

Басараб М.А.  
Кравченко В.Ф.  
Матвеев В.А.

**Методы  
моделирования и  
цифровая обработка  
сигналов в  
гироскопии**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.95: 531.383

ББК 22.193

Б 27

Басараб М.А., Кравченко В.Ф., Матвеев В.А. **Методы моделирования и цифровая обработка сигналов в гироскопии.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 248 с. — ISBN 978-5-9221-0809-6.

Рассмотрены основные принципы функционирования современных чувствительных элементов инерциальных навигационных систем. Основное внимание уделено вопросам исследования и расчета характеристик волнового твердотельного гироскопа, а также некоторых типов микромеханических и динамически настраиваемых гироскопов как мехатронных чувствительных элементов нового поколения. В задачах моделирования физических процессов, идентификации погрешностей и обработки информации широко использованы современные численные методы аппроксимации на основе теорий  $R$ -функций и атомарных функций, а также методы искусственного интеллекта (генетические алгоритмы, нейронные сети).

Для научных работников, а также аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Рецензент: академик РАН В. И. Пустовойт

ISBN 978-5-9221-0809-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2008

© М. А. Басараб, В. Ф. Кравченко,  
В. А. Матвеев, 2008

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
<b>Глава 1. Особенности функционирования волнового твердотельного гироскопа .....</b>	<b>9</b>
1.1. Принцип действия .....	9
1.2. Кольцевая модель резонатора .....	11
1.3. Оболочечная модель резонатора .....	25
1.4. Дисковая модель ВТГ .....	29
1.5. Системы возбуждения .....	33
<b>Глава 2. Атомарные функции и R-функции в задачах динамики ВТГ .....</b>	<b>37</b>
2.1. Атомарные функции и методы аппроксимации .....	37
2.2. Решение задач динамики упругого кольца с помощью атомарных функций .....	44
2.3. Обратная задача аналитической геометрии. R-функции .....	46
2.4. Расчет функций Рэлея и нахождение коэффициента прецессии осесимметричных оболочек вращения .....	79
<b>Глава 3. Моделирование погрешностей и идентификация неоднородностей .....</b>	<b>89</b>
3.1. Основные типы погрешностей ВТГ .....	89
3.2. Идентификация осей жесткости .....	93
3.3. Глобальные оптимизационные алгоритмы балансировки резонатора ВТГ .....	103
3.4. Моделирование тепловых полей в резонаторе .....	114
<b>Глава 4. Моделирование элементов микромеханических и динамически настраиваемых гироскопов .....</b>	<b>127</b>
4.1. Конструктивные схемы ММВГ и ДНГ .....	127
4.2. Структуры решения краевых задач теории пластинок .....	132
4.3. Моделирование кручения стержневых торсионов .....	136

---

<b>Глава 5. Обработка сигналов в бескарданных инерциальных навигационных системах</b> .....	143
5.1. Схема построения БИНС .....	143
5.2. Навигационный алгоритм .....	146
5.3. Цифровые фильтры на основе АФ и R-функций .....	148
5.4. Калмановская фильтрация на основе АФ .....	166
5.5. Обработка телеметрической информации с помощью кумулянтных кватернионных базисов на основе АФ .....	178
Приложение 1. Метод Бубнова–Галеркина .....	204
Приложение 2. Уравнения общей теории оболочек .....	213
Приложение 3. Теорема Уиттекера–Котельникова–Шеннона и ее обобщения .....	223
Приложение 4. Основные атомарные функции .....	229
Приложение 5. Почти периодические функции .....	231
Приложение 6. Основные понятия теории кватернионов .....	234
Литература .....	237

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время к чувствительным элементам навигационных систем предъявляются все более жесткие требования. Это требует постоянного совершенствования датчиков первичной информации (гироскопов, акселерометров) по таким параметрам как точность, ресурс работы, массогабаритные характеристики, стоимость и т.д. В связи с этим в отечественном и зарубежном приборостроении наряду с совершенствованием конструкций и технологий изготовления существующих гироскопов ведутся работы по созданию приборов, работающих на новых физических принципах.

К одному из таких новых классов гироскопов относятся устройства, носящие обобщенное название “маятник Фуко”. Одним из наиболее современных и перспективных представителей приборов этого типа является волновой твердотельный гироскоп (ВТГ) [1–3], принцип действия которого основан на инертных свойствах стоячих упругих волн, возбужденных во вращающихся осесимметричных оболочках. Этот эффект был теоретически открыт и экспериментально подтвержден Г. Брайаном в 1890 г. при исследовании природы звуковых биений вибрирующей оболочки при вращении ее вокруг оси симметрии [4]. В результате действия сил Кориолиса происходит прецессия стоячих волн как относительно оболочки, так и в инерциальном пространстве. В некотором смысле ВТГ можно рассматривать как дальнейшее развитие осцилляторных гироскопов [5–7], наиболее ранней моделью которых является простейший камертонный гироскоп.

Преимуществами ВТГ являются: высокая точность; малая чувствительность к линейным перегрузкам; малое время готовности, определяемое электроникой; устойчивость к воздействию радиационного излучения; отсутствие в конструкции вращающихся частей; малая потребляемая энергия; возможность работы с перерывами электропитания за счет большой постоянной времени. Спектр применения прибора чрезвычайно широк: от систем автоматического управления наземными объектами до бескарданных инерциальных систем (БИНС), используемых на летательных и космических аппаратах.

