Наука, 1996. 335 с.
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. — М.: Наука, 1979. 383 с.
4. Гурбатов С.Н., Малахов А.Н., Саичев А.И. Нелинейные случайные волны в средах без дисперсии. — М.: Наука, 1990. 215 с.
5. Зельдович Я.Б. Элементы математической физики. — М.: Наука, 1973. 351 с.
6. Лапинова С.А., Саичев А.И., Филимонов В.А. Обобщенные функции и асимптотические методы. — Н. Новгород: Изд. Нижегородского университета, 2006. 148 с.
7. Лайтхилл Дж. Волны в жидкостях. — М.: Мир, 1981. 598 с.
8. Пиблс Ф. Структура Вселенной в больших масштабах. — М.: Наука, Мир, 1983.
9. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. — М.: Наука, 1984. 432 с.
10. Рихтмайер Р. Принципы современной математической физики. Т.1. — М.: Мир, 1982. 486 с.
11. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978. 687 с.
12. Руденко О.В., Солуян С.И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. 287 с.
13. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. 622 с.
14. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. — М.: ФАЗИС, 1998. 346 с.
15. Barabási A.-L., Stanley H.E. Fractal Concepts in Surface Growth. — Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
16. Gurbatov S.N., Malakhov A.N., Saichev A.I. Nonlinear random waves and turbulence in nondispersive media: waves, rays and particles. — Manchester University Press, 1991. 308 p.
17. Kardar M., Parisi G., Zhang Y.C. Dynamical scaling of growing interfaces // Phys. Rev. Lett. 1986. V. 56. P. 889–892.
18. Monin A.S., Yaglom A.M. Statistical Fluid Mechanics. — Cambridge, Mass: MIT Press, 1975. V. 2.
19. Saichev A.I., Woyczyński W.A. Distributions in the Physical and Engineering Sciences. Birkhäuser: Boston, 1997. 336 p.

20. *Shandarin S.F., Zeldovich Ya.B.* The large-scale structure of the Universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium // *Re. Mod. Phys.* 1989. V. 61. P. 185–220.
21. *Weinberg S.* *Gravitation and Cosmology.* — Wiley, 1972.



**Часть I**

**ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЛН  
В СРЕДАХ БЕЗ ДИСПЕРСИИ**

## Глава 1

# НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Основные закономерности нелинейных полей и волн гидродинамического типа проявляются уже в поведении решений простейших нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. В данной главе детально обсуждаются решения подобных уравнений. Желая более полно ознакомиться с теорией нелинейных уравнений первого порядка советуем дополнительно обратиться к литературе [2, 19, 29, 37].

### § 1. Уравнение простой волны

Простейшим и вместе с тем ключевым уравнением теории нелинейных волн гидродинамического типа служит *уравнение простой волны*. В дальнейшем мы будем называть это уравнение *уравнением Римана*, отдавая дань уважения замечательному математику Риману, стоявшему в основе теории нелинейных волн. В математической литературе это уравнение часто называют уравнением Хопфа. На примере данного уравнения наглядней всего пояснить такие типично нелинейные эффекты, как укручение волны и возникновение градиентной катастрофы.

#### 1.1. Каноническая форма уравнения

*Уравнением простой волны (Римана)* называют уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.1.1)$$

относительно функции  $u(x, t)$ , имеющее в разных приложениях разный геометрический, механический, экономический и т.д. смысл.

Умножив уравнение (1.1.1) на  $C'(u)$ , сведем его к эквивалентному, но более простому на вид, каноническому уравнению Римана:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (1.1.2)$$

относительно новой функции  $v(x, t) = C(u(x, t))$ . Таким образом, не теряя общности, ограничимся в дальнейшем детальным анализом решений уравнения Римана (1.1.2) с начальным условием  $v(x, t=0) = v_0(x)$ . Чтобы лучше освоить особенности решения уравнения Римана, дадим наглядную механическую интерпретацию решений этого уравнения.

### 1.2. Поток частиц

Проще всего осмыслить свойства решений уравнения Римана на примере потока частиц, равномерно движущихся вдоль оси  $x$ . Пусть частица, расположенная в начальный момент  $t = 0$  в точке с координатой  $y$ , имеет скорость  $v_0(y)$ . Тогда движение частицы задано уравнениями:

$$X(y, t) = y + v_0(y)t, \quad V(y, t) = v_0(y). \quad (1.1.3)$$

Меняя  $y$ , получим законы движения остальных частиц потока. Обратим внимание, что помимо времени  $t$  здесь фигурирует аргумент  $y$  — начальная координата частицы. Такие координаты, жестко связанные с частицами потока, называют *лагранжевыми координатами* (наглядное сравнительное обсуждение описания потоков частиц в лагранжевой и эйлеровой системах координат дано в учебнике [19]).

Обычно наблюдатель измеряет скорость потока в некоторой фиксированной точке с декартовой координатой  $x$ . Эти, более естественные для стороннего наблюдателя, координаты называют *эйлеровыми*. Отображение лагранжевых координат в эйлеровы описывается равенством

$$x = X(y, t). \quad (1.1.4)$$

В случае равномерно движущихся частиц это соотношение имеет вид:

$$x = y + v_0(y)t. \quad (1.1.5)$$

Пусть известно поле  $v(x, t)$  скорости частиц потока как функции эйлеровой координаты  $x$  и времени  $t$ . Если к тому же известен закон (1.1.4), отображения лагранжевых координат в эйлеровы, то зависимость поля скорости от лагранжевых координат задается формулой

$$V(y, t) = v(X(y, t), t). \quad (1.1.6)$$

В дальнейшем поля, задающие поведение частиц в лагранжевой системе координат, будем кратко называть *лагранжевыми*, а поля в эйлеровой системе координат — *эйлеровыми полями*. Так,  $v(x, t)$  — эйлерово поле скорости частиц, а  $X(y, t)$  — лагранжево поле эйлеровых координат частиц.

Из равномерности движения частиц следует, что скорость  $V(y, t)$  частицы с лагранжевой координатой  $y$  не зависит от времени, то есть удовлетворяет простейшему дифференциальному уравнению

$$\frac{dV}{dt} = 0, \quad (1.1.7)$$

а ее координата подчиняется не менее очевидному уравнению

$$\frac{dX}{dt} = V. \quad (1.1.8)$$

Уравнения (1.1.7), (1.1.8) есть не что иное как *характеристические уравнения* для уравнения в частных производных 1-го порядка

(1.1.2). Чтобы восстановить по решению характеристических уравнений (1.1.7), (1.1.8) решение уравнения Римана, достаточно найти обратную к (1.1.4) функцию

$$y = y(x, t),$$

отображающую эйлеровы координаты в лагранжевы. Если она известна, то с учетом (1.1.3), (1.1.6) решение уравнения Римана приобретает вид:

$$v(x, t) = V(y(x, t), t) = v_0(y(x, t)). \quad (1.1.9)$$

Подчеркнем, однозначная обратная функция  $y(x, t)$  существует, а формула (1.1.9) дает классическое решение Римана (1.1.2), лишь если отображение лагранжевых в эйлеровы координаты (1.1.4), (1.1.5) есть строго монотонно растущая функция  $y$ , отображающая  $\mathbb{R}$  на  $\mathbb{R}$ . В следующей главе мы подробно обсудим, что будет, если это условие нарушено. Пока же будем полагать его выполненным.

