

О.В. Садовская
В.М. Садовский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ
В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ
СЫПУЧИХ СРЕД



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2008

УДК 517.9, 539.37

ББК 22.251

С 14



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 07-01-07008д*

Садовская О. В., Садовский В. М. **Математическое моделирование в задачах механики сыпучих сред.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 368 с. — ISBN 978-5-9221-0906-2.

Представлены оригинальные результаты в области математического и численного моделирования механического поведения разнопрочных и сыпучих сред. С помощью предлагаемых моделей определялись зоны локализации деформаций. Исследованы процессы распространения упругих и упругопластических волн в разрыхленных средах. Построены модели смешанного типа, описывающие течение сыпучих материалов при наличии застойных зон квазистатического деформирования. Были рассмотрены вопросы численной реализации моделей механики сыпучих сред на многопроцессорных вычислительных системах.

Книга предназначена научным работникам, преподавателям университетов, аспирантам и студентам старших курсов, специализирующимся в области механики деформируемых сред, математического моделирования и смежных областях прикладной и вычислительной математики.

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© О. В. Садовская, В. М. Садовский,
2008

ISBN 978-5-9221-0906-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
Глава 1. Реологические схемы	13
1.1. Сыпучая среда с жесткими частицами	13
Схематическое представление среды с помощью жесткого контакта. Эквивалентные формы определяющих соотношений. Допустимые деформации и допустимые напряжения. Вариационные неравенства. Потенциалы напряжений и деформаций.	
1.2. Упруго-вязкопластические среды	16
Идеальная сыпучая среда с упругими частицами. Диаграмма одноосного деформирования упругопластической среды. Вязкоупругие среды, по-разному сопротивляющиеся растяжению и сжатию. Комбинации реологических свойств.	
1.3. Связные сыпучие среды	23
Реологическая схема разномодульной упругой среды. Разнопрочная среда. Сыпучая среда с вязким трением между частицами. Усложненные реологические модели.	
1.4. Компьютерное моделирование	27
Система уравнений и неравенств для описания схемы общего вида. Корректность реологической модели. Вычислительный алгоритм. Компьютерная система визуального проектирования. Применение системы к расчету ползучести и релаксации напряжений.	

1.5. Модель волокнистого композита	39
Смена полярности жесткого контакта. Реологические схемы материалов, податливых при сжатии. Моделирование однонаправленного волокнистого композита.	
1.6. Пористые материалы	45
Общая реологическая схема пористой среды. Обратимое и необратимое схлопывание пор. Упругие, вязкие и пластические свойства скелета. Расчеты циклического нагружения пористой среды.	
1.7. Реологически сложные среды	52
Способ конструирования определяющих соотношений разнородных сред со сложными свойствами. Диссипация энергии в средах, описываемых реологическими схемами. Неравенство внутренней диссипации в общем случае. Примеры моделей с нестандартными реологическими схемами.	
Глава 2. Математический аппарат	59
2.1. Выпуклые множества и выпуклые функции	59
Определение и критерии выпуклости. Индикаторная функция выпуклого множества. Функция Минковского. Параметризация выпуклых множеств в пространстве тензоров с помощью выпуклых функций, зависящих от инвариантов.	
2.2. Дискретные вариационные неравенства	66
Достаточное условие единственности решения. Случай симметричной матрицы. Эквивалентная задача минимизации квадратичной функции при ограничениях. Теорема существования. Проектор на выпуклое множество. Проекция на конус. Сопряженный конус. Разложение вектора на сумму проекций. Вариационное неравенство для строго монотонного отображения. Коэрцитивность.	
2.3. Субдифференциальное исчисление	77
Теорема отделимости. Субградиент выпуклой функции. Теорема Моро–Рокафеллара. Преобразование Юнга. Инволютивность. Субдифференциальная форма вариационного неравенства.	
2.4. Теорема Куна–Таккера	88
Общая задача выпуклого программирования. Формулировка теоремы Куна–Таккера. Условие Слейтера. Эквивалентная задача определения седловой точки. Теорема Фаркаша. Теорема о минимаксе.	
2.5. Теория двойственности	98
Теорема Хана–Банаха о продолжении линейного функционала. Бесконечномерный вариант теоремы отделимости. Принцип двойственности. Неравенство Корна.	

Глава 3. Пространственные определяющие соотношения . . .	108
3.1. Сыпучая среда с упругими свойствами	108
Определяющие соотношения для среды с упругими частицами в субдифференциальной форме. Неравенство Хаара–Кармана. Потенциалы напряжений и деформаций для разномодульной упругой среды. Предельные варианты.	
3.2. Конус Кулона–Мора	116
Коэффициент внутреннего трения. Угол трения. Конус Кулона–Мора в пространстве главных напряжений. Сечение девиаторной плоскостью. Сопряженный конус. Проектор.	
3.3. Конус Мизеса–Шлейхера	121
Круговой конус Мизеса–Шлейхера. Сопряженный конус. Проектор. Диапазон изменения и варианты определения параметра внутреннего трения. Дилатансия при одноосной и двухосной деформации. Экзотические среды.	
Глава 4. Предельное равновесие разнопрочной среды	130
4.1. Модель разнопрочной среды	130
Дифференциальная и вариационная формулировки модели. Регуляризация. Двойственность. Теоремы существования и единственности обобщенных решений.	
4.2. Статическая и кинематическая теоремы	140
Безопасные и предельные нагрузки. Доказательство статической и кинематической теорем. Формулы для вычисления коэффициентов запаса.	
4.3. Примеры оценок	146
Локализация деформаций в цилиндрическом образце с надрезом. Прямолинейные и криволинейные зоны локализации. Логарифмические спирали. Применение теорем к определению угла естественного откоса массива идеально сыпучей среды. Случай нависающих поверхностей.	
4.4. Вычислительный алгоритм	155
Метод упругих решений. Численная реализация регуляризованной модели с помощью метода конечных элементов. Примеры расчетов локализации деформаций в разнопрочных средах.	
4.5. Плоское деформированное состояние	166
Статически определимые задачи. Исследование типа системы дифференциальных уравнений для описания предельного состояния среды. Метод характеристик. Примеры численных решений.	

Глава 5. Уругопластические волны в разрыхленной среде	177
5.1. Модель уругопластической сыпучей среды	177
Неравенства Хаара–Кармана и Мизеса. Диссипативные потенциалы. Поверхность текучести. Модель динамического деформирования идеальной среды с уругопластическими частицами. Регуляризация. Матричная форма.	
5.2. Априорные оценки решений	183
Уравнение и неравенство Гамильтона–Якоби. Оценки решения краевой задачи в характеристических конусах. Оценки разности двух решений. Непрерывная зависимость от начальных данных. Области зависимости решения.	
5.3. Метод сквозного счета	193
Аппроксимация уравнений и неравенств. Процедура корректировки решения для учета пластических деформаций. Метод расщепления по пространственным переменным. Одномерная ЕНО–схема с реконструкцией решения. Численная реализация граничных условий.	
5.4. Плоские сигнотоны	206
Условия сильного разрыва. Уругие и пластические сигнотоны. Волны пластического уплотнения. Конфигурации разрывов для различных вариантов задания механических параметров среды.	
5.5. Кумулятивное взаимодействие сигнотонов	217
Анализ погрешности численного решения на тестах — точных одномерных решениях с плоскими волнами. Постановка двумерной задачи. Закономерности образования кумулятивного выплеска. Результаты расчетов.	
5.6. Периодические возмущающие нагрузки	221
Образование разрывов сплошности в сыпучей среде. Простейшие точные решения. Сопоставление с результатами расчетов. Численное моделирование “сухого кипения”.	
5.7. Модель моментной уругой среды	230
Кинематика движения с учетом независимых поворотов частиц. Динамические уравнения моментного континуума Коссера. Плоское деформированное состояние. Запись в виде системы, гиперболической по Фридрихсу. Численное исследование автоколебаний в поперечных волнах.	
5.8. Обобщение модели	244
Конусы допустимых напряжений и деформаций. Определяющие соотношения моментной сыпучей среды. Регуляризация. Учет пластической деформации частиц.	

Глава 6. Контактное взаимодействие слоев	249
6.1. Формулировка условий контакта	249
Моделирование движения сыпучей среды при наличии поверхностной скольжения. Ограничения на скорости точек в зоне контакта. Формулировка контактных условий в виде вариационных и квази-вариационных неравенств. Случай деформируемых слоев.	
6.2. Алгоритм корректировки скоростей	260
Вариационное неравенство общего вида. Переход к задаче о неподвижной точке. Доказательство сжимаемости отображения. Сходимость итераций. Схема выбора диагональной последовательности.	
6.3. Результаты расчетов	266
Задача о медленном вдавливании жесткого штампа в упругий слой. Сравнение с классическими решениями. Соударение упругого слоя с шероховатой плоскостью. Бегущая нагрузка на границе упруго-пластического слоя. Взаимодействие двух слоев.	
Глава 7. Параллельные вычислительные алгоритмы	277
7.1. Обобщение метода	277
Модель блочной среды. Условия сопряжения на границах блоков. Аппроксимация неравенств на криволинейной сетке. Построение сеточной области. Алгоритм склейки решений на границах раздела.	
7.2. Особенности программирования в MPI	285
Описание свойств материалов. Структура исходных данных. Алгоритм распределения данных между процессами. Различные варианты разбиения области. Минимизация обменов за счет разбиения. Эффективность распараллеливания.	
7.3. Результаты двумерных расчетов.	293
Оценка эффективности многопроцессорного комплекса программ при решении двумерных задач. Тестирование алгоритма на задаче о прохождении упругих волн через фиктивные границы раздела. Отражение волн сжатия от жесткого включения.	
7.4. Численное решение пространственных задач	297
Взаимодействие волн уплотнения (сигнотонов) в неоднородно разрывной сыпучей среде. Фокусировка и расфокусировка волн при отражении от выпуклой поверхности раздела. Пространственная задача Лэмба для двухслойной среды. Сейсмограммы волн, отраженных от жесткого включения.	