В отечественной и зарубежной печати опубликованы десятки статей и ряд монографий, посвященных вопросам проектирования волновых твердотельных гироскопических систем. Помимо других проблем значительное внимание в них уделялось методам математического моделирования физических процессов, происходящих в зависимости от выбранной модели в упругом кольце или осесимметричной оболочке вращения. В качестве основного аппроксимативного аппарата,

как правило, использовались варианты метода осреднения Крылова–Боголюбова–Митропольского [8, 9] в комбинации с методом Бубнова–Галеркина на основе тригонометрического базиса. Вместе с тем, для более полного исследования характеристик резонатора ВТГ указанных средств оказывается недостаточно. Так, при решении задач динамики упругого кольца или упругой оболочки с локальными неоднородностями более эффективным может оказаться применение базисов финитных функций, наиболее известными представителями которых являются полиномиальные  $B$ -сплайны Шенберга [10]. В опубликованных работах по ВТГ, как правило, рассматриваются чувствительные элементы классической геометрии: цилиндрические и полусферические. На практике интерес может представлять исследование ВТГ с резонаторами в виде оболочек вращения более сложной формы. Учет геометрии необходим также при расчете тепловых процессов в ВТГ, существенно влияющих на точностные характеристики прибора.

Отдельный класс задач представляют собой проблемы обработки сигналов в инерциальных навигационных системах на основе ВТГ. Здесь в первую очередь следует отметить вопросы построения эффективных цифровых фильтров, в частности фильтров низких частот и дифференцирующих фильтров, задачи калмановской фильтрации, интерполяции и аппроксимации вращательного движения объектов.

Разнообразие задач, возникающих при моделировании ВТГ, требует привлечения широкого набора средств современной теории аппроксимации и численного анализа. Одними из наиболее универсальных и активно развивающихся в последние годы направлений в данной области являются теории  $R$ -функций и атомарных функций (АФ) [3, 11–16], основы которых были разработаны в 60–70 гг. XX в. академиком В.Л. Рвачевым. Аппарат  $R$ -функций изначально был предназначен для конструирования удовлетворяющих граничным условиям систем базисных функций в вариационных и проекционных методах решения краевых задач в областях сложной формы. Построение данных систем (структур решения краевых задач) основывается на решении обратной задачи аналитической геометрии, т. е. нахождении единого аналитического выражения, описывающего геометрию заданной области.

Атомарные функции, разрабатывавшиеся в рамках метода  $R$ -функций, в настоящее время представляют отдельное самостоятельное направление теории аппроксимации. Как финитные функции, АФ обладают рядом свойств, аналогичных  $B$ -сплайнам. Вместе с тем, АФ являются бесконечно дифференцируемыми решениями определенного класса функционально-дифференциальных уравнений, что выгодно отличает их с точки зрения аппроксимативных свойств и особенностей численной реализации.

Помимо высоких точностных и надежностных характеристик современным и перспективным гироскопическим системам свойственна тенденция к миниатюризации за счет использования микро- и нанотехнологий. При этом осуществляется интеграция как единого целого механических, электрических, электронных и др. компонент системы,

что делает целесообразным рассмотрение ее с общих позиций мехатроники как нового направления науки и техники [17]. В качестве одного из критериев мехатронных систем выступает новое качество, получаемое в результате данной интеграции и придающее устройствам высокую компактность, функциональную гибкость, повышенную надежность. Мехатронным устройствам свойственно синергетическое, т. е. самоорганизующееся, адаптивное по отношению к внешней среде и воздействиям объединение компонентов. При исследовании функционирования мехатронных объектов большое значение имеют проблемы их интеллектуализации с использованием новых технологий управления: экспертных систем, нейронных сетей, систем нечеткой логики. Эти технологии широко используются в задачах обработки информации в гироскопических комплексах ориентации и навигации подвижных объектов [18, 19]. При моделировании физических процессов в элементах мехатронных систем на первый план выходят глобальные методы оптимизации, в частности, на основе эволюционных (генетических) стратегий [20].

Настоящая монография состоит из пяти глав и посвящена использованию неклассических средств теории аппроксимации, а также методов искусственного интеллекта в задачах исследования физических процессов ВТГ и обработки информации БИНС.

В **главе 1** описаны принципы функционирования и некоторые особенности конструкции ВТГ. Основное внимание уделено математическим моделям колебаний резонатора: кольцевой и полусферической. Кратко описаны различные способы возбуждения резонатора.

В **главе 2** приведены сведения по АФ и R-функциям, а также рассмотрены вопросы исследования динамики резонатора ВТГ с их помощью. Предложены новые схемы и структуры реализации метода R-функций, включая нейросетевые алгоритмы. Метод R-функций дает возможность моделирования оболочек вращения с практически произвольной функцией образующей. Расчет коэффициента прецессии при этом сводится к нахождению функций Рэлея оболочки из краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Один из эффективных способов решения данной задачи основан на методе Бубнова–Галеркина с АФ в качестве базисных.

Проблемы, связанные с погрешностями ВТГ и идентификацией его параметров, затронуты в **главе 3**. Внимание уделено решению обратной задачи расчета упругих волн и нахождению осей жесткости неидеального резонатора, плотность материала которого зависит от окружной координаты. Рассмотрены новые способы нахождения параметров балансировки резонатора на основе генетических алгоритмов и алгоритма имитации отжига. Построена математическая модель стационарных и нестационарных тепловых процессов полусферического резонатора ВТГ для вычисления тепловой постоянной времени и тепловой скорости дрейфа. Решение краевой задачи теплопереноса осуществляется методом R-функций. Математические модели сверхпроводящих гироскопов рассматриваются впервые.

Возможные конструктивные схемы осцилляторных гироскопов с распределенными параметрами представлены в **главе 4**. В качестве чувствительного элемента использованы тонкие пластинки произвольного поперечного сечения, заземленные по контуру и совершающие колебания по основной форме. Для расчета собственных колебаний использованы структуры метода R-функций. Методом R-функций исследованы задачи кручения элементов подвеса (торсионов) микромеханических вибрационных гироскопов (ММВГ).

**Глава 5** посвящена некоторым аспектам построения БИНС на основе ВТГ и ММВГ. Рассмотрены две схемы аппаратной реализации БИНС: на основе датчиков угла и на основе интегрирующих гироскопов. Представлены новые алгоритмы синтеза аналоговых и цифровых плосковершинных фильтров низких частот и дифференцирующих фильтров, полученные с использованием R-функций и АФ. Исследуются вопросы калмановской фильтрации применительно к первичной обработке сигналов, методы и алгоритмы кватернионной аппроксимации и интерполяции.