### 1.3. Обсуждение решения Римана

Обсудим характерные особенности поведения решения Римана  $v(x, t)$  с течением времени и в зависимости от координаты  $x$ . Но прежде перечислим основные формы записи решения Римана. Заменяя в уравнении равномерного движения частицы (1.1.5)  $y$  на  $y(x, t)$

$$y(x, t) = x - v_0(y(x, t))t \quad \Rightarrow \quad y(x, t) = x - v(x, t)t \quad (1.1.10)$$

и подставив правую часть полученного выражения в (1.1.9), придем к неявной форме записи решения Римана

$$v(x, t) = v_0(x - v(x, t)t). \quad (1.1.11)$$

После элементарных выкладок из равенства (1.1.10) вытекает еще более наглядная форма записи решения Римана:

$$v(x, t) = \frac{x - y(x, t)}{t}. \quad (1.1.12)$$

Ее смысл предельно ясен: скорость  $v$  равномерно движущейся частицы равна пути  $x - y$ , пройденному частицей к моменту  $t$ , деленному на время движения. В дальнейшем обнаружится более глубокий механический и геометрический смысл соотношения (1.1.12).

При построении графика эйлерова поля  $v(x, t)$  удобно опираться на лагранжевы поля и строить  $v(x, t)$  параметрически:

$$x = y + v_0(y)t, \quad v = v_0(y). \quad (1.1.13)$$

Именно так на рис. 1.1 построено решение Римана в случае, когда начальный профиль поля скорости имеет гауссову форму

$$v_0(x) = V_0 \exp\left(-\frac{x^2}{2\ell^2}\right). \quad (1.1.14)$$

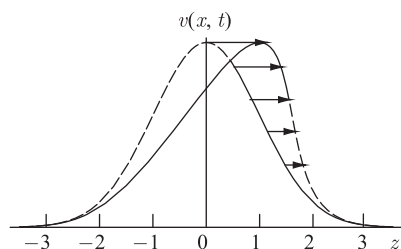


Рис. 1.1. Решение Римана в случае гауссова начального поля

На этом рисунке изображено поле скорости в безразмерных переменных

$$z = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{V_0}{\ell} t \quad (1.1.15)$$

в момент  $\tau = 1$ . Там же пунктиром линией дан график начальной скорости  $v_0(x)$ . Стрелками указаны смещения частиц за время  $\tau$ . Видно, что чем больше скорость частицы, тем на большее расстояние от исходного положения сместится частица к текущему моменту времени. Это ведет к укручению правого фронта поля  $v(x, t)$  и растяжению левого фронта.

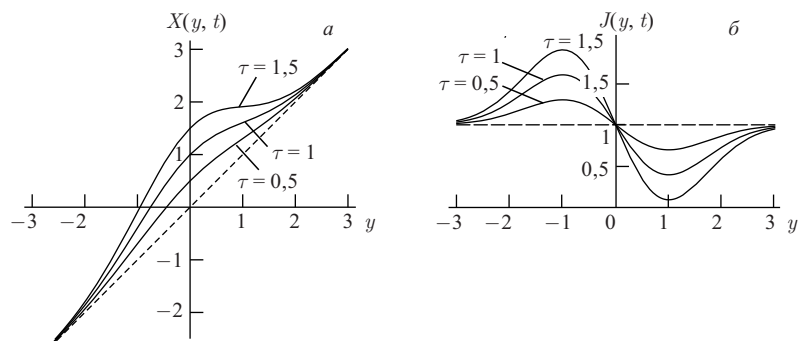


Рис. 1.2. Закон движения частиц  $X(y, t)$  (а) и отвечающее ему лагранжево поле расходимости  $J(y, t)$  (б) в разные моменты времени. Видно, что в потоке возникают сжатые и разреженные участки, где  $J(y, t)$  отлично от единицы

#### 1.4. Сжатия и растяжения потока частиц

Укручение правого участка профиля поля скорости  $v(x, t)$  на рис. 1.1 сопровождается сгущением частиц потока. Действительно, частицы слева на этом участке имеют большую скорость, чем частицы справа. В итоге быстрые левые частицы со временем догоняют более медленные правые частицы. Напротив, растяжение левого участка профиля  $v(x, t)$  ведет к разрежению потока. Количественно меру растяже-

ния участков потока выражает якобиан, в одномерном случае равный:

$$J(y, t) = \frac{\partial X(y, t)}{\partial y}. \quad (1.1.16)$$

Для равномерно движущихся частиц, закон движения которых задан уравнением (1.1.5), якобиан равен:

$$J(y, t) = 1 + v'_0(y)t. \quad (1.1.17)$$

Чем он больше при заданном  $y$ , тем более разрежен поток в окрестности частицы с лагранжевой координатой  $y$ . Поэтому назовем  $J(y, t)$  *расходимость* потока. График закона движения  $X(y, t)$  и отвечающей ему расходимости для равномерно движущихся частиц, эйлерово поле скорости которых удовлетворяет уравнению Римана (2) с начальным условием (1.1.14), изображены на рис. 1.2.

Поле  $J(y, t)$  (1.1.16) — лагранжево поле расходимости. Отвечающее ему эйлерово поле расходимости, очевидно, равно:

$$j(x, t) = J(y(x, t), t) \iff J(y, t) = j(X(y, t), t). \quad (1.1.18)$$

Если закон отображения эйлеровых в лагранжевы координаты  $y(x, t)$  известен, то поле расходимости можно определить более прямым путем, опираясь на геометрически очевидное соотношение:

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = \frac{1}{j(x, t)}. \quad (1.1.19)$$

### 1.5. Уравнение непрерывности

Если и дальше придерживаться механической трактовки решения уравнения Римана (1.1.2) как поля скорости потока равномерно движущихся частиц, то естественно спросить: как меняется во времени и пространстве их плотность  $\rho(x, t)$ ? Известно, что она удовлетворяет универсальному *уравнению непрерывности*, выражающему закон сохранения массы частиц потока. Выведем это уравнение, пользуясь способом, позволяющим лучше понять последующий анализ решений нелинейных уравнений в частных производных.