Глава 8. Конечные деформации сыпучей среды	311
8.1. Эффект дилатансии.	311
Дилатансия при малых деформациях сыпучей среды. Учет пластичности частиц. Описание дилатансии с помощью тензоров конечных деформаций Альманси и Коши–Грина. Логарифмический тензор Генки. Учет зависимости параметра внутреннего трения от плотности среды.	
8.2. Основные свойства тензора Генки	320
Лагранжевы и эйлеровы тензоры конечных деформаций. Индифферентность и объективность. Коротационное дифференцирование. Вычисление тензора Генки с помощью интерполяционного члена Эрмита. Тензор спина.	
8.3. Модель вязкой среды с жесткими частицами	327
Формулировка определяющих соотношений. Потенциалы напряжений и деформаций. Упругая регуляризация модели. Условие предельного состояния.	
8.4. Напряжения при сдвиге.	333
Тензоры квазистатических и вязких напряжений. Изменение напряженного состояния в процессе дилатансии среды. Релаксация касательных напряжений.	
8.5. Течение Куэтта	335
Вращательное движение сыпучей среды. Радиус застойной зоны. Определение параметра внутреннего трения и коэффициента вязкости среды через угловую скорость и вращательный момент.	
8.6. Движение по наклонной плоскости	339
Дилатансия сыпучей среды в случае плоской деформации. Напряженное состояние предельного равновесия. Угол внутреннего трения. Влияние вязкости среды.	
8.7. Плоскопараллельное движение	344
Напряжения предельного равновесия поверхностного слоя. Глубина области течения. Определение коэффициентов внутреннего трения и вязкости среды через скорость и касательное напряжение на площадке контакта.	
Список литературы	347

ВВЕДЕНИЕ

Теория сыпучих сред представляет собой один из самых интересных и интенсивно развивающихся разделов механики. В первую очередь потому, что область применения этой теории весьма широка. Это задачи механики геоматериалов — грунтов и горных пород, связанные с оценкой прочности и устойчивости горных выработок, оснований и откосов при проведении проектных инженерно-строительных работ, задачи транспортировки гранулированных материалов горнодобывающей и сельскохозяйственной продукции, задачи проектирования бункеров и хранилищ зерна. Сюда же относятся задачи проектирования производственных химических установок с кипящим зернистым слоем, задачи моделирования схода лавин и т.д.

Несмотря на то, что основы теории были заложены еще на заре развития механики сплошных сред в классических трудах Кулона и Рейнольдса, к настоящему времени она далека от завершения. Ситуация здесь существенно отличается от теории упругости, гидродинамики и газовой динамики, в которых определяющие уравнения были окончательно сформулированы почти два столетия назад, и вполне аналогична теории пластичности, где наряду с имеющимся множеством вариантов частных моделей пока еще нет окончательного решения вопроса об адекватном описании кинематики необратимого деформирования при произвольной величине деформаций [67, 68, 97–100].

Основные трудности связаны с резким различием поведения сыпучих сред в экспериментах на растяжение и сжатие. Этим свойством — свойством разносопротивляемости (разнопрочности) — в той или иной мере обладают практически все известные природные и искусственные материалы. Для некоторых из них несоответствие модулей упругости, пределов текучести или диаграмм ползучести, полученных при растяжении и сжатии, настолько мало, что им целесообразно пренебречь. Однако при изучении знакопеременных деформаций в сыпучих средах такое пренебрежение невозможно. Например, идеальные среды, частицы которых свободно контактируют между собой, при сжатии ведут себя как упругие или упругопластические тела, в зависимости от уровня напряжений, и не сопротивляются растяжению. В связанных средах (грунтах, горных породах) допустимые растягивающие напряжения существенно меньше сжимающих и не

превышают критического значения, обусловленного сцеплением частиц. Для сравнительно широкого круга горных пород отношение пределов прочности на сжатие и растяжение изменяется в диапазоне от 8 до 10, но для некоторых видов достигает 50 и более высоких значений [6]. К тому же механические свойства сыпучих материалов, как правило, зависят от многих побочных факторов, таких, например, как неоднородность по размеру частиц и составу, анизотропия, трещиноватость, влажность и т.п. Это приводит к довольно большим погрешностям экспериментальных измерений феноменологических параметров моделей.

В настоящее время сформировались два класса математических моделей, соответствующие двум различным режимам деформирования сыпучей среды: квазистатическому режиму и режиму быстрых движений [36]. Первый класс описывает поведение плотно упакованной среды при сжимающих нагрузках на основе теории пластического течения с предельным условием Кулона–Мора или Мизеса–Шлейхера. Этим условиям в пространстве тензоров напряжений отвечают не цилиндрические, как в теории идеальной пластичности, а конические области допустимых напряжений. Во втором классе рассматривается разрыхленная среда, которая моделируется как ансамбль большого числа частиц с позиций кинетической теории газов.

Для исследования квазистатического режима деформирования развита теория напряжений в статически определимых задачах, которая применяется в механике грунтов [109]. В наиболее полной форме случай плоской деформации изучен Соколовским [151], осесимметричный случай — Ишлинским [57]. Поля скоростей в таких задачах определяются в соответствии с ассоциированным законом течения, впервые рассмотренным Друккером и Прагером [46]. Мруз и Шиманский [96] показали, что специальный неассоциированный закон дает более точные результаты в задаче о внедрении жесткого штампа в песок. Общий недостаток этих подходов заключается в том, что при разгрузке в кинематических законах теории пластического течения тензор скоростей деформации полагается равным нулю, поэтому деформирование материала возможно только по мере достижения напряжениями предельной поверхности. Отсюда следует, например, что разрыхленная сыпучая среда, напряженное состояние которой соответствует вершине конуса Кулона–Мора или конуса Мизеса–Шлейхера, не может быть сжата гидростатическим давлением, поскольку любому состоянию гидростатического сжатия отвечает внутренняя точка на оси конуса. Это противоречит качественной картине. Кинематические зако-

ны оказываются применимыми на практике только в случае монотонного нагружения. Примерно таким же недостатком обладают определяющие уравнения гипопластичности в приложении к механике грунтов [10, 185, 191, 198], поскольку в них состояние растяжения и состояние сжатия различаются между собой по знаку мгновенной скорости деформации, но не по знаку полной деформации.

Корректные с механической точки зрения уравнения одноосного динамического деформирования сыпучей среды с упругими частицами, представляющие собой предельный вариант уравнений разномодульной упругой среды [2, 91], исследованы Масловым и Мосоловым [90]. Показано, что наряду с разрывами скоростей (ударными волнами) они описывают также разрывы перемещений. Маслов и др. [92] применили эти уравнения к анализу процесса “сухого кипения” — самопроизвольного появления и схлопывания пустот в сыпучей среде. Феноменологические модели пространственного напряженно-деформированного состояния связных грунтов при конечных деформациях предложены Григоряном [41] и Николаевским [108]. Обобщению основных положений теории пластичности для описания динамики и статики сыпучих сред посвящены также работы [9, 27, 54, 181].

Бэгнолд [17] экспериментально установил, что появление сравнительно небольших ненулевых касательных напряжений в разрыхленной сыпучей среде при интенсивном сдвиговом течении вызвано двумя факторами: столкновением частиц, если разрежение среды невелико, и обменом импульсом между различными слоями за счет перемещения частиц в случае более высокой степени разрежения. Пространственная модель быстрых движений предложена Сэвиджем [152], сравнившим решение задачи течения в лотках и каналах с экспериментальными результатами, в частности с результатами Бэгнолда. Гудмен и Коун [42] разработали модель для исследования гравитационных течений сыпучего материала. Неддерман и Тюсюн [105] построили простую кинематическую модель, позволяющую имитировать экспериментальную картину установившегося истечения из воронкообразных бункеров.

В данной монографии разработан принципиально новый подход, в котором определяющие соотношения разнопрочных материалов строятся с помощью реологических схем, включающих в себя специальный элемент — жесткий контакт. Путем комбинации этого элемента с традиционными элементами — упругой пружиной, вязким демпфером и пластическим шарниром — получены оригинальные математические модели механики сы-

пучих сред, учитывающие характерные особенности процесса деформирования. На случай разнопрочных материалов обобщены статическая и кинематическая теоремы теории предельного равновесия. На основе метода конечных элементов разработаны вычислительные алгоритмы, с помощью которых выполнено численное исследование зон локализации деформаций в образцах с надрезами.

В рамках теории малых деформаций исследованы процессы распространения ударных волн сжатия (сигнотонов) в предварительно разрыхленной сыпучей среде, обладающей упругими и пластическими свойствами. Построены точные решения одномерных задач с плоскими волнами. Рассмотрен круг вопросов, связанных с численной реализацией предлагаемых моделей на суперкомпьютерах с параллельной архитектурой. Разработаны комплексы прикладных программ для расчета динамических задач в плоской и пространственной постановках на многопроцессорных вычислительных системах серии МВС, ориентированные на приложение к задачам геофизики (сеймики).

Построена модель смешанного типа, учитывающая застойные зоны квазистатического деформирования в движущемся потоке разрыхленной сыпучей среды. В рамках этой модели получено точное решение, описывающее стационарное вращательное течение Куэтта между коаксиальными цилиндрами. Описано нестационарное лавинообразное движение сыпучей среды по наклонной плоскости. Построено точное решение задачи о стационарном течении слоя, вызванном горизонтальным перемещением тяжелой плиты вдоль его поверхности.