**В приложениях П1–П6** приведены сведения об основных положениях теории упругости твердого тела, теории кватернионов, почти периодических функций, атомарных функций, дано краткое описание метода Бубнова–Галеркина и теоремы Уиттекера–Котельникова–Шеннона.



## ГЛАВА 1

# ОСОБЕННОСТИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ВОЛНОВОГО ТВЕРДОТЕЛЬНОГО ГИРОСКОПА

### 1.1. Принцип действия

В отличие от традиционных гироскопов, принцип работы которых основан на проявлении инертных свойств быстровращающегося ротора, в ВТГ используется новый физический принцип — инертные свойства упругих волн [1–4].

Чувствительным элементом ВТГ (рис. 1.1) является тонкостенный полусферический резонатор *1*, выполненный, например, из кварца. С основанием прибора *3* резонатор жестко связан с помощью ножки *2*.

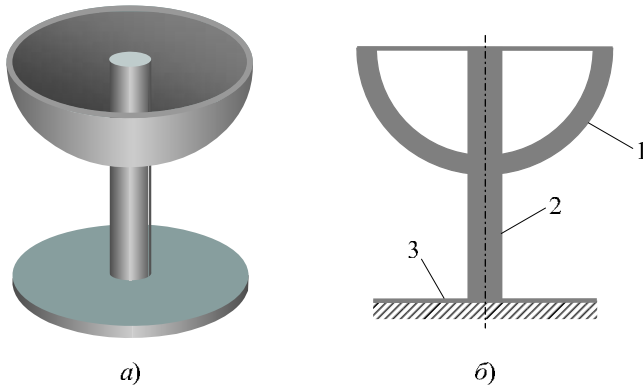


Рис. 1.1. Общий вид (а) и осевое сечение (б) резонатора ВТГ: 1 — оболочка, 2 — ножка, 3 — основание

Для дальнейших рассуждений выделим из тела полусферического резонатора кольцо радиуса  $R$  с конечной площадью поперечного сечения. Будем считать, что центр этого кольца (кольцевого резонатора) вращается как жестко связанный с основанием с угловой скоростью  $\Omega$ .

Предположим, что при вращающемся основании в кольцевом резонаторе возбуждена упругая стоячая волна с номером формы колебания  $k$ . На рис. 1.2, а показана форма стоячей волны для  $k = 2$ , радиусы максимумов которой в системе координат корпуса прибора  $XOY$  расположены под углом  $\varphi_0$ . Оказывается, что если теперь корпус прибора начнет вращение с угловой скоростью  $\Omega$ , то угол ориентации

пучностей будет изменяться по закону

$$\varphi(t) = \varphi_0 - \frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau. \quad (1.1.1)$$

Из выражения (1.1.1) следует, что стоячая волна поворачивается в пространстве на угол, меньший, чем угол поворота корпуса прибора, равный  $\int_0^t \Omega(\tau) d\tau$ , и при известном  $\varphi_0$  (например, при  $\varphi_0 = 0$ ) угол  $\varphi(t)$  служит мерой угла поворота основания:

$$\varphi(t) = -\frac{2}{k^2 + 1} \int_0^t \Omega(\tau) d\tau. \quad (1.1.2)$$

В аналогичных условиях твердое тело с вертикальной осью вращения без трения повернулось бы относительно основания на угол

$$\varphi(t) = -\int_0^t \Omega(\tau) d\tau. \quad (1.1.3)$$

Формулы (1.1.2) и (1.1.3) отличаются лишь масштабными коэффициентами преобразования.

Механизм возникновения прецессии разъясняет рис. 1.2, б. Пучности стоячей волны находятся в точках  $A, B, C, D$ . При вращении полусферы эти точки совершают сложное движение: относительное со скоростями  $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B, \mathbf{V}_C, \mathbf{V}_D$  и переносное с угловой скоростью  $\Omega$ . Появившееся кориолисово ускорение элементов массы в точках  $A, B, C, D$  обозначим  $\mathbf{W}_{KA}, \mathbf{W}_{KB}, \mathbf{W}_{KC}, \mathbf{W}_{KD}$  соответственно. Кориолисовы силы инерции  $\mathbf{P}_{KA}, \mathbf{P}_{KB}, \mathbf{P}_{KC}, \mathbf{P}_{KD}$ , приложенные в точках  $A,$

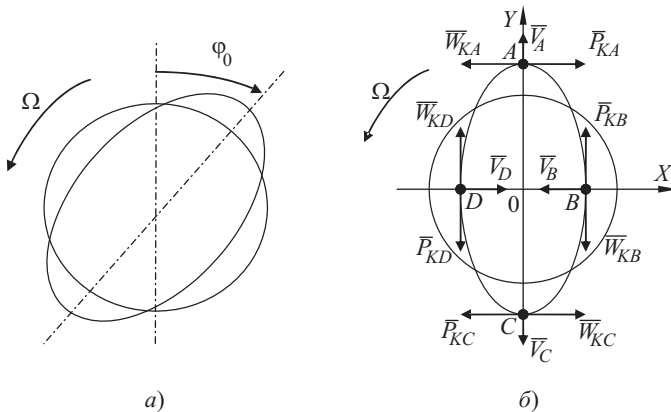


Рис. 1.2. Принцип действия ВТГ:  $a$  — ориентация стоячей волны по второй форме;  $b$  — механизм образования прецессии

$C$  и  $B$ ,  $D$ , направлены в противоположные стороны и создают пары сил. Пары  $\mathbf{P}_{KA}$ ,  $\mathbf{P}_{KC}$  и  $\mathbf{P}_{KB}$ ,  $\mathbf{P}_{KD}$  противоположны по направлению и в сумме дают равнодействующую пару кориолисовых сил инерции, модуль которой пропорционален значению угловой скорости вращения основания. Эта пара сил вызывает прецессию волнового поля (стоячей волны) относительно резонатора и в инерциальном пространстве.