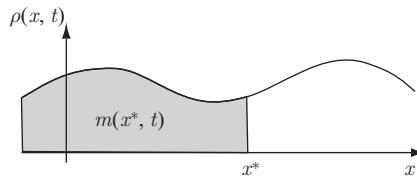


Рис. 1.3. Иллюстрация понятия массы  $m(x^*, t)$  частиц потока слева от точки  $x^*$

Пусть, для определенности, начальная плотность частиц потока  $\rho_0(x)$  такова, что масса частиц слева от любой точки  $x$

$$m_0(x) = \int_{-\infty}^x \rho_0(z) dz$$

ограничена. Изменение массы частиц слева от произвольной точки  $x$  опишем функцией  $m(x, t)$ . Подобно полю скорости  $v(x, t)$ , это эйлерово поле. Зная закон движения частиц  $X(y, t)$ , от эйлерова поля массы слева легко перейти к соответствующему лагранжеву полю

$$M(y, t) = m(X(y, t), t).$$

Последнее легко найти из наглядных физических соображений. Действительно, если к текущему моменту  $t$  частицы не совершали обгон (не менялись местами), то масса частиц слева любой точки с лагранжевой координатой  $y$  не зависит от времени:

$$M(y, t) = \int_{-\infty}^y \rho_0(z) dz = m_0(y). \quad (1.1.20)$$

Иначе говоря, лагранжево поле массы слева удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM}{dt} = 0.$$

Эквивалентное ему уравнение эйлерова поля  $m(x, t)$  таково:

$$\frac{\partial m}{\partial t} + v \frac{\partial m}{\partial x} = 0. \quad (1.1.21)$$

Найдем теперь плотность частиц. В одномерном случае эйлерово поле плотности равно производной массы слева:

$$\rho(x, t) = \frac{\partial m(x, t)}{\partial x}. \quad (1.1.22)$$

Следовательно, дифференцируя уравнение (1.1.21) почленно по  $x$ , приходим к искомому одномерному варианту уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (v\rho) = 0. \quad (1.1.23)$$

*Замечание.* Обратим внимание, что при выводе уравнения непрерывности нигде не использовался факт равномерности движения. Так в данном выводе проявилась универсальность уравнения непрерывности, справедливого для любых законов движения частиц.

### 1.6. Построение поля плотности

Чтобы найти решение уравнения непрерывности (1.1.23), выпишем эйлерово поле массы слева. Из (1.1.20) и связи лагранжевых и эйлеровых полей следует, что

$$M(y, t) = m_0(y) \iff m(x, t) = m_0(y(x, t)). \quad (1.1.24)$$

Дифференцируя последнее равенство по  $x$ , получаем:

$$\rho(x, t) = \rho_0(y(x, t)) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \quad (1.1.25)$$

или, с учетом (1.1.19),

$$\rho(x, t) = \frac{\rho_0(y(x, t))}{j(x, t)} \iff R(y, t) = \frac{\rho_0(y)}{J(y, t)}. \quad (1.1.26)$$

Эти формулы имеют наглядный геометрический смысл: плотность потока в любой точке равна начальной плотности в окрестности частицы, попадающей в данную точку, деленной на степень сжатия частиц.

Отдельно обсудим плотность потока равномерно движущихся частиц, поле скорости  $v(x, t)$  которого подчиняется уравнению Римана, а  $y(x, t)$  задано равенством (1.1.10). При этом, как видно из (1.1.25), (1.1.10), плотность потока следующим образом выражается через решение Римана:

$$\rho(x, t) = \rho_0(x - v(x, t)t) \left(1 - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} t\right). \quad (1.1.27)$$

В частности, при однородной начальной плотности, то есть если  $\rho_0 = \text{const}$  — не зависит от  $x$ , плотность описывается соотношением

$$\rho(x, t) = \rho_0 \left(1 - \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} t\right), \quad (1.1.28)$$

демонстрирующим тесную связь между плотностью потока и укручением профиля его поля скорости.

Как и в случае с полем скорости, график плотности потока равномерно движущихся частиц удобно строить параметрически, пользуясь тем, что лагранжевы законы эволюции потока заданы в явном виде:

$$x = y + v_0(y)t, \quad \rho = \frac{\rho_0(y)}{1 + v_0'(y)t}. \quad (1.1.29)$$

Так построены графики  $\rho(x, t)$  на рис. 1.4.

### 1.7. Закон сохранения импульса

Помимо закона сохранения массы, поток равномерно движущихся частиц обладает еще бесконечным множеством инвариантов (см., например, [21, 37]). Большинство из них не имеют особого физического смысла. Другие же, например закон сохранения импульса, играют первостепенную роль в физических приложениях. Обсудим закон сохранения импульса подробнее.



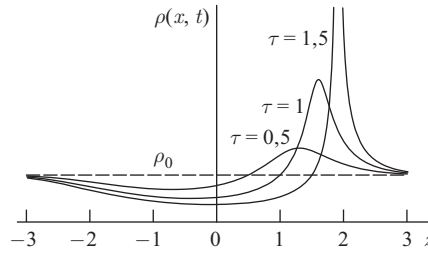


Рис. 1.4. Плотность равномерно движущихся частиц при гауссовом начальном поле скорости (1.1.14) и постоянной начальной плотности  $\rho(x, t = 0) = \rho_0$

Напомним, суммарный импульс частиц слева от точки  $x$  равен

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^x v(x, t) \rho(x, t) dx.$$

Подставив сюда формулы (1.1.9) и (1.1.25) для скорости и плотности потока, а затем перейдя к интегрированию по лагранжевой координате, сведем выражение для импульса слева к виду:

$$p(x, t) = \int_{-\infty}^x v_0(y(x, t)) \rho_0(x(y, t)) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^{y(x, t)} v_0(y) \rho_0(y) dy.$$

Отсюда видно, что для равномерно движущихся частиц лагранжево поле импульса слева не зависит от времени:

$$P(y, t) = p_0(y) = \int_{-\infty}^y \rho_0(y) v_0(y) dy. \quad (1.1.30)$$

Следовательно, подобно массе слева, соответствующее эйлерово поле импульса слева удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (1.1.31)$$

а плотность импульса

$$g(x, t) = \rho(x, t) v(x, t) = \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}$$

подчиняется уравнению непрерывности

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vg) = 0. \quad (1.1.32)$$

*Замечание 1.* Легко вывести данное уравнение как следствие дифференциальных уравнений Римана (1.1.2) и непрерывности (1.1.23). Но мы сознательно пошли кружным «интегральным» путем, так как

он поможет впоследствии построить обобщенные решения упомянутых уравнений.

*Замечание 2.* Поскольку плотность импульса подчиняется тому же уравнению, что и просто плотность  $\rho(x, t)$ , мы «бесплатно» приобретаем выражения для эйлерова и лагранжева полей плотности импульса, подставив в (1.1.26), вместо начальной плотности, начальный импульс:

$$g(x, t) = \frac{\rho_0(y(x, t))v_0(y(x, t))}{j(x, t)} \iff G(y, t) = \frac{\rho_0(y)v_0(y)}{J(y, t)}. \quad (1.1.33)$$

### 1.8. Фурье-образы плотности и скорости

В приложениях часто важно знать не сами поля, а их спектры. Поэтому найдем выражения для пространственных Фурье-образов скорости и плотности. Найдем вначале Фурье-образ плотности:

$$\tilde{\rho}(\varkappa, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa x} \rho(x, t) dx. \quad (1.1.34)$$

Подставив в интеграл (1.1.34) найденное ранее решение уравнения непрерывности (1.1.25), будем иметь

$$\tilde{\rho}(\varkappa, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa x} \rho_0(y(x, t)) dy(x, t).$$

Перейдя затем к интегрированию по лагранжевой координате, получим окончательно

$$\tilde{\rho}(\varkappa, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\varkappa X(y, t)} \rho_0(y) dy. \quad (1.1.35)$$

Более громоздкие выкладки, опирающиеся на ту же идею перехода в интеграле Фурье к интегрированию по лагранжевым координатам, дают:

$$\tilde{v}(\varkappa, t) = \frac{i}{2\pi \varkappa t} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i\varkappa X(y, t)} - e^{-i\varkappa y}] dy. \quad (1.1.36)$$

Обсуждение этого решения можно найти в монографии [33].