Материалы, представленные в монографии, использовались при чтении специальных курсов в Сибирском федеральном университете. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты 04-01-00267, 07-01-07008), Красноярского краевого фонда науки (грант 14F45), Комплексной Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 17 “Параллельные вычисления на многопроцессорных вычислительных системах”, Программы Президиума РАН № 14 “Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий”, грантов Президента РФ МК-982.2004.1 и Фонда содействия отечественной науке. Авторы считают своим долгом выразить благодарность Б.Д. Аннину, А.А. Буренину, М.А. Гузеву, А.С. Кравчуку, В.Н. Кукуджанову, Н.Ф. Морозову, В.П. Мясникову, А.И. Олейникову, Б.Е. Победре, А.М. Хлудневу и Е.И. Шемякину за обсуждение результатов, составивших основу монографии.

РЕОЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

Традиционный реологический метод дополняется новым элементом — жестким контактом, служащим для учета различного сопротивления материала растяжению и сжатию. Жесткий контакт описывает механические свойства идеальной сыпучей среды с недеформируемыми частицами при одноосном напряженном состоянии. Комбинируя его с упругими, пластическими и вязкими элементами, можно строить реологические модели различного уровня сложности.

1.1. Сыпучая среда с жесткими частицами

Реологический метод является основой феноменологического подхода к описанию напряженно-деформированного состояния сред со сложными механическими свойствами [20, 31, 126]. Не касаясь физической природы процесса деформации, этот метод позволяет строить математические модели, которые обладают удовлетворительной (с точки зрения технических приложений) точностью описания количественных характеристик и имеют хорошую математическую структуру. Как правило, для моделей, полученных с помощью реологического метода, могут быть исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач, достаточно просто строятся эффективные алгоритмы численной реализации. В то же время, используя только традиционные реологические элементы: пружину, имитирующую упругие свойства материала, вязкий демпфер и пластический шарнир, нельзя построить реологическую схему для среды, по-разному сопротивляющейся растяжению и сжатию, или для среды с разными пределами прочности при растяжении и сжатии.

Чтобы это стало возможным, дополним метод новым, четвертым элементом — жестким контактом [143, 144]. Схематически будем изображать его в виде двух соприкасающихся между собой пластин (рис. 1.1). Идеальным материалом, поведение которого при одноосном напряженно-деформированном состоянии соответствует такому элементу, является сыпучая среда с жесткими частицами — система контактирующих между собой

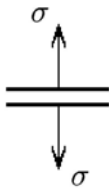


Рис. 1.1. Жесткий контакт

абсолютно жестких шаров. При растяжении системы шары беспрепятственно раскатываются и напряжение в ней оказывается равным нулю. Процесс сжатия после предварительного растяжения происходит при нулевых напряжениях, но только до момента касания шаров, когда система по-прежнему возвращается в начальное положение. Сжимающие деформации недопустимы, а сжимающие напряжения могут быть произвольными, но деформация при этом равна нулю.

Используя общепринятые обозначения, представим определяющие соотношения жесткого контакта в виде системы

$$\sigma \leq 0, \quad \varepsilon \geq 0, \quad \sigma \varepsilon = 0. \quad (1.1)$$

Входящие в эту систему неравенства исключают появление растягивающих напряжений и сжимающих деформаций в сыпучей среде с жесткими частицами, а из уравнения (так называемого условия дополненности) следует, что одна из рассматриваемых величин — напряжение или деформация — обязательно равна нулю.

Необходимо заметить, что определяющие соотношения (1.1) механически некорректны, поскольку они в общем случае не позволяют по заданной деформации однозначно определить действующее напряжение, и наоборот, по заданному напряжению — деформацию. Однако, как будет показано далее, эту некорректность легко устранить путем добавления в реологическую схему среды регуляризирующих элементов.

Подобные системы неравенств с условиями дополненности возникают, например, в математической экономике при решении задач многоцелевой оптимизации (см. [11, 128]). Известно, что такая система может быть приведена к двум эквивалентным между собой вариационным неравенствам (волной отмечены произвольные варьируемые величины):

$$\sigma (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0, \quad \varepsilon, \tilde{\varepsilon} \geq 0; \quad (\tilde{\sigma} - \sigma) \varepsilon \leq 0, \quad \sigma, \tilde{\sigma} \leq 0. \quad (1.2)$$

Действительно, пусть для σ и ε выполняется система (1.1). Тогда либо $\sigma = 0$ и $\varepsilon \geq 0$, либо $\sigma < 0$ и $\varepsilon = 0$. В каждом из этих случаев оба неравенства (1.2) справедливы, так как с одной стороны $\sigma \tilde{\varepsilon} \leq 0$, а с другой стороны $\tilde{\sigma} \varepsilon \leq 0$. Пусть теперь, наоборот, σ и ε удовлетворяют первому из неравенств (1.2). Тогда либо $\varepsilon = 0$ и соотношения (1.1) очевидны, либо $\varepsilon > 0$ и в силу того, что вариация деформации может быть как положительной ($\tilde{\varepsilon} > \varepsilon$),

так и отрицательной ($\varepsilon > \tilde{\varepsilon} \geq 0$), величина σ равна нулю. В этом случае соотношения (1.1) также очевидны. Если σ и ε удовлетворяют не первому, а второму неравенству (1.2), то для них тоже выполняется система (1.1). Это доказывается аналогично.

Преимущество формулировки определяющих соотношений жесткого контакта в терминах вариационных неравенств перед эквивалентной формулировкой (1.1) состоит в том, что эти неравенства допускают обобщение на случай пространственного напряженно-деформированного состояния среды. Такое обобщение дается в третьей главе. Оно осуществляется с помощью тензорных представлений путем введения конусов допустимых деформаций и напряжений. В рассматриваемом сейчас одноосном состоянии соответствующие конусы равны $C = \{\varepsilon \geq 0\}$ и $K = \{\sigma \leq 0\}$. Установим потенциальный характер соотношений, представив (1.2) в следующем виде:

$$\sigma \in \partial\Phi(\varepsilon), \quad \varepsilon \in \partial\Psi(\sigma). \quad (1.3)$$

Здесь Φ и Ψ — потенциалы напряжений и деформаций, символ ∂ служит для обозначения субдифференциала.

В отличие от классических моделей механики деформируемых сред в данном случае потенциалы не являются дифференцируемыми и даже непрерывными. Они определяются через индикаторные функции конусов C и K :

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varepsilon \in C, \\ +\infty, & \text{если } \varepsilon \notin C, \end{cases} \quad \Psi(\sigma) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma \in K, \\ +\infty, & \text{если } \sigma \notin K, \end{cases}$$

для которых в дальнейшем используются общепринятые обозначения $\delta_C(\varepsilon)$ и $\delta_K(\sigma)$. График первой из этих функций образуют две положительные полуоси на плоскости ε, y , а второй — отрицательная и положительная полуоси на плоскости σ, y (рис. 1.2). Оба они могут быть получены предельным переходом с помощью

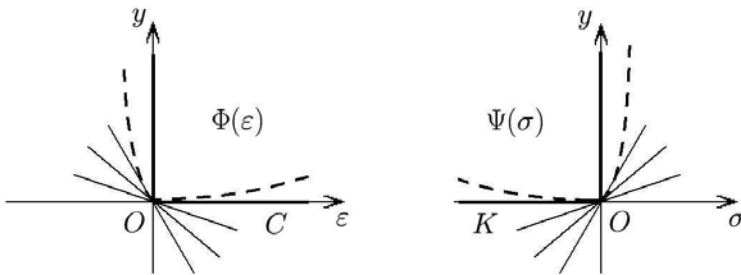


Рис. 1.2. Потенциалы напряжений и деформаций

последовательностей непрерывно-дифференцируемых функций, графики которых условно изображены пунктирными линиями. Сглаженные функции можно рассматривать в качестве потенциалов специальных нелинейно-упругих сред с разным сопротивлением растяжению и сжатию. Для таких сред выполняется нелинейный закон Гука — напряжения выражаются через производные по деформациям и наоборот. В пределе производные, с которыми отождествляются угловые коэффициенты касательных к графикам гладких потенциалов, преобразуются в субдифференциалы индикаторных функций. Для внутренних точек конусов C и K они стремятся к нулю, а для граничных точек ($\varepsilon = 0$ и $\sigma = 0$ соответственно) могут занимать любое предельное положение, изображенное на рисунке веером прямых.

Строгое математическое определение субдифференциала выпуклой функции и некоторые его свойства, необходимые для изучения моделей пространственного деформирования сыпучих сред, приводятся во второй главе. Здесь, основываясь на описанном выше интуитивном представлении, констатируем только, что субдифференциал функции в данной точке — это множество, которое образуют угловые коэффициенты всех прямых, “касающихся” графика функции в этой точке и целиком лежащих под ним. Таким образом, если $\varepsilon \in C$ и $\sigma \in K$, то

$$\partial\delta_C(\varepsilon) = \{\tilde{\sigma} \mid \tilde{\sigma}(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon) \leq 0 \quad \forall \tilde{\varepsilon} \geq 0\},$$

$$\partial\delta_K(\sigma) = \{\tilde{\varepsilon} \mid (\tilde{\sigma} - \sigma)\tilde{\varepsilon} \leq 0 \quad \forall \tilde{\sigma} \leq 0\},$$

а переход от формул (1.2) к (1.3) представляет собой тривиальную замену обозначений с целью более наглядной геометрической интерпретации. Заметим также, что искать более простую, чем (1.3), форму записи феноменологических определяющих соотношений идеальной сыпучей среды с жесткими частицами бессмысленно, поскольку используемые понятия и обозначения предельно точно описывают пороговый характер деформирования материала и, кроме того, являются простым обобщением определяющих уравнений нелинейной теории упругости на случай недифференцируемых потенциалов.