В кольцевом резонаторе одновременно могут существовать несколько форм упругих колебаний, соответствующих  $k = 2, 3, 4, \dots$ . При этом образуется несколько независимых каналов измерения вращения основания с формулами преобразования (1.1.2) и масштабным коэффициентом (коэффициентом прецессии)

$$K = \frac{2}{k^2 + 1}. \quad (1.1.4)$$

Вторая форма колебаний ( $k = 2$ ) обычно используется в качестве рабочей, так как она является низшей собственной формой изгибных колебаний полусферического резонатора (рис. 1.3, в). Нулевая

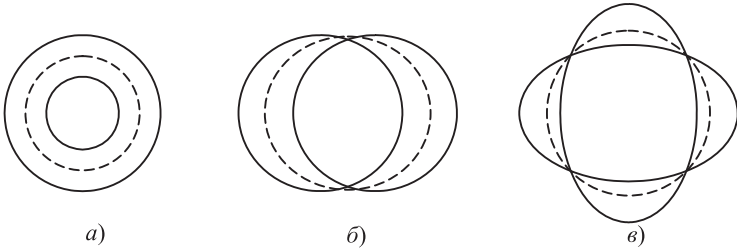


Рис. 1.3. Низшие собственные формы колебаний резонатора:  $a - k = 0$ ;  $b - k = 1$ ;  $в - k = 2$

форма ( $k = 0$ ) соответствует колебаниям растяжения–сжатия и не учитывается при исследовании динамики ВТГ, поскольку деформации растяжения резонатора малы по сравнению с деформациями изгиба (рис. 1.3,  $a$ ). Первая форма ( $k = 1$ ) соответствует перемещению резонатора как твердого тела, ее необходимо учитывать при решении уравнений движения ВТГ с учетом деформации ножки резонатора (рис. 1.3,  $b$ ).

## 1.2. Кольцевая модель резонатора

**Геометрия и кинематика кольцевого резонатора.** Рассмотрим прежде всего основные геометрические соотношения для элементов кольцевого резонатора, образованных на малом угле  $\Delta\varphi$  при произвольном угле  $\varphi$  [1, 2, 21].

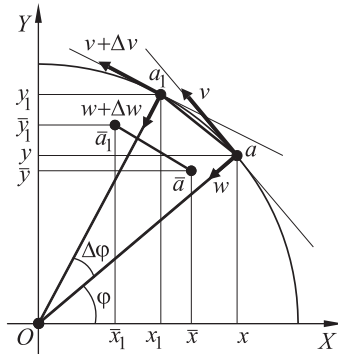


Рис. 1.4. Геометрия кольцевого резонатора

Пусть в недеформированном состоянии элемент резонатора представлен отрезком  $aa_1$  (рис. 1.4). Координаты начала и конца этого отрезка в системе координат корпуса  $XOY$  имеют значения

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & y &= R \sin \varphi; \\ x_1 &= R \cos(\varphi + \Delta\varphi), & y_1 &= R \sin(\varphi + \Delta\varphi). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

Длина малого отрезка осевой линии элемента  $aa_1$  вычисляется по формуле

$$\Delta s = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}. \quad (1.2.2)$$

Подставляя в последнее уравнение значения координат (1.2.1) для малого угла  $\Delta\varphi$  приближенно находим

$$\Delta s \approx R\Delta\varphi. \quad (1.2.3)$$

При наличии деформаций резонатора его элемент  $aa_1$  примет положение  $\bar{a}\bar{a}_1$ . При этом начало отрезка имеет положительные перемещения деформации по касательной и нормали к осевой линии  $v$  и  $w$ , а конец — перемещения  $v + \Delta v$  и  $w + \Delta w$ . Координаты начала и конца отрезка  $\bar{a}\bar{a}_1$  и его длина вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{x} &= R \cos \varphi - v \sin \varphi - w \cos \varphi, \\ \bar{y} &= R \sin \varphi + v \cos \varphi - w \sin \varphi, \\ \bar{x}_1 &= R \cos(\varphi + \Delta\varphi) - (v + \Delta v) \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \\ &\quad - (w + \Delta w) \cos(\varphi + \Delta\varphi), \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

$$\bar{y}_1 = R \sin(\varphi + \Delta\varphi) + (v + \Delta v) \cos(\varphi + \Delta\varphi) - (w + \Delta w) \sin(\varphi + \Delta\varphi);$$

$$\Delta s = \sqrt{(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y})^2}. \quad (1.2.5)$$

Принимая во внимание, что при  $\Delta\varphi \rightarrow 0$

$$\Delta v \approx v' \Delta\varphi, \quad \Delta w \approx w' \Delta\varphi, \quad \cos \Delta\varphi \approx 1, \quad \sin \Delta\varphi \approx \Delta\varphi,$$

из формул (1.2.4) находим

$$\bar{\Delta s} \approx \Delta\varphi \sqrt{(R + v' - w)^2 + (v + w')^2}. \quad (1.2.6)$$

В выражении (1.2.6) и везде далее штрихами обозначаются производные по углу  $\varphi$ , а координаты  $v$  и  $w$  принимаются за обобщенные координаты кольцевого резонатора.

В дальнейшем будем исходить из гипотезы нерастяжимости средней линии резонатора при его деформации, что соответствует выполнению условия

$$\Delta s = \overline{\Delta s} \quad (1.2.7)$$

или, с учетом (1.2.3), (1.2.6),

$$(R + v' - w)^2 + (v + w')^2 = R^2. \quad (1.2.8)$$

Линеаризация условия нерастяжимости (1.2.7) приводит к соотношению

$$v' = w. \quad (1.2.9)$$

При деформации резонатора, происходящей в плоскости окружности его средней линии, в каждой его точке происходит поворот касательной на угол

$$\psi = \psi_1 + \psi_2, \quad (1.2.10)$$

где угол  $\psi_1$  — поворот касательной из-за тангенциальной деформации, связанный с перемещением сечения на  $v$ ; угол  $\psi_2$  — поворот касательной из-за радиальной деформации, связанный с различием перемещения концов малого отрезка длины  $R\Delta\varphi$  в радиальном направлении.