*Пример. Генерация гармоник.* Формулы (1.1.35), (1.1.36) замечательны тем, что выражают Фурье-образы неявно заданных (к примеру, равенством (1.1.11)) полей  $\rho(x, t)$  и  $v(x, t)$  через интегралы от явно заданных функций. Воспользуемся представившейся возможностью и найдем явное выражение для Фурье-образа плотности  $\rho(x, t)$  в случае первоначально гармонического поля скорости и однородной плотности

$$v_0(x) = a \sin(kx), \quad \rho_0(x) = \rho_0 = const. \quad (1.1.37)$$

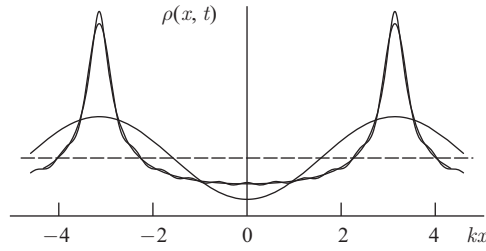


Рис. 1.5. График  $\rho(x, t)$  для начальных гармонического поля скорости и однородной плотности (1.1.37) при  $\tau = akt = 0,7$ . Там же даны графики первых двух (одно гармоническое слагаемое) и 11-ти слагаемых ряда Фурье. Видно, что график последней суммы почти совпадает с графиком плотности

При этом нам понадобится формула теории функций Бесселя

$$e^{iw \sin z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(w) e^{inz}. \quad (1.1.38)$$

В исследуемом случае закон отображения лагранжевых в эйлеровы координаты задается равенством:

$$x = X(y, t) = y + at \sin(ky). \quad (1.1.39)$$

Подставив ее в (1.1.35), будем иметь:

$$\tilde{\rho}(z, t) = \frac{\rho_0}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu z - i\mu\tau \sin z} dz.$$

Здесь введены безразмерные переменная интегрирования  $z = ky$ , время  $\tau = kat$  и пространственная частота  $\mu = z/k$ . С учетом (1.1.38) получим

$$\tilde{\rho}(z, t) = \rho_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-\mu\tau) \frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\mu-n)z} dz.$$

Последний интеграл, согласно теории обобщенных функций (см., например, [24, 93]), равен

$$\frac{1}{2\pi k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\mu-n)z} dz = \frac{1}{k} \delta(\mu - n) = \delta(z - kn).$$

Отсюда и из предыдущего выражения следует, что исследуемое поле плотности обладает обобщенным Фурье-образом:

$$\tilde{\rho}(z, t) = \rho_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(-n\tau) \delta(z - kn).$$

Подставив его в обратный интеграл Фурье

$$\rho(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\rho}(x, t) e^{ixx} dx$$

и приняв во внимание свойства симметрии функции Бесселя

$$J_{-n}(-w) = J_n(w), \quad (1.1.40)$$

придем к явному выражению для поля плотности в виде ряда Фурье:

$$\rho(x, t) = \rho_0 + 2\rho_0 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_n(n\tau) \cos(kx). \quad (1.1.41)$$

Сравнение суммы первых слагаемых этого ряда с точным графиком плотности, построенным параметрически с помощью соотношений (1.1.29), показывает, что уже несколько первых слагаемых ряда Фурье дают хорошее приближение к точному решению

## § 2. Уравнение роста линии

Из многочисленных применений нелинейных уравнений в частных производных 1-го порядка обсудим еще одно: анализ роста поверхностей и линий. Это может быть напыляемая поверхность электронного чипа, волновой фронт световой волны, ударная волна реактивного самолета и пожирающая лес линия лесного пожара. Все эти поверхности и линии описываются нелинейными уравнениями в частных производных (см., например, [43, 74, 96, 106]). Простейший пример подобных уравнений дан ниже.

### 2.1. Распространение лесного пожара

Пусть по лесу движется пожар. Чтобы математически описать процесс распространения пожара, будем считать поверхность леса плоской и введем на данной плоскости декартовы координаты  $(x, z)$ . Направим ось  $z$  в сторону преимущественного направления пожара. В итоге удастся описать линию фронта пожара функцией

$$z = h(x, t). \quad (1.2.1)$$

Естественно полагать, что пожар распространяется перпендикулярно линии пожара  $h(x, t)$  со скоростью  $c$ . Это значит, что если выделить некоторую точку  $\{y, h(y, t = 0)\}$  на линии пожара в исходный момент  $t = 0$  и проследить ее движение по траектории, перпендикулярной линиям пожара, то скорость движения точки окажется равной  $c$ . Пусть координаты указанной точки меняются с течением времени по законам  $\{X(t), Z(t)\}$ . Назовем траекторию движения упомянутой точки *лучом*. Из сказанного ясно, что координаты луча удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{dX}{dt} = c \sin \vartheta \quad \frac{dZ}{dt} = c \cos \vartheta, \quad (1.2.2)$$

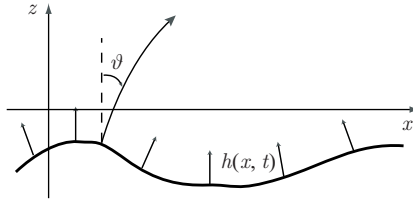


Рис. 1.6. Линия пожара и ее тенденция к росту

где  $\vartheta$  — угол между лучом и осью  $z$ . Заметим далее, что вертикальная координата  $Z(t)$  луча выражается через линию пожара (1.2.1):

$$Z(t) = h(X(t), t). \quad (1.2.3)$$

Подставив это равенство во второе уравнение (1.2.2), получим

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{dX}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} = c \cos \vartheta$$

или, с учетом 1-го уравнения (1.2.2), приходим к уравнению в частных производных относительно искомой линии пожара  $h(x, t)$ :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \sin \vartheta \frac{\partial h}{\partial x} = c \cos \vartheta. \quad (1.2.4)$$

Казалось бы, уравнение незамкнуто, так как связывает две функции: линию пожара  $h(x, t)$  и  $\vartheta(x, t)$  — угол между осью  $z$  и нормалью к линии пожара. Однако его нетрудно замкнуть, используя очевидную геометрическую связь между линией  $h(x, t)$  и углом  $\vartheta$ :

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\tan \vartheta. \quad (1.2.5)$$

С учетом этого равенства уравнение (1.2.4) переписывается в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{c}{\cos \vartheta}. \quad (1.2.6)$$

Заметив наконец, что

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \vartheta}},$$

получим окончательно искомое уравнение:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2}. \quad (1.2.7)$$

*Замечание 1.* На первый взгляд, жонглирование аналитическими преобразованиями привело к абсурдному, с точки зрения здравого геометрического смысла, уравнению (1.2.6). Действительно, казалось бы, чем больше нормаль к линии  $h(x, t)$  отклоняется от оси  $z$ , то