1.2. Упруго-вязкопластические среды

Известный способ регуляризации некорректной механической модели состоит в переходе к более сложной модели, адекватно описывающей неучтенные особенности процесса деформирования среды. Как вариант такого усложнения рассмотрим модель

идеальной сыпучей среды с упругими частицами, реологическая схема которой приведена на рис. 1.3-а. В соответствии с этой схемой деформация равна сумме упругой составляющей, вычисляемой по закону Гука $\varepsilon^e = a \sigma$, где $a > 0$ — модуль упругой податливости пружины, и деформации жесткого контакта $\varepsilon^c = \varepsilon - \varepsilon^e$. Если $\sigma < 0$, то $\varepsilon^c = 0$ и $\varepsilon = a \sigma < 0$ — реализуется процесс упругого сжатия. Если $\sigma = 0$, то $\varepsilon^e = 0$ и $\varepsilon \geq 0$ — происходит разрыхление среды. В общем случае действительное напряжение определяется через деформацию по формуле

$$\sigma = \frac{\varepsilon - |\varepsilon|}{2a}. \quad (1.4)$$

Наоборот, через заданное напряжение деформация выражается, вообще говоря, неоднозначно. Таким образом, модель упругой сыпучей среды некорректна в той же степени, что и модель упругопластической среды, не учитывающая упрочнения [14].

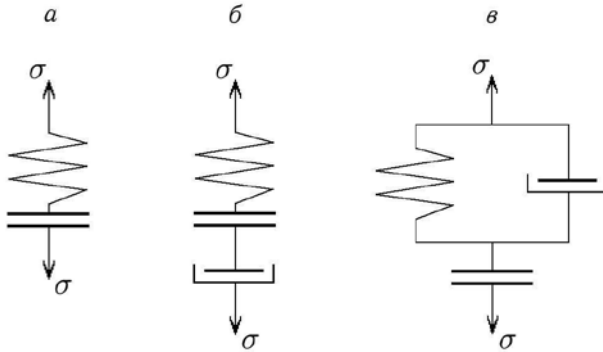


Рис. 1.3. Реологические схемы вязкоупругих сред

Определяющие соотношения можно представить в потенциальной форме (1.3) с потенциалами

$$\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2/(2a), & \text{если } \varepsilon < 0, \\ 0, & \text{если } \varepsilon \geq 0, \end{cases} \quad \Psi(\sigma) = a \sigma^2/2 + \delta_K(\sigma),$$

первый из которых является дифференцируемой функцией, а второй принимает бесконечные значения вне конуса K . Такое выражение для потенциала напряжений получается как решение дифференциального уравнения $\partial\Phi/\partial\varepsilon = \sigma$ с правой частью (1.4), а для потенциала деформаций — как следствие аддитивного представления в виде суммы потенциалов упругой пружины и жесткого контакта.

Реологические схемы, приведенные на рис. 1.3-б и 1.3-в, соответствуют сыпучим средам, которые в процессе сжатия проявляют вязкоупругие свойства. В обоих случаях рассматриваются идеальные (несвязные) материалы. Схема на рис. 1.3-б описывает сжатие с помощью модели Максвелла, а схема на рис. 1.3-в — с помощью модели Кельвина-Фойхта. Для первой из схем по формуле (1.4) с учетом закона Стокса $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}^v$

$$2a\eta \dot{\varepsilon}^v = \varepsilon - \varepsilon^v - |\varepsilon - \varepsilon^v| \leq 0. \quad (1.5)$$

Здесь η — коэффициент вязкости, $\dot{\varepsilon}^v$ — скорость вязкой деформации. Если зависимость напряжения от времени $\sigma(t) \leq 0$ известна, то вязкая составляющая деформации находится путем интегрирования уравнения, соответствующего закону Стокса. Для определения полной деформации служит уравнение (1.5), решение которого, вообще говоря, неоднозначно. Если, наоборот, задана зависимость $\varepsilon(t)$, то, интегрируя дифференциальное уравнение (1.5), можно найти зависимость $\varepsilon^v(t)$ и, таким образом, $\sigma(t)$.

Решение дифференциального уравнения удобно интерпретировать геометрически на плоскости $\varepsilon, \varepsilon^v$. При $\varepsilon \geq \varepsilon^v$ скорость вязкой деформации равна нулю, а при $\varepsilon < \varepsilon^v$ выполняется уравнение $a\eta \dot{\varepsilon}^v = \varepsilon - \varepsilon^v$. Следовательно,

$$\varepsilon^v = \varepsilon_0^v \exp\left(-\frac{t-t_0}{a\eta}\right) + \frac{1}{a\eta} \int_{t_0}^t \varepsilon(t_1) \exp\left(-\frac{t-t_1}{a\eta}\right) dt_1,$$

где ε_0^v и t_0 — постоянные величины. На рис. 1.4 представлена типичная диаграмма деформирования. Процессу растяжения

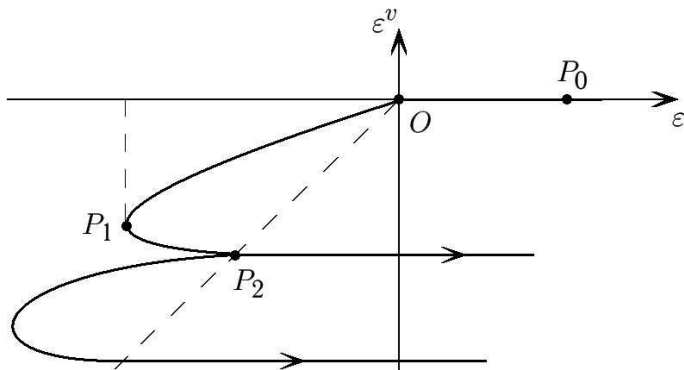


Рис. 1.4. Диаграмма деформирования среды (модель Максвелла)

среды с $\varepsilon_0^v = 0$ отвечает луч OP_0 , процессу сжатия — кривая OP_1P_2 , функционально зависящая от $\varepsilon(t)$. В точке P_1 скорость деформации меняет знак с отрицательного на положительный. В точке P_2 необратимо сжатая среда переходит в разрыхленное состояние. В случае медленного (квазистатического) сжатия кривая OP_1P_2 стремится к прямолинейному отрезку OP_2 луча $\varepsilon = \varepsilon^v \leq 0$, изображенному пунктирной линией. При повторном цикле деформирования подобная кривая начинается с точки P_2 вместо точки O .

Для второй схемы напряжение складывается из двух составляющих — упругой и вязкой: $\sigma = \sigma^e + \sigma^v$, а деформации вязкого и упругого элементов совпадают. Таким образом,

$$\varepsilon = \varepsilon^c + \varepsilon^v, \quad \sigma = \varepsilon^v/a + \eta \dot{\varepsilon}^v. \quad (1.6)$$

При $\varepsilon^c > 0$, когда среда разрыхлена, напряжение равно нулю, поэтому

$$\varepsilon^v = \varepsilon_0^v \exp\left(-\frac{t-t_0}{a\eta}\right). \quad (1.7)$$

При $\varepsilon^c = 0$, когда среда находится в уплотненном состоянии, напряжение $\sigma \leq 0$ через заданную деформацию вычисляется по формуле (1.6) с $\varepsilon^v = \varepsilon$. Типичная диаграмма деформирования приведена на рис. 1.5. Растяжение описывается лучом OP_0 , а сжатие — прямолинейным отрезком OP_1 . В точке P_1 меняется знак скорости деформации $\dot{\varepsilon}$. На отрезке P_1P_2 происходит разгрузка с $\varepsilon^c = 0$ и $\sigma < 0$. Вязкоупругая составляющая деформации релаксирует. Напряжение оказывается равным нулю в некоторой точке P_2 и дальнейший процесс согласуется с уравнением (1.7), которому отвечает кривая $P_2P_3P_4$. В точке P_4 начинается цикл повторного деформирования.

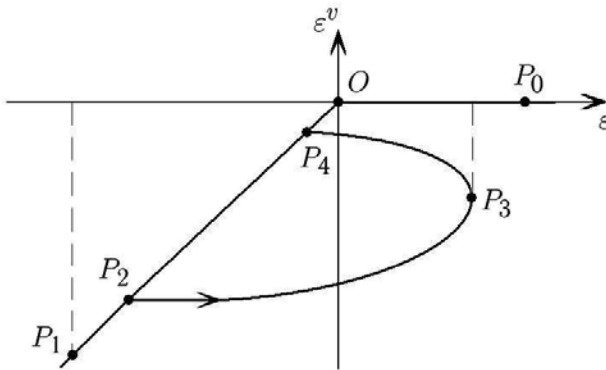


Рис. 1.5. Диаграмма деформирования среды (модель Кельвина–Фойхта)

По заданной зависимости $\sigma(t) \leq 0$ полная деформация однозначно находится только в состоянии вязкоупругого сжатия, когда $\varepsilon^c = 0$,

$$\varepsilon^v = \varepsilon_0^v \exp\left(-\frac{t-t_0}{a\eta}\right) + \frac{1}{\eta} \int_{t_0}^t \sigma(t_1) \exp\left(-\frac{t-t_1}{a\eta}\right) dt_1.$$

В состоянии растяжения из-за неопределенности деформации контакта модель остается некорректной.