Для малых значений углов  $\psi_1, \psi_2$  получаем

$$\psi_1 \approx \frac{v}{R}, \quad \psi_2 \approx \frac{1}{R} w'.$$

Тогда (1.2.10) примет вид

$$\psi = \frac{1}{R}(v + w'). \quad (1.2.11)$$

Именно этот угол поворота касательной является источником образования упругого момента в поперечном сечении кольца при его деформации стоячими волнами.

Для дальнейшего исследования важно определить основные кинематические зависимости для произвольной точки на осевой средней линии кольцевого резонатора при его вращении с переносной скоростью  $\Omega$  и относительных скоростях, вносимых деформацией  $\dot{v}, \dot{w}$ . Определяя тангенциальную  $v_{\parallel}$  и радиальную  $v_{\perp}$  составляющие абсолютной точки на средней линии резонатора для малых значений  $v$  и  $w$ , получаем

$$\begin{aligned} v_{\parallel} &= \dot{v} + \Omega(R - w), \\ v_{\perp} &= \dot{w} + \Omega v. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

**Динамика кольцевого резонатора.** Для вывода уравнений динамики кольцевого резонатора воспользуемся методом Лагранжа. Поскольку обобщенные координаты резонатора  $v$  и  $w$  являются функциями двух независимых переменных  $t$  и  $\varphi$ , то необходимо прежде

всего определить сами уравнения Лагранжа. Для этого рассмотрим структуру кинетической и потенциальной энергии кольца, плотности которых (значения на единицу угла) определяются выражениями

$$T = \frac{1}{2} \rho S (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \frac{1}{2} \rho S [(\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2], \quad (1.2.13)$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2} k^2,$$

где  $\rho$  — плотность материала кольца;  $S$  — площадь поперечного сечения кольца;  $R$  — радиус средней нейтральной линии кольца;  $E$  — модуль упругости материала;  $J$  — момент инерции поперечного сечения кольца относительно нейтральной оси;  $k$  — изменение кривизны нейтрального слоя кольца.

С учетом (1.2.11)

$$k = \frac{1}{R} \psi' = \frac{1}{R^2} (v' + w''), \quad (1.2.14)$$

$$\Pi = \frac{EJ}{2R^4} (v' + w'')^2. \quad (1.2.15)$$

Удельный лагранжиан системы представляется выражением

$$L = \frac{T - \Pi}{\rho S} = \left[ (\dot{v} + \Omega R - \Omega w)^2 + (\dot{w} + \Omega v)^2 - \kappa^2 (v' + w'')^2 \right], \quad (1.2.16)$$

где

$$\kappa^2 = \frac{EJ}{\rho S R^4}.$$

Из функции Лагранжа и уравнения связи (1.2.8) сформируем следующий двойной интеграл с фиксированными пределами:

$$I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} [L(v, w, \dot{v}, \dot{w}, v', w'') + \lambda(t, \varphi) f(v', w)] dt d\varphi, \quad (1.2.17)$$

в котором  $\lambda(t, \varphi)$  — неопределенный множитель Лагранжа;  $f(v', w) = v' - w = 0$  — уравнение связи (условие нерастяжимости средней линии кольца).

В соответствии с принципом Гамильтона реальное движение системы из заданного начального состояния  $(\varphi_1, t_1)$  в фиксированное конечное состояние  $(\varphi_2, t_2)$  проходит таким образом, что интеграл (1.2.17) имеет минимальное значение. Обобщенными координатами системы являются перемещения  $v, w$ ; поэтому минимум интеграла (1.2.17) по вариациям этих переменных соответствует условию

$$\delta I(\delta v, \delta w) = 0,$$

где  $\delta$  — символ приращения функции или переменной. В развернутом виде из последнего выражения имеем

$$\delta I = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial L}{\partial v} \delta v + \frac{\partial L}{\partial w} \delta w + \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \delta \dot{v} + \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} \delta \dot{w} + \frac{\partial L}{\partial v'} \delta v' + \frac{\partial L}{\partial w''} \delta w'' + \right. \\ \left. + \lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \delta v' + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} \delta w \right] dt d\varphi = 0. \quad (1.2.18)$$

Преобразуя уравнение (1.2.18) с использованием правила интегрирования по частям и принимая во внимание, что вариации  $\delta v$ ,  $\delta w$  в фиксированных начальной и конечной точках равны нулю, получаем

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{d}{d\varphi} \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} \right] \delta v + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{d\varphi} \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) \right] \delta w \right\} dt d\varphi = 0.$$

Последнее условие выполняется тогда, когда выражения под интегралом, стоящие сомножителями при превращениях  $\delta v$ ,  $\delta w$ , обращаются в нуль. В результате получаем следующие уравнения Лагранжа упругого кольцевого резонатора:

$$\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial L}{\partial v'} - \frac{d}{d\varphi} \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial v'} \right) + \lambda \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (1.2.19) \\ \frac{\partial L}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{w}} + \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial L}{\partial w''} + \lambda \frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{d\varphi} \left( \lambda \frac{\partial f}{\partial w'} \right) = 0.$$

Подставляя в уравнения (1.2.19) функцию Лагранжа (1.2.16) и функцию связи (1.2.8), находим

$$\ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \Omega^2 v - \kappa^2(w''' + v'') + \\ + \frac{d}{d\varphi} [\lambda(R + v' - w)] - \lambda(w' + v) = 0, \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v + (R - w)\Omega^2 + \kappa^2(w^{IV} + v''') + \\ + \frac{d}{d\varphi} [\lambda(v + w')] + \lambda(R + v' - w) = 0. \quad (1.2.20)$$

Здесь через  $(\dot{\phantom{x}})$  обозначена производная по времени.