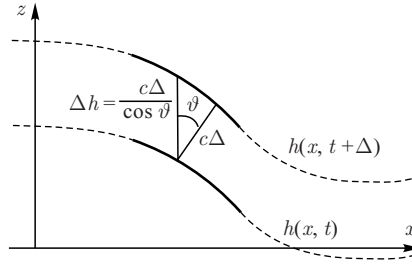


Рис. 1.7. Геометрическая иллюстрация справедливости уравнения (1.2.6)

есть чем больше угол  $\vartheta$  между осью  $z$  и направлением роста линии, тем медленнее линия  $h(x, t)$  должна расти вдоль оси  $z$ . Уравнение же (1.2.6) означает, что чем больше  $\vartheta$ , тем быстрее рост, а при  $\vartheta = \pi/2$  скорость роста становится бесконечной. Однако аккуратное геометрическое исследование убеждает в справедливости уравнения (1.2.6). Соответствующие геометрические построения даны на рис. 1.7, где изображены фрагменты линии  $h(x, t)$  в близкие моменты времени  $t$  и  $t + \Delta$ . Из рисунка видно, что приращение высоты линии в произвольно выбранной точке  $x$

$$\Delta h = h(x, t + \Delta) - h(x, t) \approx \frac{c\Delta}{\cos \vartheta}$$

обратно пропорционально  $\cos \vartheta$ . Может быть, этот геометрический вывод убедит кого-то в правильности уравнений (1.2.6), (1.2.7) быстрее, чем приведенные выше формальные аналитические выкладки.

*Замечание 2.* Если в (1.2.7) взять скорость отрицательной ( $c < 0$ ), то получится уравнение не роста, а спадания линии  $h(x, t)$ . Соответственно уравнение (1.2.7) будет описывать, например, таяние льда в стакане воды или коррозию корпуса океанского судна.

*Замечание 3.* Мы не зря назвали кривую  $\{X(t), Z(t)\}$ , перпендикулярную фронту пожара  $h(x, t)$ , лучом. Дело в том, что описанному выше закону распространения, перпендикулярно фронту с заданной скоростью, подчиняется волновой фронт оптической волны. Линии, всюду перпендикулярные волновым фронтам, есть, по определению, оптические лучи. Таким образом, (1.2.7) представляет собой одномерный вариант уравнений, описывающих эволюцию волнового фронта оптических волн.

*Замечание 4.* Обычно оптические волны распространяются в некотором выделенном направлении — под малыми углами к нему. Если преимущественное направление оптической волны указывает ось  $z$ , то углы наклона лучей к оси  $z$  малы ( $\vartheta \ll 1$ ), и вместо уравнения (1.2.7) пользуются более простым приближенным уравнением. А именно, за-

меняют

$$-\frac{\partial h}{\partial x} = \tan \vartheta \approx \vartheta, \quad \sqrt{1 + \tan^2 \vartheta} \approx 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2$$

и переписывают уравнение (1.2.7) в виде:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = c + \frac{c}{2} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2.$$

Для плоской волны, распространяющейся точно вдоль оси  $z$ , это уравнение имеет простое решение:  $h = ct$ . Если нас не интересует абсолютное положение волнового фронта, а лишь его форма, можно исключить указанное тривиальное поступательное движение, введя новую функцию

$$w(x, t) = h(x, t) - ct. \quad (1.2.8)$$

Последняя удовлетворяет более эстетичному уравнению:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{c}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2. \quad (1.2.9)$$

## 2.2. Анизотропный рост поверхности

Введем новое обозначение

$$u(x, t) = -\frac{\partial h(x, t)}{\partial x}. \quad (1.2.10)$$

Напомним,  $u = \tan \vartheta$  — характеризует направление роста поверхности. Поэтому назовем  $u(x, t)$  *полем наклонов*.

Иногда поверхность растет с разной скоростью в разных направлениях [43]. Например, при распространении оптической волны в анизотропной среде, или при таянии ледников, когда темп таяния зависит от того, под каким углом к солнцу расположен участок ледниковой поверхности. Учтем анизотропию роста, полагая скорость зависящей от  $u$ , и перейдем от (1.2.6) к более общему уравнению

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \Phi(u), \quad h(x, t = 0) = h_0(x), \quad (1.2.11)$$

где

$$\Phi(u) = c(u) \sqrt{1 + u^2}. \quad (1.2.12)$$

Приведем несколько примеров анизотропных поверхностей.

*Пример 1.* В безветренную зимнюю погоду снег вертикально падает на землю. При этом на площадку снежной поверхности площадью  $ds$ , находящуюся под углом  $\vartheta$  к зениту, за единицу времени выпадает количество снега, пропорциональное  $\cos \vartheta ds$ . Соответственно, скорость роста снежной поверхности в направлении  $\vartheta$  задается равенством:

$$c(u) = c \cos \vartheta = \frac{c}{\sqrt{1 + u^2}}. \quad (1.2.13)$$

Подставив это выражение в (1.2.12), получим, что  $\Phi = c = const$ , а уравнение роста поверхности (1.2.11) имеет тривиальное решение

$$h(x, z) = h_0(x) + ct, \quad (1.2.14)$$

согласно ему форма снежной поверхности в снегопад не меняется.

*Пример 2.* Возьмем более общую ситуацию, когда на поверхность осаждаются частицы, падающие с разных направлений. Пусть  $D(\vartheta)$  — диаграмма направленности, задающая интенсивность потока падающих частиц под углом  $\vartheta$  к оси  $z$ . Тогда полная интенсивность частиц, падающих на площадку поверхности, наклоненную под углом  $\vartheta$  к оси  $z$ , равна

$$c(\vartheta) = \int_{\vartheta_-}^{\vartheta_+} D(\vartheta') \cos(\vartheta - \vartheta') d\vartheta'. \quad (1.2.15)$$

В частности, рассмотренному выше вертикально падающему снегу соответствует сингулярная диаграмма направленности  $D(\vartheta) = c\delta(\vartheta)$ .

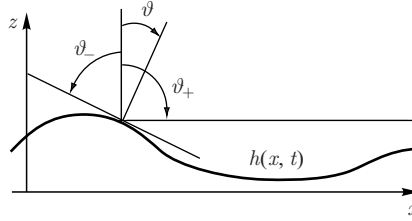


Рис. 1.8. Иллюстрация к определению пределов интеграла (1.2.15)

Обратим внимание, что пределы интегрирования в (1.2.15) учитывают эффекты затенения исследуемого элемента кривой  $h(x, t)$  остальной ее частью и, вообще говоря, зависят от рельефа линии  $h(x, t)$ . Для определенности рассмотрим участок данной линии, наклоненный к оси  $z$  под положительным углом  $\vartheta > 0$ . При этом, очевидно,

$$\min \vartheta_- = \vartheta - \frac{\pi}{2}, \quad \max \vartheta_+ = \frac{\pi}{2}$$

(см. рис. 1.8). Асимметрия минимального и максимального углов диаграммы направленности связана с тем, что при выбранной геометрии ( $\vartheta > 0$ ) участка кривой  $h(x, t)$ , наименьший угол  $\min \vartheta_-$ , под которым на поверхность могут попасть частицы, ограничен положением касательной к данному участку, а  $\max \vartheta_+$  ограничен подстилающей поверхностью  $z = const$ . Для изотропного потока  $D = const$ , и без учета возможного затенения линии  $h(x, t)$  ее удаленными участками



скорость роста равна:

$$c(\vartheta) = D \int_{\vartheta - \pi/2}^{\pi/2} \cos(\vartheta' - \vartheta) d\vartheta' = D(1 + \cos \vartheta). \quad (1.2.16)$$

Четность полученного выражения означает, что оно справедливо как для рассматриваемого случая  $\vartheta > 0$ , так и для случая  $\vartheta < 0$ .