На рис. 1.6 изображена реологическая схема идеальной упругопластической сыпучей среды. При растяжении или при сжатии под действием напряжения, абсолютное значение которого не превосходит предела текучести пластического шарнира σ_s , такая среда ведет себя в соответствии со схемой на рис. 1.3-а. По мере достижения предела текучести при сжатии материал переходит в состояние пластического течения. В этом состоянии скорость деформации $\dot{\varepsilon}$ может быть произвольной отрицательной величиной. Если после пластического течения уровень напряжения понижается (происходит разгрузка), но оно по-прежнему остается сжимающим, то скорость деформации выражается через скорость изменения напряжения по линейному закону Гука. Напряжения, превышающие σ_s , недопустимы.



Рис. 1.6. Схема с пластичностью

Полная деформация складывается из трех составляющих, соответствующих трем элементам схемы: $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c + \varepsilon^p$. В силу (1.4)

$$2a\sigma = \varepsilon - \varepsilon^p - |\varepsilon - \varepsilon^p| \leq 0.$$

Учитывая знак напряжения, запишем определяющие соотношения пластического шарнира в виде системы неравенств с условием дополненности

$$\dot{\varepsilon}^p \leq 0, \quad \sigma \geq -\sigma_s, \quad (\sigma + \sigma_s) \dot{\varepsilon}^p = 0.$$

Подобно (1.1) эту систему можно преобразовать к эквивалентным вариационным неравенствам или привести к потенциальной форме. Для этого рассмотрим сначала потенциальное представление закона вязкого течения Стокса:

$$\sigma = \frac{\partial D(\dot{\varepsilon}^v)}{\partial \dot{\varepsilon}^v}, \quad \dot{\varepsilon}^v = \frac{\partial H(\sigma)}{\partial \sigma}.$$

В случае постоянного коэффициента вязкости диссипативные по-

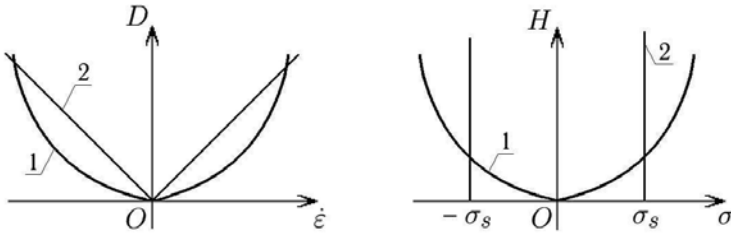


Рис. 1.7. Диссипативные потенциалы

тенциалы $D = \eta(\dot{\varepsilon}^v)^2/2$ и $H = \sigma^2/(2\eta)$ являются квадратичными функциями (кривые 1 на рис. 1.7). Деформируя графики с сохранением выпуклости, можно получить потенциалы для среды с переменным коэффициентом вязкости, зависящим от достигнутого напряжения или мгновенной скорости деформации. Чтобы не нарушить соответствие потенциалов, нужно деформировать графики D и H так, чтобы эти функции выражались друг через друга с помощью касательного преобразования Лежандра

$$H(\sigma) = \sigma \dot{\varepsilon}^v - D(\dot{\varepsilon}^v).$$

Выпуклость необходима для положительности коэффициента вязкости. Предельный вариант выпуклых кривых — кусочно-линейные кривые 2 — соответствует пластическому состоянию материала. Наличие угловых точек на графиках пластических диссипативных потенциалов приводит к необходимости использования субдифференциала, обобщающего понятие производной. Определяющие соотношения $\sigma \in \partial D(\dot{\varepsilon}^p)$ и $\dot{\varepsilon}^p \in \partial H(\sigma)$ в терминах субдифференциалов приводят к двум неравенствам

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) &\leq D(\tilde{\varepsilon}) - D(\dot{\varepsilon}^p) \quad \forall \tilde{\varepsilon}, \\ (\tilde{\sigma} - \sigma)\dot{\varepsilon}^p &\leq 0, \quad |\sigma| \leq \sigma_s, \quad |\tilde{\sigma}| \leq \sigma_s, \end{aligned}$$

эквивалентность которых может быть доказана на основе результатов, приведенных в следующей главе.

Для упругопластической сыпучей среды (рис. 1.6) отсюда следует вариационное неравенство

$$(\tilde{\sigma} - \sigma)(a\dot{\sigma} - \dot{\varepsilon}) \geq 0, \quad |\sigma| \leq \sigma_s, \quad |\tilde{\sigma}| \leq \sigma_s, \quad (1.8)$$

дающее точное описание реологии пластического элемента. Рассмотрим $\sigma - \varepsilon$ диаграммы одноосного деформирования для такой среды (рис. 1.8), которые строятся с помощью (1.8). Процесс активного нагружения на $\sigma - \varepsilon$ диаграмме изображается трехзвенной ломаной, звенья которой соответствуют разрыхлению

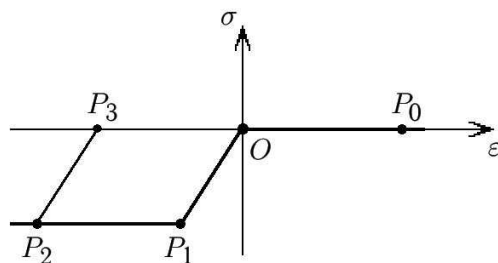


Рис. 1.8. Диаграмма одноосного растяжения–сжатия

среды (звено OP_0), упругому и пластическому сжатию (OP_1 и P_1P_2 соответственно). Разгрузка после пластического течения материала описывается прямолинейным отрезком P_2P_3 , параллельным первоначальному упругому участку диаграммы.

Комбинируя с жестким контактом упругие, пластические и вязкие элементы, можно построить определяющие соотношения для сыпучих сред с более сложной реологией. Примеры усложненных схем рассмотрены на рис. 1.9. Схема на рис. 1.9-а описывает сыпучую среду, деформирование которой при сжимающих напряжениях определяется теорией упругопластического течения с линейным упрочнением, схемы на рис. 1.9-б и 1.9-в соответствуют теории вязкопластического течения Шведова–Бингама.

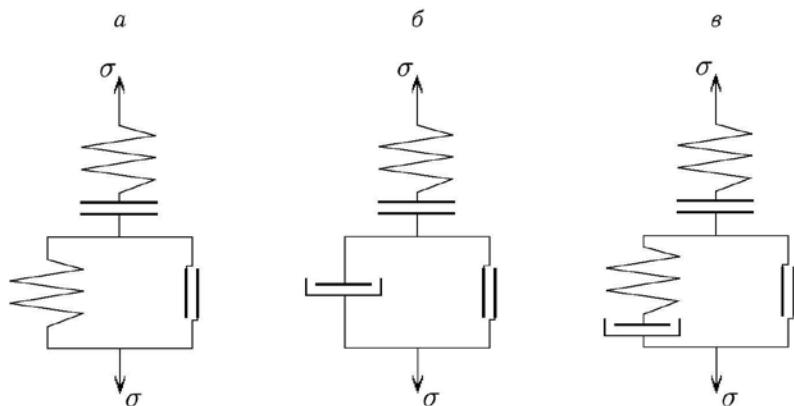


Рис. 1.9. Усложненные реологические схемы

В заключение следует обратить внимание на то, что жесткий контакт, применяемый в рассматриваемом подходе для учета различного сопротивления сыпучей среды растяжению и сжатию, являясь по существу нелинейно упругим элементом, описывает

термодинамически обратимый процесс. Необратимая деформация среды, приводящая к диссипации механической энергии, учитывается, только если в реологической схеме участвуют вязкие или пластические элементы.

1.3. Связные сыпучие среды

Дальнейшее усложнение модели сыпучей среды, приводящее к механически корректным определяющим соотношениям, состоит в феноменологическом описании связей между частицами. Для этого параллельно жесткому контакту в схему включают упругий, вязкий или пластический элементы, в зависимости от свойств связующего. На рис. 1.10–а приведена простейшая реологическая схема, учитывающая упругие связи между абсолютно жесткими частицами. Рис. 1.10–б соответствует модели разномодульной упругой среды, упругие свойства которой при растяжении характеризуются двумя последовательно соединенными пружинами, а при сжатии — только одной из этих пружин. В данном случае определяющие уравнения

$$\varepsilon = \begin{cases} (a + b) \sigma, & \text{если } \sigma \geq 0, \\ a \sigma, & \text{если } \sigma < 0, \end{cases}$$

(a и b — модули упругой податливости) описывают взаимно-однозначную зависимость между напряжением и деформацией.

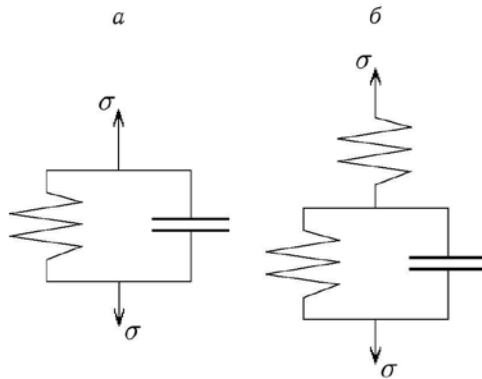


Рис. 1.10. Упругие связи

Вязкие свойства связующего учитываются в реологических схемах на рис. 1.11. Схема, изображенная на рис. 1.11–а, служит для описания связной сыпучей среды с абсолютно жесткими

частицами, в схеме на рис. 1.11–б частицы при сжатии деформируются по упругому закону. Учесть более сложную реологию можно с помощью моделей, рассмотренных в предыдущем параграфе. В соответствии со второй схемой, при $\varepsilon^c = \varepsilon - a\sigma > 0$ деформация среды подчиняется модели Максвелла. Если задана зависимость $\sigma(t)$, то искомая зависимость деформации от времени однозначно определяется путем интегрирования уравнения

$$\dot{\varepsilon} = a\dot{\sigma} + \sigma/\eta, \quad (1.9)$$

решение которого описывает действительный процесс, только при условии, что $\varepsilon \geq a\sigma$. При нарушении этого условия деформация находится из закона Гука как $\varepsilon = a\sigma$. Если, наоборот, задана зависимость $\varepsilon(t)$, то интегрированием уравнения (1.9) определяется функция $\sigma(t)$, описывающая напряженное состояние среды при выполнении этого же условия. В противном случае из закона Гука находится действительное напряжение. Таким образом, модель оказывается корректной для произвольной программы деформирования или нагружения.