Уравнения (1.2.20) совместно с уравнением связи (1.2.8) полностью описывают собственное движение кольцевого резонатора, вращающегося с абсолютной угловой скоростью  $\Omega$ . Уравнения (1.2.20) являются нелинейными, однако основной характер движения кольцевого резонатора достаточно полно характеризуется их главными линейными

частями. Для линеаризации (1.2.20) представим множитель Лагранжа выражением

$$\lambda = \lambda_0 + \lambda_1,$$

в котором  $\lambda_0$  не зависит от переменных  $v, w$ , а  $\lambda_1 = \lambda_1(t, \varphi) \rightarrow 0$  при  $v, w \rightarrow 0$ . Тогда из второго уравнения системы (1.2.20) находим

$$\begin{aligned} \ddot{v} - 2\Omega\dot{w} + (R - w)\dot{\Omega} - \kappa^2(w'''' + v'') + R\lambda_1' + \Omega^2 w' &= 0, \\ \ddot{w} + 2\Omega\dot{v} + \dot{\Omega}v - 2\Omega^2 w + \kappa^2(w^{IV} + v''') + \lambda_1 R - \Omega^2 w'' &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.21)$$

Продифференцируем 2-е уравнение по  $\varphi$  и вычтем из 1-го. Эту разность продифференцируем еще раз по  $\varphi$  и исключим  $v$  с помощью условия связи (1.2.8). В итоге получим

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + 2\dot{\Omega}w' + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') - \Omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0. \quad (1.2.22)$$

Таким образом, вместо системы уравнений (1.2.21) получили однородное дифференциальное уравнение относительно переменной  $w$ , характеризующей деформации упругого кольца в радиальном направлении.

Для дальнейшего анализа движения кольцевого резонатора удобно перейти к безразмерному времени  $\tau = \kappa t$  и безразмерной угловой скорости вращения основания  $\omega = \Omega/\kappa$ :

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + 2\dot{\omega}w' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' - \omega^2(w^{IV} + 3w'') = 0, \quad (1.2.23)$$

где временные производные вычислены по безразмерному времени  $\tau$ .

Для однозначного решения уравнение (1.2.23) необходимо дополнить начальными условиями и условиями периодичности по окружному углу  $\varphi$ , например,

$$\begin{aligned} w(\varphi, 0) &= a_0, \quad \dot{w}(\varphi, 0) = 0; \\ w^{(n)}(0, t) &= w^{(n)}(2\pi, t), \quad n = \overline{0, 5}. \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

Из уравнения (1.2.23) следует, что угловые скорость  $\omega$  и ускорение  $\dot{\omega}$  вращения основания входят в него в качестве переменных во времени коэффициентов. Поэтому само по себе вращение основания не может привести к образованию упругих колебаний кольцевого резонатора. Однако при возбуждении в резонаторе упругих волн каким-либо внешним воздействием их дальнейшая динамика оказывается зависимой от вращения основания, что и используется в данном типе инерциальных чувствительных элементов вращения.

Далее будет рассматриваться случай, когда величины  $\Omega^2$ ,  $\omega^2$ ,  $\dot{\Omega}$ ,  $\dot{\omega}$  малы и в уравнениях (1.2.22), (1.2.23) ими можно пренебречь.

**Решение уравнения движения кольцевого резонатора.** Решение уравнения (1.2.23) будем искать в форме, позволяющей установить параметры стоячей волны в кольцевом резонаторе. Такому решению соответствует совокупность независимых друг от друга функций типа

$$w(\varphi, \tau) = a(\tau) \cos [2(\varphi - \varphi_0) + \alpha(\tau)], \quad (1.2.25)$$



где  $a(\tau)$  — перемещение стоячей волны в радиальном направлении;  $\alpha(\tau)$  — круговая эволюция стоячей волны в пространстве.

Подставляя (1.2.25) в (1.2.23), получим

$$- \left[ 5\ddot{a} + (36 + 4\omega^2 + 8\omega\dot{\alpha} - 5\dot{\alpha}^2)a \right] \cos \beta + \\ + [(10\dot{\alpha} - 8\omega)\dot{a} + (5\ddot{\alpha} - 4\dot{\omega})a] \sin \beta = 0, \quad (1.2.26)$$

где  $\beta = 2(\varphi - \varphi_0) + \alpha$ .

Равенство (1.2.26) выполняется, когда

$$2\dot{a}(5\dot{\alpha} - 4\omega) + a(5\ddot{\alpha} - 4\dot{\omega}) = 0$$

или

$$\alpha(\tau) = \frac{4}{5} \int_0^\tau \omega(s) ds. \quad (1.2.27)$$

Тогда амплитуда  $a(\tau)$  находится из решения уравнения

$$5\ddot{a} + \left( 36 + \frac{36}{5} \omega^2 \right) a = 0. \quad (1.2.28)$$

Рассмотрим ряд частных случаев решения уравнения (1.2.28). При отсутствии вращения основания ( $\omega = 0$ ) получим уравнение с постоянными коэффициентами

$$5\ddot{a} + 36a = 0, \quad (1.2.29)$$

которое при начальных условиях

$$a(0) = a_0, \quad \dot{a}(0) = 0$$

имеет решение

$$a(\tau) = a_0 \cos \frac{6}{\sqrt{5}} \tau, \quad (1.2.30)$$

где  $\mu_0 = 6/\sqrt{5}$  — безразмерная частота собственных упругих колебаний невращающегося резонатора. В размерном виде частота колебаний стоячей волны определяется как

$$\nu_0 = \kappa\mu_0 = 6 \sqrt{\frac{EJ}{5\rho S R^4}}.$$

Подставляя формулы (1.2.27), (1.2.30) в выражение (1.2.25) и принимая для невращающегося основания  $\alpha(\tau) = 0$ , получаем

$$w(\varphi, \tau) = a_0 \cos \mu_0 \tau \cos [2(\varphi - \varphi_0)]. \quad (1.2.31)$$

Из решения (1.2.31) видно, что пучности стоячих волн имеют место при углах

$$\varphi_n = \varphi_0 + (m - 1)\pi, \quad m = 1, 2,$$

где  $\varphi_0$  — начальный угол, соответствующий направлению возбуждения исходных колебаний.