### 2.3. Решение уравнения роста поверхности

Решим уравнение (1.2.11). Дифференцируя его по  $x$ , придем к уравнению для поля наклонов  $u(x, t)$  (1.2.10):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + C(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (1.2.17)$$

Здесь

$$C(u) = \frac{d\Phi(u)}{du} = \frac{d}{du} [c(u)\sqrt{1+u^2}]. \quad (1.2.18)$$

Соответствующие (1.2.11), (1.2.17) характеристические уравнения таковы:

$$\frac{d\tilde{X}}{dt} = C(U), \quad \frac{dU}{dt} = 0, \quad \frac{dH}{dt} = \Lambda(U), \quad (1.2.19)$$

где поля вдоль характеристик обозначены заглавными буквами. Кроме того, здесь обозначено:

$$\Lambda(u) = \Phi(u) - uC(u) = -u^2 \frac{d}{du} \left( \frac{\Phi(u)}{u} \right) \quad (1.2.20)$$

и введена вспомогательная функция  $\tilde{X}(y, t)$ . Знак тильда поставлен для того, чтобы не путать данную функцию с функцией  $X(t)$ , удовлетворяющей первому уравнению (1.2.2):

$$\frac{dX}{dt} = V(u), \quad V(u) = c \sin \vartheta = \frac{u c(u)}{\sqrt{1+u^2}}, \quad (1.2.21)$$

и имеющей, в случае фронтов оптических волн, ясный геометрический смысл: горизонтальной координаты траектории луча, перпендикулярного волновому фронту. Чтобы отличить  $X(t)$  от  $\tilde{X}(y, t)$ , назовем последнюю функцию (вместе с  $\tilde{Z} = h(\tilde{X}, t)$ ) *траекторией изоклин* растущей поверхности  $h(x, t)$ . Решения уравнений (1.2.19) имеют вид:

$$U(y, t) = u_0(y), \quad \tilde{X}(y, t) = y + C(u_0(y))t, \quad H(y, t) = h_0(y) + \Lambda(u_0(y))t. \quad (1.2.22)$$

Отсюда следует, к примеру, что изоклины всегда прямые, в отличие от лучей, искривляющихся в анизотропной среде.

Как и в случае уравнения Римана, искомые поля  $h(x, t)$  и  $u(x, t)$  получаются из (1.2.22) подстановкой в  $H(y, t)$ ,  $U(y, t)$  функции  $y = \tilde{y}(x, t)$ , обратной к функции  $x = \tilde{X}(y, t)$ .

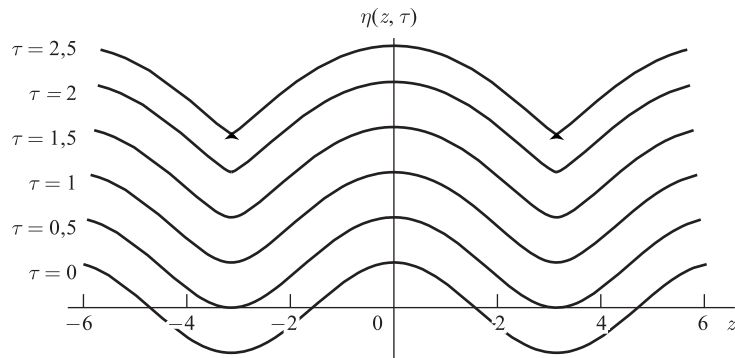


Рис. 1.9. Линии  $h(x, t)$  в разные моменты времени. Их естественно трактовать как графики волнового фронта оптической волны в изотропной среде. Со временем вершины  $h(x, t)$  становятся все более плоскими, а впадины заостряются

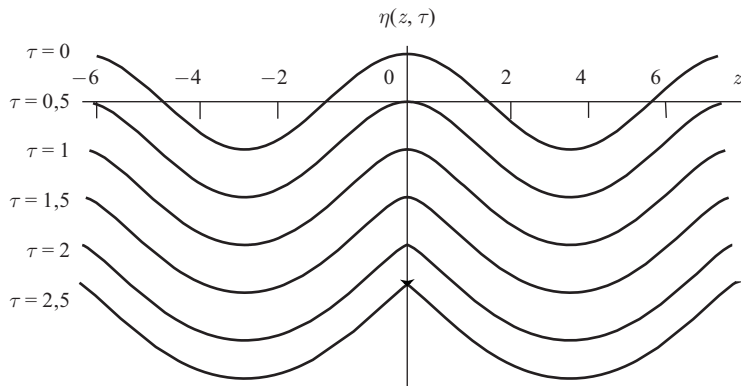


Рис. 1.10. Тающая линия  $h(x, t)$ . Видно, что в отличие от растущей линии, вершины  $h(x, t)$  со временем заостряются, а впадины становятся плоскими. Каждый наблюдал нечто подобное, замечая как все острее становятся края льдинок в стакане пепси-колы

*Пример 1. Изотропная скорость роста.* Пусть скорость роста не зависит от наклона линии, то есть реализуется случай  $c(u) = c = const$ . Это справедливо, например, для оптических волн в изотропной среде. В такой среде скорости движения вдоль лучей и изоклин одинаковы:

$$C(u) = V(u) = \frac{cu}{\sqrt{1+u^2}} = c \sin \vartheta,$$

а лучи совпадают с изоклинами. Рост линии при этом задается параметрически:

$$x = y + \frac{u_0(y)}{\sqrt{1 + u_0^2(y)}} ct, \quad h = h_0(y) + \frac{ct}{\sqrt{1 + u_0^2(y)}}. \quad (1.2.23)$$

Возьмем в качестве исходного профиля кривой  $h(x, t)$  синусоиду:

$$h_0(x) = h_0 \cos kx \quad \Rightarrow \quad u_0(x) = h_0 k \sin kx.$$

Тогда параметрическое уравнение линии  $h(x, t)$  имеет вид:

$$z = \mu + \frac{\varepsilon \tau \sin \mu}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \mu}}, \quad \eta = \varepsilon \cos \mu + \frac{\tau}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin^2 \mu}}, \quad (1.2.24)$$

где использованы следующие безразмерные переменные:

$$kx = z, \quad ky = \mu, \quad ckt = \tau, \quad kh = \eta, \quad (1.2.25)$$

и параметр

$$kh_0 = \varepsilon. \quad (1.2.26)$$

Построенные на основе формул (1.2.24) графики линии  $h(x, t)$  для разных  $\tau$  и  $\varepsilon = 1/2$ , приведены на рис. 1.9.