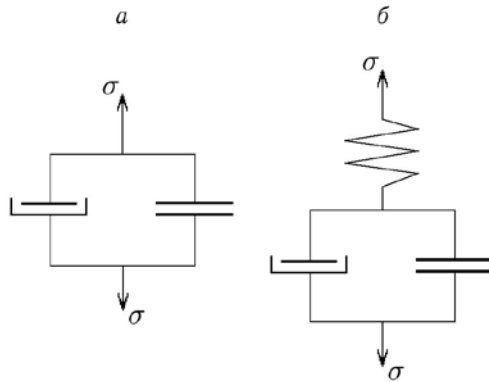


Рис. 1.11. Вязкие связи

На рис. 1.12–а представлена реологическая схема среды из жестких частиц с пластическими связями. Деформирование такой среды возможно, только если абсолютная величина напряжения равна пределу текучести пластического шарнира. Сжатие допускается только после предварительного растяжения. Любая деформация термодинамически необратима. Реологическая схема на рис. 1.12–б наряду с пластическими свойствами связующего учитывает его упругие свойства, а также упругие свойства частиц. Данная модель полностью корректна, поскольку соответствующая ей диаграмма одноосного растяжения–сжатия

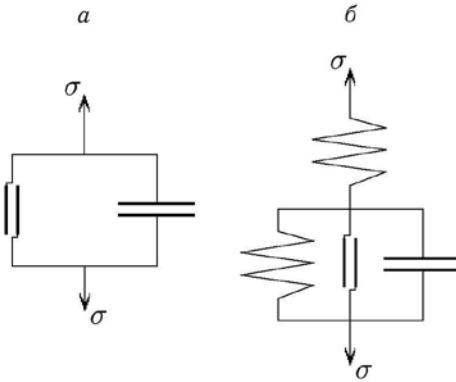


Рис. 1.12. Пластические связи

(рис. 1.13) строго монотонна как на участках активного нагружения OP_0 и OP_1P_2 , так и на участке разгрузки $P_2P_3P_4$. На участках OP_0 и OP_1 происходит упругая деформация среды. Звено P_1P_2 диаграммы описывает процесс пластического растяжения исходного (неупрочненного) материала. В этом случае

$$\varepsilon = a\sigma + b(\sigma - \sigma_s).$$

На участке упругой разгрузки P_2P_3 деформация верхней пружины равна $a\sigma$, а деформация системы параллельных элементов постоянна:

$$\varepsilon^e = \varepsilon^p = \text{const}, \quad \sigma^e = \varepsilon^p/b, \quad \sigma^p = \sigma - \sigma^e.$$

В точке P_3 напряжение пластического шарнира достигает предела текучести при сжатии $-\sigma_s$ и среда переходит в состояние пластического течения (звено P_3P_4), которое описывается уравнением

$$\varepsilon = a\sigma + b(\sigma + \sigma_s).$$

В точке P_4 , расположенной симметрично точке P_1 , контакт смыкается — его деформация $\varepsilon^c = b(\sigma + \sigma_s)$ оказывается равной нулю. Таким образом, при циклическом нагружении в рамках модели с реологической схемой, изображенной на рис. 1.12-б, проис-

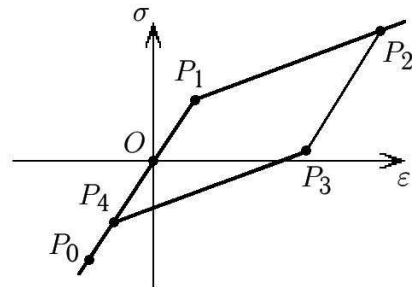


Рис. 1.13. Диаграмма одноосного растяжения-сжатия

ходит трансляционное упрочнение среды, но по мере завершения цикла поверхность текучести принимает исходное положение.

Более сложные реологические свойства частиц и связующего учитываются в схеме из четырех базовых элементов различного типа, приведенной на рис. 1.14. Это едва ли не единственный вариант компоновки четырех элементов, приводящий к механически корректной модели. Судя по данной схеме, в состоянии растяжения, когда $\varepsilon^c = \varepsilon^v - \varepsilon^p > 0$, жесткий контакт и пластический шарнир не оказывают никакого влияния, поэтому поведение материала описывается моделью вязкоупругой среды Максвелла, а в состоянии сжатия, когда контакт смыкается, материал ведет себя как упругая вязкопластическая среда Шведова–Бингама. Полную систему уравнений для определения деформации по заданному напряжению или напряжения по заданной деформации при $\varepsilon^v > \varepsilon^p$ образуют уравнения

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v, \quad \varepsilon^e = a\sigma, \quad \eta\dot{\varepsilon}^v = \sigma.$$

Отсюда следует, что деформация определяется через напряжение путем интегрирования дифференциального уравнения (1.9) относительно ε , а напряжение — через деформацию с помощью того же уравнения относительно σ . Общее решение в данном случае выражается интегралом

$$\sigma = s(t) \equiv \sigma_0 \exp\left(-\frac{t-t_0}{a\eta}\right) + \frac{1}{a} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t-t_1}{a\eta}\right) d\varepsilon(t_1), \quad (1.10)$$

в котором постоянная интегрирования σ_0 задается из условия непрерывности напряжения при смене режима, t_0 — момент перехода к данному режиму. Таким образом, все неизвестные функции оказываются однозначно определенными.

При сжатии возможны различные варианты. Если сжатие производится после предварительного растяжения среды и, следовательно, $\varepsilon^c > 0$, то вплоть до момента смыкания контакта процесс описывается уравнениями (1.9), (1.10). Если же $\varepsilon^c = 0$, то справедливы уравнения

$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v + \sigma^c, \quad \sigma^c = \sigma^p, \quad \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v, \quad \varepsilon^v = \varepsilon^p.$$

В случае $0 > \sigma > -\sigma_s$ (σ_s — предел текучести шарнира) пластический элемент блокирует деформацию вязкого демпфера, вязкое напряжение σ^v оказывается равным нулю. В этом состоянии среда деформируется в соответствии с законом Гука $\varepsilon = a\sigma$. Наконец, в случае $\sigma \leq -\sigma_s$ выполняется равенство $\sigma^p = -\sigma_s$, поэтому

$$\dot{\varepsilon} = a\dot{\sigma} + (\sigma + \sigma_s)/\eta, \quad \sigma = s(t) - \sigma_s. \quad (1.11)$$

Все искомые функции также определяются однозначно.

Если программа нагружения или деформирования содержит чередующиеся участки растяжения и сжатия, то искомые зависимости деформации и, соответственно, напряжения от времени могут быть получены в замкнутой форме с помощью уравнений (1.9), (1.10) и (1.11). Сложность вносит лишь необходимость выбора подходящего режима. Чтобы дать математически строгую постановку задачи в общем случае (для произвольных программ нагружения и деформирования), которая позволит неявным образом решить проблему выбора, дополним уравнения универсальными определяющими соотношениями для жесткого контакта и пластического шарнира в виде вариационных неравенств (1.2) и (1.8):

$$\begin{aligned} \sigma^c (\tilde{\varepsilon} - \varepsilon^c) &\leq 0, & \varepsilon^c &\geq 0, & \tilde{\varepsilon} &\geq 0, \\ (\tilde{\sigma} - \sigma^p) \varepsilon^p &\leq 0, & |\sigma^p| &\leq \sigma_s, & |\tilde{\sigma}| &\leq \sigma_s, \end{aligned}$$

содержащих произвольные допустимые вариации напряжения и деформации. Кроме того, сформулируем начальные условия для вязкого и пластического элементов, для которых определяющие соотношения являются дифференциальными: $\varepsilon^v(0) = \varepsilon^p(0) = 0$.

1.4. Компьютерное моделирование

Для материалов, реологические схемы которых содержат достаточно большое число элементов, построение и исследование определяющих соотношений становится весьма трудоемким. В данном параграфе предлагается вариант решения этой проблемы с привлечением универсальных вычислительных алгоритмов, реализованных в виде компьютерной системы с элементами визуального проектирования [51].

Анализ реологических свойств материалов при одноосном деформировании в общем случае сводится к двум рассмотренным ранее задачам. В первой из них известна программа нагружения (зависимость напряжения σ от времени t), а искомой является зависимость от времени деформации $\varepsilon(t)$. Во второй, наоборот, задается программа деформирования, а зависимость напряжения

от времени подлежит определению. Решение первой задачи в случае постоянного растягивающего или сжимающего напряжения позволяет построить диаграммы ползучести материала. Вторая задача в случае постоянной деформации дает кривые релаксации напряжений.

Если исследуемая схема материала содержит нелинейные элементы (пластические шарниры или жесткие контакты), то естественным образом возникает вопрос о корректности реологической модели. Модель считается корректной, если в ней однозначно разрешимы и устойчивы обе задачи — первая и вторая. К некорректным относится, например, модель идеальной пластичности, реологическая схема которой состоит из одного элемента — пластического шарнира. При заданном напряжении, равном пределу текучести, деформация в рамках этой модели не может быть найдена единственным образом. Вторым примером — модель идеально сыпучей среды с абсолютно твердыми частицами, реологической схемой которой служит жесткий контакт (рис. 1.1). В этом случае деформация определяется неоднозначно при $\sigma = 0$ и, кроме того, напряжение неоднозначно при $\varepsilon = 0$.