При вращении основания с постоянной угловой скоростью  $\omega = \omega_0 = \text{const}$  решение (1.2.23) принимает вид

$$w(\varphi, \tau) = a(\tau) \cos \left[ 2(\varphi - \varphi_0) + \frac{4}{5} \omega_0 \tau \right], \quad (1.2.32)$$

где

$$a(\tau) = a_0 \cos \mu \tau.$$

Из (1.2.28) следует

$$\mu = \sqrt{\mu_0^2 + \frac{36}{25} \omega_0^2}.$$

Из решения (1.2.32) следует, что постоянная скорости вращения основания изменяет как собственную частоту колебаний основания  $\mu$ , так и пространственное положение стоячей волны. Поэтому измерение частот спектра колебаний стоячих волн может дать информацию о вращении основания. Однако основным измерительным каналом следует считать измерение положения пучностей стоячей волны по отношению к корпусу прибора. Из (1.2.32) следует также, что пучности колебаний имеют место при

$$\cos \left[ 2(\varphi - \varphi_0) + \frac{4}{5} \omega_0 \tau \right] = 1,$$

т. е.

$$\varphi_{\text{п}} = \varphi_0 + (m - 1)\pi - \frac{2}{5} \omega_0 \tau, \quad m = 1, 2. \quad (1.2.33)$$

Измеряя в системе координат корпуса прибора угол  $\varphi$ , получаем информацию о скорости вращения основания  $\omega_0$  или об угле поворота основания  $\alpha_0 = \omega_0 \tau$ .

Полезно отметить, что по отношению к инерциальному пространству стоячие волны поворачиваются со скоростями

$$\dot{\varphi}_{\text{п}}(\tau) = \omega_0 - \frac{2}{5} \omega_0 = \frac{3}{5} \omega_0. \quad (1.2.34)$$

Формула (1.2.34) отражает свойство инерционности стоячих волн в резонаторе, которые поворачиваются в инерциальном пространстве со скоростью, в 0,6 раз меньшей скорости поворота основания.

При произвольном вращении основания ( $\omega(\tau) \neq \text{const}$ ) функция  $\alpha(\tau)$ , входящая в решение (1.2.25), определяется формулой (1.2.27). Таким образом, и в этом случае сохраняется возможность измерения вращения по положению стоячей волны по углу

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + (m - 1)\pi - \frac{2}{5} \int_0^{\tau} \omega(s) ds. \quad (1.2.35)$$

При этом характер функции  $\alpha(\tau)$  определяется решением линейного нестационарного уравнения (1.2.23), многие частные случаи которого достаточно подробно рассмотрены в литературе [2].

*Решение уравнений динамики методом Бубнова–Галеркина.* Рассмотрим метод Бубнова–Галеркина (см. Приложение 1) применительно

к решению уравнения свободных колебаний идеального вращающегося нерастяжимого кольца

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') = 0. \quad (1.2.36)$$

Уравнение (1.2.36) — 6-го порядка относительно пространственных переменных и 2-го порядка относительно времени. Следовательно, необходимо задать 6 граничных условий и 2 начальных. Считаем, что фаза колебаний нас не интересует, поэтому зададимся лишь граничными условиями. Очевидно, что для случая кольца ими являются 6 условий периодичности (1.2.24). Как известно, этим условиям удовлетворяют функции тригонометрического базиса

$$\{1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots, \cos n\varphi, \sin n\varphi, \dots\}. \quad (1.2.37)$$

Рассмотрим колебания по второй (основной) форме. В этом случае в системе (1.2.37) следует оставить лишь две функции:  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$ . Тогда разложение искомой функции  $w$  в ряд имеет вид

$$w(\varphi, t) = p(t) \cos 2\varphi + q(t) \sin 2\varphi, \quad (1.2.38)$$

где  $p(t)$ ,  $q(t)$  — неизвестные коэффициенты, зависящие от времени.

Согласно методу Бубнова–Галеркина следует приравнять нулю скалярные произведения (1.2.38) на функции пространственного базиса  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$ , т. е.

$$\int_0^{2\pi} \left[ \ddot{w}'' - \ddot{w} + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') \right] \cos 2\varphi d\varphi = 0, \quad (1.2.39)$$

$$\int_0^{2\pi} \left[ \ddot{w}'' - \ddot{w} + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') \right] \sin 2\varphi d\varphi = 0.$$

Подставляя в (1.2.39) вместо  $w$  выражение (1.2.38), после несложных преобразований и интегрирования получаем систему

$$\begin{cases} \ddot{p} + \frac{36\kappa^2}{5} p = 0, \\ \ddot{q} + \frac{36\kappa^2}{5} q = 0. \end{cases} \quad (1.2.40)$$

Данная система определяет два гармонических осциллятора с одинаковой собственной частотой

$$\omega_0 = 6\kappa/\sqrt{5}.$$

Приближенное решение имеет вид

$$w(\varphi, t) = \left( A_2 \sin \frac{6\kappa}{\sqrt{5}} t + B_2 \cos \frac{6\kappa}{\sqrt{5}} t \right) \sin 2\varphi + \left( C_2 \sin \frac{6\kappa}{\sqrt{5}} t + D_2 \cos \frac{6\kappa}{\sqrt{5}} t \right) \cos 2\varphi. \quad (1.2.41)$$

Выражение (1.2.41) имеет следующий физический смысл: колебание кольцевого резонатора представляется в виде суммы двух стоячих волн, ортогональных по окружному углу и фазе.