*Пример 2.* Построим графики линий, заданных теми же параметрическими уравнениями (1.2.24), что и в предыдущем примере. Но возьмем скорость отрицательной ( $c < 0$ ). Физически это соответствует не росту, а таянию поверхности. Найдем профили тающей поверхности во все бóльшие моменты времени, заменив в (1.2.24) знаки  $\tau$  с «+» на «-». Графики тающей поверхности даны на рис. 1.10.

## § 3. Законы одномерной гравитации

### 3.1. Лагранжево описание одномерной гравитации

Вообразим себе одномерный мир, где Закон Всемирного Тяготения очень прост: сила взаимного тяготения двух тел пропорциональна их массам и не зависит от расстояния между ними. Сформулируем этот закон на языке формул. Пусть на оси  $x$ , направленной вдоль одномерного мира, расположены два тела, левое с массой  $M_l$  и правое с массой  $M_r$ . Обозначим проекцию на ось  $x$  силы, действующей на левое тело со стороны правого, за  $F_l$ , а силы, действующей на правое тело —  $F_r$ . Поскольку в одномерном мире нет других направлений, кроме направления оси  $x$ , будем называть упомянутые проекции просто *силами*. Согласно Закону Всемирного Тяготения одномерного мира силы взаимодействия между частицами равны

$$F_l = -F_r = \gamma M_l M_r.$$

Здесь  $\gamma$  — гравитационная постоянная.

Пусть начальные скорость и плотность частиц в одномерном мире равны, соответственно,  $v_0(x)$  и  $\rho_0(x)$ . Пусть также полная масса частиц ограничена и равна

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_0(x) dx.$$

Найдем лагранжевы поля скорости и плотности одномерного потока гравитационно взаимодействующих частиц до начала их столкновений. Для этого исследуем движение отдельных частиц потока. Рассмотрим частицу потока с произвольной лагранжевой координатой  $y$ . Как обычно, обозначим ее эйлерову координату за  $x = X(y, t)$ . Движение частицы подчиняется второму закону Ньютона, которое, в силу Закона Всемирного Тяготения одномерного мира, приобретает вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \gamma [M_r(y, t) - M_l(y, t)].$$

Здесь  $M_r(y, t)$  — масса вещества потока справа от выбранной частицы, а  $M_l(y, t)$  — слева от нее. Пока частицы не меняют порядка следования, указанные массы не зависят от времени и равны

$$M_l(y) = \int_{-\infty}^y \rho_0(y') dy, \quad M_r(y) = \int_y^{\infty} \rho_0(y') dy,$$

а уравнение Ньютона становится совсем простым:

$$\frac{dX(y, t)}{dt} = V(y, t), \quad \frac{dV(y, t)}{dt} = \gamma [M_r(y) - M_l(y)]. \quad (1.3.1)$$

Мы разделили уравнение Ньютона на два уравнения первого порядка, чтобы явно выделить искомое лагранжево поле скорости потока  $V(y, t)$ .

Уравнения (1.3.1) следует дополнить начальными условиями

$$X(y, t = 0) = y, \quad V(y, t = 0) = v_0(y).$$

Решая указанные уравнения с заданными начальными условиями, найдем лагранжево поле скорости

$$v = V(y, t) = v_0(y) + \gamma [M - 2M(y)] t \quad (1.3.2)$$

и отображение лагранжевых в эйлеровы координаты

$$x = X(y, t) = y + v_0(y)t + \frac{\gamma}{2} [M - 2M(y)] t^2. \quad (1.3.3)$$

Здесь принято во внимание, что массы вещества потока слева и справа от выбранной частицы связаны тождеством

$$M_l(y) + M_r(y) \equiv M,$$

и опустили индекс у массы слева:  $M(y) = M_l(y)$ . В итоге правая часть уравнения Ньютона приобрела вид:

$$M_r(y) - M_l(y) = M - 2M_l(y) = M - 2M(y).$$

Лагранжево поле плотности, как известно, описывается универсальным выражением

$$R(y, t) = \frac{\rho_0(y)}{J(y, t)}. \quad (1.3.4)$$

Сюда входит якобиан преобразования лагранжевых в эйлеровы координаты, в нашем случае равный

$$J(y, t) = \frac{\partial X}{\partial y} = 1 + v'_0(y)t - \frac{\gamma}{2}\rho_0(y)t^2. \quad (1.3.5)$$

*Замечание.* Обратим внимание на замечательную особенность поля плотности (1.3.4) гравитационно взаимодействующих частиц. Если поле скорости (1.3.2) зависит от масс всего вещества слева и справа от точки с заданной лагранжевой координатой  $y$ , то поле плотности *локально связано со свойствами потока*: его поведение определяется начальными скоростью и плотностью лишь в одной точке.

### 3.2. Эйлерово описание одномерной гравитации

В принципе, зная лагранжевы характеристики исследуемых полей, нетрудно восстановить по ним соответствующие поля в эйлеровом представлении. Например, график эйлерова поля плотности  $\rho(x, t)$  одномерного потока гравитационно взаимодействующих частиц нетрудно построить параметрически, пользуясь равенствами

$$\rho = R(y, t), \quad x = X(y, t),$$

где, в случае гравитационно взаимодействующих частиц, поля  $X(y, t)$  и  $R(y, t)$  задаются равенствами (1.3.3)–(1.3.5). Тем не менее, существуют специфические вопросы, например характер укручения эйлеровых полей, которые удобно обсуждать именно в эйлеровом представлении. Ниже мы рассмотрим подтверждающий сказанное пример анализа эйлеровых полей плотности и скорости одномерного потока гравитационно взаимодействующих частиц.

Пусть начальное поле плотности равно

$$\rho_0(x) = \rho_0 \frac{\ell^2}{x^2 + \ell^2}, \quad (1.3.6)$$

а начальное поле скорости тождественно равно нулю. Построим графики эйлеровых полей скорости  $v(x, t)$  и плотности  $\rho(x, t)$  потока гравитационно взаимодействующих частиц в нарастающие моменты времени, и продемонстрируем с помощью этих графиков развитие гравитационной неустойчивости.