Среди множества корректных моделей далее будем рассматривать только модели, позволяющие определить напряжения и деформации всех элементов реологической схемы. Сформулировать в общем случае условия, при выполнении которых модель обладает таким свойством, по-видимому, довольно сложно, поэтому данный вопрос будем в дальнейшем связывать с корректностью применяемого вычислительного алгоритма. Пример корректной в указанном смысле реологической схемы из четырех базовых элементов различного типа приведен на рис. 1.14 предыдущего параграфа.

В общем случае реологическая схема из n элементов разбивается по расположению соединительных узлов на m уровней. Каждый уровень характеризуется деформацией ε_i ($i = 1, \dots, m$). Элементы нумеруются в строго определенном порядке: сначала упругие, затем вязкие, далее жесткие контакты и, наконец, пластические шарниры. Каждому из них соответствует напряжение σ_j ($j = 1, \dots, n$). Пусть U — вектор размерности $N = m + n + 1$, компонентами которого являются эти $m + n$ величин и еще одна величина — искомое значение полной деформации или результирующего напряжения, в зависимости от типа задачи. Реологическая схема общего вида приводит к системе, включающей в себя алгебраические уравнения — условия равновесия и

определяющие уравнения для упругих элементов

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j = f_i(t) \quad (i = 1, \dots, N_1), \quad (1.12)$$

обыкновенные дифференциальные уравнения, характеризующие вязкие элементы,

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{U}_j = U_i \quad (i = N_1 + 1, \dots, N_2), \quad (1.13)$$

а также вариационные неравенства для жестких контактов

$$(\tilde{V}_i - V_i) U_i \leq 0, \quad V_i \equiv \sum_{j=1}^N a_{ij} U_j \geq 0, \quad \tilde{V}_i \geq 0 \quad (1.14)$$

($i = N_2 + 1, \dots, N_3$) и для пластических шарниров

$$(\tilde{U}_i - U_i) \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{U}_j \leq 0, \quad |U_i| \leq U_i^*, \quad |\tilde{U}_i| \leq U_i^* \quad (1.15)$$

($i = N_3 + 1, \dots, N$) при начальных условиях

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j(0) = 0 \quad (i = N_1 + 1, \dots, N_2, N_3 + 1, \dots, N).$$

Входящие в систему (1.12)–(1.15) коэффициенты a_{ij} могут быть равными нулю, ± 1 или значениям модулей упругости и коэффициентов вязкости.

Например, реологическая схема на рис. 1.14 имеет три уровня ($m = 3$, $n = 4$), границы которых проходят через узлы соединений (см. рис. 1.15). Деформации элементов находятся по формулам $\varepsilon^e = \varepsilon_1$, $\varepsilon^v = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, $\varepsilon^p = \varepsilon_2$, $\varepsilon^c = \varepsilon_3$. Элементы нумеруются в следующем порядке: упругий (e), вязкий (v), жесткий контакт (c), пластический шарнир (p). Для этой схемы $N_1 = 5$, $N_2 = 6$, $N_3 = 7$, $N = 8$. В первой из задач вектор неизвестных функций представляется в виде $U = (\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, во вто-

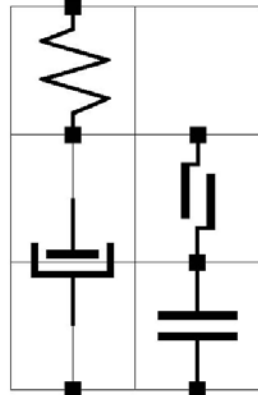


Рис. 1.15. Графическое изображение схемы

рой — вместо полной деформации $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$ в этом векторе повторно участвует напряжение $\sigma = \sigma^e$. Из коэффициентов уравнений и неравенств можно составить прямоугольные матрицы $A \sim a_{ij}$ и $F \sim f_i$. Для первой задачи

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для второй задачи

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta & \eta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} \varepsilon(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, с помощью системы (1.12)–(1.15) можно описать реологическую схему любого уровня сложности. Аппроксимация входящих в эту систему производных приводит к уравнениям и неравенствам

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} U_j^{k+1} = f_i^{k+1}, \quad \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j^{k+1} - U_j^k) = \Delta t U_i^{k+1}, \quad (1.16)$$

$$(\tilde{V}_i - V_i^{k+1}) U_i^{k+1} \leq 0, \quad V_i^{k+1} = \sum_{j=1}^N a_{ij} U_j^{k+1} \geq 0, \quad \tilde{V}_i \geq 0, \quad (1.17)$$

$$(\tilde{U}_i - U_i^{k+1}) \sum_{j=1}^N a_{ij} (U_j^{k+1} - U_j^k) \leq 0, \quad (1.18)$$

$$|U_i^{k+1}| \leq U_i^*, \quad |\tilde{U}_i| \leq U_i^*.$$

Здесь для краткости опущены границы изменения индекса i , которые указаны в соответствующих формулах (1.12)–(1.15).

Повторяя рассуждения, приведенные в первом параграфе при обосновании формулировки определяющих соотношений жестко-

го контакта в виде вариационных неравенств (1.2), нетрудно показать, что неравенство (1.17) эквивалентно альтернативе: либо $V_i^{k+1} = 0$ и, одновременно, $U_i^{k+1} \leq 0$, либо $V_i^{k+1} > 0$ и $U_i^{k+1} = 0$. Аналогично, неравенство (1.18) приводится к выбору одного из трех вариантов:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & |U_i^{k+1}| < U_i^*, \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}(U_j^{k+1} - U_j^k) = 0, \\ \text{ii)} \quad & U_i^{k+1} = U_i^*, \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}(U_j^{k+1} - U_j^k) \geq 0, \\ \text{iii)} \quad & U_i^{k+1} = -U_i^*, \quad \sum_{j=1}^N a_{ij}(U_j^{k+1} - U_j^k) \leq 0. \end{aligned}$$

В первом из них напряжение пластического шарнира ниже предельного уровня, поэтому скорость пластической деформации равна нулю. Во втором напряжение совпадает с пределом текучести при растяжении, следовательно, скорость деформации неотрицательна. В третьем варианте напряжение достигает предела текучести при сжатии, поэтому скорость деформации меньше либо равна нулю. Таким образом, систему (1.16)–(1.18) можно решить численно с помощью алгоритма перебора среди конечного числа возможных вариантов. На каждом шаге такого алгоритма решается линейная система, которая включает в себя уравнения (1.16) и уравнения, отвечающие вариационным неравенствам (1.17), (1.18). Переход к следующему шагу происходит, только если полученное решение не удовлетворяет некоторому ограничению — неравенству. В этом случае соответствующее уравнение заменяется альтернативным. Если же все ограничения выполняются, то процесс перебора заканчивается переходом на следующий временной слой.

Для ускорения счета можно исключить многократное решение системы (1.16). Для этого из уравнений (1.16) и входящих в (1.17) уравнений для V_i^{k+1} определяются все компоненты вектора U , кроме напряжений пластических шарниров. Последние напряжения считаются произвольными величинами. Деформации жестких контактов также остаются неопределенными. Более точно, строится базис пространства решений системы линейных алгебраических уравнений (1.16), (1.17). Размерность этого пространства должна быть равна числу уравнений — такое требование является одним из условий корректности реологической

схемы. На практике это условие легко проверяется — если ранг матрицы, составленной из коэффициентов системы, меньше N_3 , то рассматриваемая схема непригодна.

Далее задача сводится к решению вариационных неравенств (1.17), (1.18) относительно напряжений в пластических шарнирах и деформаций жестких контактов с помощью описанного выше переборного алгоритма, но на каждом шаге этого алгоритма решаются системы уравнений размерности $N - N_2$. Требование существования и единственности решения вариационных неравенств, а также условие сходимости алгоритма накладывает дополнительные ограничения на корректность схемы.

В общем случае вытекающая из (1.16), (1.17) система линейных алгебраических уравнений на $(k + 1)$ -м шаге по времени имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_3} a_{ij} U_j^{k+1} &= f_i^{k+1} - \sum_{j=N_3+1}^N a_{ij} U_j^{k+1} \quad (i = 1, \dots, N_1), \\ \sum_{j=1}^{N_3} \bar{a}_{ij} U_j^{k+1} &= \sum_{j=1}^N a_{ij} U_j^k - \sum_{j=N_3+1}^N a_{ij} U_j^{k+1} \quad (i = N_1 + 1, \dots, N_2), \\ \sum_{j=1}^{N_3} a_{ij} U_j^{k+1} &= V_i^{k+1} - \sum_{j=N_3+1}^N a_{ij} U_j^{k+1} \quad (i = N_2 + 1, \dots, N_3), \end{aligned}$$

где $\bar{a}_{ij} = a_{ij} - \Delta t \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Будем считать, что определитель квадратной матрицы, составленной из коэффициентов в левой части этой системы, отличен от нуля. Таким образом, из системы можно выразить

$$U_i^{k+1} = \sum_{j=N_2+1}^N b_{ij} V_j^{k+1} + g_i^{k+1} \quad (i = 1, \dots, N_3). \quad (1.19)$$

Здесь b_{ij} — коэффициенты, вычисляемые через коэффициенты a_{ij} и обратную матрицу системы; g_j^{k+1} — величины, зависящие от f_j^{k+1} и U_j^k ; $V_j^{k+1} = U_j^{k+1}$ для $j = N_3 + 1, \dots, N$.