Прежде всего вычислим массу вещества слева от точки с лагранжевой координатой  $y$ . Она равна

$$M(y) = \rho_0 \ell^2 \int_{-\infty}^y \frac{dz}{z^2 + \ell^2} = \frac{M}{\pi} \left[ \arctan\left(\frac{y}{\ell}\right) + \frac{\pi}{2} \right].$$

Здесь учтено, что полная масса потока

$$M = \pi \rho_0 \ell.$$

Выпишем отдельно комбинацию масс справа и слева, входящую в выражения для лагранжева поля скорости (1.3.2) и отображения лагранжевых в эйлеровы координаты (1.3.3):

$$M - 2M(y) = -2\rho_0 \ell \arctan\left(\frac{y}{\ell}\right).$$

Подставив ее в соотношения (1.3.2), (1.3.3), получим параметрическое задание эйлеровых полей скорости и плотности

$$\eta = \zeta - \tau^2 \arctan \zeta, \quad u = -2\tau \arctan \zeta, \quad r = \frac{1}{1 + \zeta^2 - \tau^2}.$$

Здесь введены безразмерные координаты, время, скорость и плотность

$$\eta = \frac{x}{\ell}, \quad \zeta = \frac{y}{\ell}, \quad \tau = \sqrt{\gamma \rho_0} t, \quad u = \frac{v}{\sqrt{\gamma \rho_0} \ell}, \quad r = \frac{\rho}{\rho_0}.$$

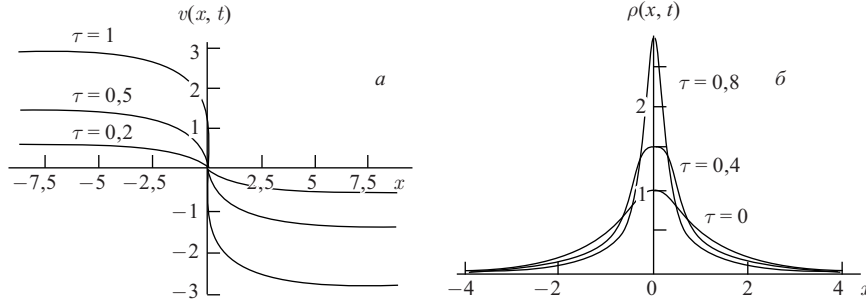


Рис. 1.11. Графики безразмерных эйлеровых полей скорости и плотности гравитационно взаимодействующих частиц в разные моменты времени. Видно, что гравитационное взаимодействие приводит ко все убыстряющемуся стремлению частиц к центру, росту и сжатию кривой плотности в окрестности центра одномерного мира  $x = 0$

### 3.3. Коллапс одномерной Вселенной

Приведенные выше формулы лагранжева и эйлерова описания гравитационно взаимодействующего одномерного потока частиц «работают», только если полная масса частиц ограничена. Иногда возникает необходимость исследовать движения подобных потоков в случае, ко-

гда полная масса частиц потока бесконечна. Иногда это можно сделать, рассматривая потоки с бесконечной массой как предел потоков с массой, стремящейся к бесконечности. Рассмотрим ниже характерный пример подобного рода вычислений.

Предположим, нас интересует эволюция одномерной Вселенной, плотность которой в начальный момент времени  $t = 0$  была равномерной:

$$\rho_0(x) = \rho_0 = \text{const.}$$

Для этого введем вспомогательное начальное поле плотности

$$\rho_0(x) = \rho_0 g\left(\frac{x}{\ell}\right), \quad (1.3.7)$$

где  $g(z)$  — непрерывная абсолютно интегрируемая неотрицательная и четная функция, такая что  $g(0) = 1$ . Устремив затем  $\ell \rightarrow \infty$ , найдем искомые выражения для лагранжевых полей скорости и плотности потока в пределе однородной начальной плотности  $\rho_0 = \text{const}$ . Будем, кроме того, считать одномерную Вселенную вначале разбегающейся:  $v_0(y) = Hy$ , где  $H$  — постоянная Хаббла, и найдем время коллапса одномерной Вселенной.

В данном случае, пользуясь четностью функции  $g(z)$ , можно записать входящую в уравнения (1.3.2), (1.3.3) комбинацию масс потока в виде

$$M - 2M(y) = \int_{-y}^y \rho_0(y') dy' = \rho_0 \ell \int_{-y/\ell}^{y/\ell} g(z) dz,$$

демонстрирующем, что поведение скорости потока зависит, по сути, лишь от плотности частиц в интервале  $[-y, y]$  и не зависит от поведения начального поля плотности вне его. Это открывает возможность легко проследить предел к однородной начальной плотности. Действительно, устремив  $\ell$  к бесконечности и заметив, что в силу непрерывности функции  $g(z)$  последний интеграл сходится к  $2y/\ell$ , получим:

$$\lim_{\ell \rightarrow \infty} [M - 2M(y)] = 2\rho_0 y.$$

Подставив предельное значение в правые части соотношений (1.3.2), (1.3.3), найдем поле скорости и закон отображения лагранжевых в эйлеровы координаты для первоначально однородного потока гравитационно взаимодействующих частиц

$$x = y \left(1 - \gamma \rho_0 t^2\right) + v_0(y) t, \quad v = v_0(y) + 2\gamma \rho_0 y t.$$

Соответственно, вытекающее из выражений (1.3.4), (1.3.3) лагранжево поле плотности равно

$$R(y, t) = \frac{\rho_0}{1 + v'_0(y) t - \gamma \rho_0 t^2}.$$

Для однородно расширяющейся Вселенной, когда  $v_0(y) = Hy$ , ее плотность, оставаясь однородной, стремится к бесконечности при  $\tau \rightarrow \tau_n$ , где безразмерное время коллапса равно

$$\tau_n = \delta + \sqrt{1 + \delta^2}, \quad \tau = \sqrt{\gamma\rho_0} t, \quad \delta = \sqrt{H/4\gamma\rho_0}.$$

#### § 4. Упражнения к главе 1

**Задача 1.** Доказать, что в однопоточковом режиме поле  $q(x, t)$  производной по  $x$  решения  $v(x, t)$  уравнения Римана (1.1.2) удовлетворяет неравенству

$$q(x, t) < \frac{1}{t}. \quad (1.4.1)$$

Проиллюстрировать выполнение данного неравенства, построив график зависимости от  $x$  поля  $q(x, t)$  в случае начального условия

$$v_0(x) = a \sin(kx). \quad (1.4.2)$$

**Решение.** Проще всего доказать упомянутое неравенство, опираясь на форму записи решения Римана (1.1.12). Дифференцируя обе части этого соотношения по  $x$ , получаем:

$$q(x, t) = \frac{1}{t} \left( 1 - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right).$$

Поскольку в однопоточковом режиме  $y(x, t)$  — всюду монотонно возрастающая функция, ее производная неотрицательна, выражение в скобке меньше или равно единице, а значит, выполняется указанное в условии задачи неравенство.

Продемонстрируем справедливость неравенства (1.4.1) графиком  $q(x, t)$ . Его удобно построить с помощью параметрического задания функции  $q(x, t)$ , используя в качестве параметра лагранжеву координату  $y$ :

$$x = X(y, t) = y + v_0(y)t, \quad q = Q(y, t).$$

Мы использовали принятое в книге обозначение  $Q(y, t)$  для лагранжева поля, отвечающего эйлерову полю  $q(x, t)$ . Найдем  $Q(y, t)$ , заметив, что имеет место соотношение

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=X(y, t)} = \left( \frac{\partial X(y, t)}{\partial y} \right)^{-1} = \frac{1}{J(y, t)}.$$

Здесь  $J(y, t)$  — якобиан преобразования лагранжевых в эйлеровы координаты (1.1.16). Привлекая явное выражение якобиана (1.1.17), придем к следующим параметрическим уравнениям поля  $q(x, t)$ :

$$x = y + v_0(y)t, \quad q = \frac{v'_0(y)}{1 + v'_0(y)t}. \quad (1.4.3)$$