После подстановки уравнений (1.19) в неравенства (1.17), (1.18) получим в матричной форме вариационное неравенство с простыми ограничениями (индивидуальными для каждой компоненты вектора неизвестных)

$$(\tilde{V} - V)(CV - Y) \geq 0, \quad V^- \leq V \leq V^+, \quad V^- \leq \tilde{V} \leq V^+, \quad (1.20)$$

где C и Y — квадратная матрица и вектор (нумерация строк и столбцов в них начинается с $N_2 + 1$, а не с 1) из коэффициентов $c_{ij} = -b_{ij}$, $y_i^{k+1} = g_i^{k+1}$ для $i = N_2 + 1, \dots, N_3$ и

$$c_{ij} = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{N_3} a_{il} b_{lj}, & \text{если } j = N_2 + 1, \dots, N_3, \\ -a_{ij} - \sum_{l=1}^{N_3} a_{il} b_{lj}, & \text{если } j = N_3 + 1, \dots, N, \end{cases}$$

$$y_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{N_3} a_{ij} g_j^{k+1} - \sum_{j=1}^N a_{ij} U_j^k$$

для $i = N_3 + 1, \dots, N$. Компоненты вектора V^+ , соответствующие жестким контактам, равны $+\infty$, для пластических элементов $V_i^+ = U_i^*$. Вектор V^- составлен из нулей и отрицательных величин $-U_i^*$, соответственно.

Если матрица C положительно определена, то по теореме существования и единственности, доказательство которой приведено во втором параграфе следующей главы, вариационное неравенство (1.20) однозначно разрешимо. Как показали вычислительные эксперименты с различными реологическими схемами, процесс перебора также оказывается сходящимся. В то же время, для широкого класса схем, в частности для рассмотренной выше схемы из четырех реологических элементов разного типа, матрица C неотрицательно определена, но положительно определенной она не является. В этом случае алгоритм иногда выходит на бесконечно повторяющиеся циклы. Исправить возникающую ситуацию можно за счет добавления к диагональным элементам малого регуляризирующего параметра, что соответствует включению в реологическую схему параллельно пластическим шарнирам и жестким контактам системы упругих элементов малой жесткости. Гарантировать сходимость последовательности решений при стремлении параметра регуляризации к нулю нельзя, однако достаточно просто выполнить апостериорную проверку сходимости, монотонно уменьшая в расчетах значение этого параметра.

Рассмотренный алгоритм реализован в общем виде в среде объектного программирования *Delphy 5*. Входными переменными разработанной компьютерной системы являются значения феноменологических параметров для упругих, вязких и пластических элементов. Исследуемая схема строится средствами визуального проектирования с использованием графических примитивов.

Пример задания конкретной схемы из четырех элементов различного типа приведен на рис. 1.15. На выходе система позволяет получить графики изменения деформаций и напряжений в элементах схемы в зависимости от времени, а также графики полной деформации $\varepsilon(t)$ или результирующего напряжения $\sigma(t)$. Тестирование алгоритма проводилось на решениях, найденных по формулам (1.10), (1.11), и показало, что вычислительная погрешность алгоритма соответствует первому порядку аппроксимации неявной схемы.

Технология работы с системой такова. Чтобы задать новую реологическую схему, необходимо выбрать соответствующий пункт меню или нажать кнопку на панели инструментов. При этом производится запуск редактора схем — программы, манипулирующей с совокупностью средств и объектов, с помощью которых создается произвольная схема. На рабочую область последовательно наносятся реологические элементы с одновременным заданием параметров. Рабочая область — это поле с нанесенной

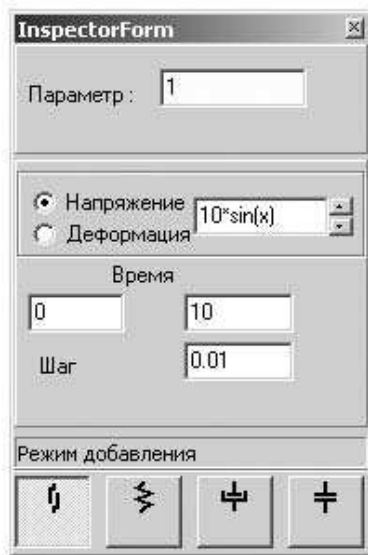


Рис. 1.16. Инспектор объектов

на него сеткой, которая предназначена для точного позиционирования элементов. Для удобства в правом верхнем углу расположен так называемый инспектор объектов (рис. 1.16), предоставляющий множество элементов, которые могут быть помещены в рабочей области. Инспектор объектов имеет ряд редактируемых полей, служащих для изменения параметров и элементов схемы. Таким образом, параметры элементов остаются доступными для редактирования после внесения их в реологическую схему — достаточно указать мышью нужные элементы и изменить соответствующие значения в инспекторе объектов.

По мере размещения на рабочей области элемент может быть растянут или сжат, в соответствии с топологией схемы. Элемент, включенный ошибочно, может быть удален, либо перемещен в другую часть рабочей области посредством выбора соответствующей кнопки на панели инструментов.

ющего пункта контекстного меню, определенного для каждого элемента. Действия над элементами можно также производить с помощью “горячих клавиш”.

Результаты задания реологической схемы сохраняются в файл специального формата, который формируется системой. Кроме того, система самостоятельно отслеживает любые изменения в схеме, и если таковые имелись, то при выходе формулируется диалоговый запрос на их сохранение. Предусмотрен альтернативный способ задания схемы — загрузка из уже существующего файла. При загрузке на экране отображается имя файла и осуществляется проверка его формата на соответствие системе.

После того как схема определена, указывается, какую из двух задач необходимо решить: задачу определения деформации по заданному напряжению, или наоборот, напряжения по заданной деформации. Возможность использования функций, зависящих от времени, реализована с помощью синтаксического анализатора формульных выражений. Синтаксический анализатор представляет собой специальную подпрограмму–функцию, экспортируемую из динамической библиотеки, входящей в состав проекта. В эту подпрограмму в качестве параметров передается строка с формулой и список значений переменных, входящих в формулу, а на выходе получается вычисленное значение функции. В формулу могут входить знаки математических операций: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня, а также все основные элементарные функции.

Далее производится запуск расчетных процедур, реализующих описанный алгоритм. В этих процедурах базис пространства решений системы уравнений (1.16) строится по методу Гаусса с выбором главного элемента. К решению систем уравнений, возникающих при реализации вариационного неравенства (1.20), применяется тот же метод. После выполнения расчетов система предоставляет возможность вывода данных в виде графиков на экран или в выходной файл — текстовый файл с разделителями, который можно использовать для анализа в других графических редакторах.

На рис. 1.17 – 1.23 представлены результаты расчетов, полученные с помощью компьютерной системы для схемы из четырех реологических элементов (рис. 1.14). Это диаграммы изменения деформации от времени для циклического нагружения с постоянной и линейно нарастающей амплитудой напряжения. Всюду на графиках кривые 1 соответствуют зависимости от времени напряжения $\sigma(t)$, кривые 2 — полной деформации $\varepsilon(t)$, кривые 3

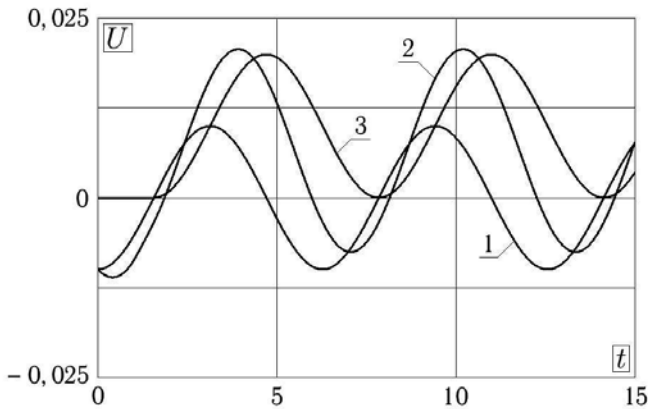


Рис. 1.17. Нагружение с $\sigma(t) = -0,01 \cos t$

— деформации жесткого контакта $\varepsilon^c(t)$. Решение приведено в безразмерных переменных ($\tau = a\eta$ — характерное время релаксации):

$$\bar{t} = t/\tau, \quad \bar{\sigma} = a\sigma, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon, \quad \bar{a} = 1, \quad \bar{\sigma}_s = a\sigma_s, \quad \bar{\eta} = a\eta/\tau = 1.$$

Обезразмеренный предел текучести $\bar{\sigma}_s$ (далее черта над безразмерными величинами всюду опускается) равен 0,005.

Анализ показывает, что при постоянной амплитуде жесткий контакт находится в замкнутом состоянии только в течение начального интервала времени в пределах первого периода нагружения. В дальнейшем среда приспособляется к периодической

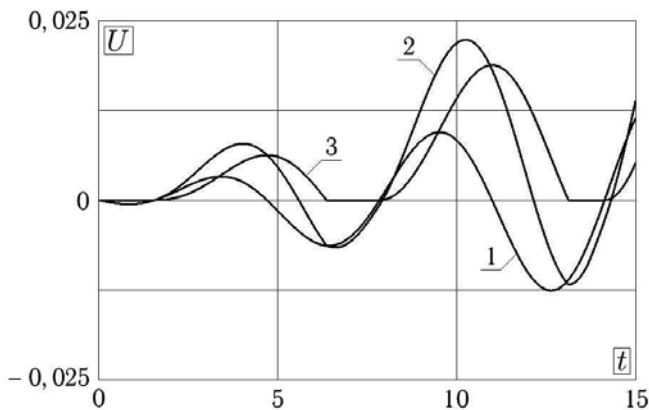


Рис. 1.18. Нагружение с $\sigma(t) = -0,001 t \cos t$