Аналогично, для третьей формы колебаний имеем

$$\omega_0 = \frac{24}{\sqrt{10}} \kappa,$$

$$w(\varphi, t) = \left( A_3 \sin \frac{24\kappa}{\sqrt{10}} t + B_3 \cos \frac{24\kappa}{\sqrt{10}} t \right) \sin 3\varphi + \\ + \left( C_3 \sin \frac{24\kappa}{\sqrt{10}} t + D_3 \cos \frac{24\kappa}{\sqrt{10}} t \right) \cos 3\varphi.$$

Вообще, любое колебание кольцевого резонатора является суммой бесконечного числа собственных колебаний вида

$$w(\varphi, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [p_n(t) \cos n\varphi + q_n(t) \sin n\varphi].$$

*Решение уравнений динамики методом Фурье.* Рассмотрим уравнение динамики с учетом вращения

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'') = 0. \quad (1.2.42)$$

Перейдем от оригинала

$$w = w(\varphi, t)$$

к фурье-образу

$$W = W(s, t)$$

относительно аргумента  $\varphi$ :

$$W(s, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} w(\varphi, t) e^{-i\varphi s} d\varphi.$$

Используя свойства преобразования Фурье, вместо дифференциального уравнения в частных производных (1.2.42) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\ddot{W} - 4\Omega i \frac{s}{s^2 + 1} \dot{W} + \kappa^2 \frac{(s^2 - 1)^2 s^2}{s^2 + 1} W = 0. \quad (1.2.43)$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$r^2 - 4\Omega i \frac{s}{s^2 + 1} r + \kappa^2 \frac{(s^2 - 1)^2 s^2}{s^2 + 1} = 0$$

имеет дискриминант

$$D = \left( -4\Omega i \frac{s}{s^2 + 1} \right)^2 - 4\kappa^2 \frac{(s^2 - 1)^2 s^2}{s^2 + 1} < 0.$$

Решение (1.2.43) представляется в виде

$$W(s, t) = \exp(-i\beta t) \left[ C_1 \exp \left( it \sqrt{\omega_0^2 + 4\Omega^2 \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}} \right) + C_2 \exp \left( -it \sqrt{\omega_0^2 + 4\Omega^2 \frac{s^2}{(s^2 + 1)^2}} \right) \right] F(s), \quad (1.2.44)$$

где

$$\beta = -\Omega \frac{2s}{s^2 + 1}; \quad \omega_0 = \kappa \frac{(s^2 - 1)s}{\sqrt{s^2 + 1}};$$

$C_1, C_2$  — неопределенные коэффициенты;  $F(s)$  — неопределенная функция.

Поскольку  $\Omega^2 \ll 1$ , приближенно имеем

$$W(s, t) = e^{-i\beta t} [C_1 e^{it\omega_0} + C_2 e^{-it\omega_0}] F(s). \quad (1.2.45)$$

Для основной формы колебаний ( $s = 2$ ), опуская множитель  $F(s)$ , получаем

$$W(s, t) = e^{-i\Omega(4/5)t} [C_1 e^{it(6/\sqrt{5})\kappa} + C_2 e^{-it(6/\sqrt{5})\kappa}]. \quad (1.2.46)$$

Для оригинала имеем следующее разложение в ряд Фурье:

$$w(\varphi, t) = \sum_s W(s, t) e^{i\varphi s}. \quad (1.2.47)$$

Окончательно, для рабочей формы колебаний

$$w(\varphi, t) = e^{i\Omega(4/5)t} e^{2i\varphi} [C_1 e^{it(6/\sqrt{5})\kappa} + C_2 e^{-it(6/\sqrt{5})\kappa}] + e^{-i\Omega(4/5)t} e^{-2i\varphi} [C_1 e^{-it(6/\sqrt{5})\kappa} + C_2 e^{it(6/\sqrt{5})\kappa}]. \quad (1.2.48)$$

**Влияние внутреннего трения и внешней нагрузки на динамику кольцевого резонатора.** Деформация кольцевого резонатора упругими волнами неизбежно сопровождается потерями энергии на преодоление внутреннего трения. Наиболее распространенной моделью механизма внутренней диссипации является модель Кельвина–Фойгта [1, 2], обобщающая закон Гука на случай неупругих деформаций

$$\sigma = E(\varepsilon + \xi \dot{\varepsilon}), \quad (1.2.49)$$

где  $\sigma$  — функция напряжений;  $\varepsilon$  — деформация;  $\xi$  — безразмерная величина, характеризующая время затухания неупругих релаксаций.

При наличии трения процедура составления уравнения динамики резонатора отличается лишь тем, что вместо функции Лагранжа (1.2.16) следует исходить из выражения

$$L = \frac{1}{\rho S} \left( T - \Pi - \xi \frac{EJ}{R} \frac{\partial \dot{\psi}}{\partial \varphi} \right).$$

Поэтому, опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный вид уравнений динамики резонатора в размерной и безразмерной формах:

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \kappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = 0, \quad (1.2.50)$$

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\omega\dot{w}' + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' + \xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = 0. \quad (1.2.51)$$

Пусть  $\xi$  достаточно мало. Тогда внутреннее трение практически не сказывается на пространственном положении стоячих волн, а лишь приводит к их постепенному затуханию. Положим в уравнении (1.2.51)  $w = 0$  (свободные колебания):

$$\ddot{w}'' - \ddot{w} + w^{VI} + 2w^{IV} + w'' + \xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = 0. \quad (1.2.52)$$

Решение (1.2.52) опять будем искать в виде

$$w(\varphi, \tau) = a(\tau) \cos[2(\varphi - \varphi_0)]. \quad (1.2.53)$$

Подставляя (1.2.53) в уравнение (1.2.52), получим

$$\ddot{a} + \xi \frac{36}{5} \dot{a} + \frac{36}{5} a = 0. \quad (1.2.54)$$

Решением уравнения (1.2.54) при  $a(0) = a_0$ ,  $\dot{a}(0) = 0$  является функция

$$a(\tau) = a_0 e^{-\delta\tau} \cos \mu\tau \quad (1.2.55)$$

(экспоненциально затухающая амплитуда), где

$$\delta = \frac{18}{5} \xi, \quad \mu = \sqrt{\frac{36}{5} - \left(\xi \frac{18}{25}\right)^2}.$$

При этом решение (1.2.52) определяется формулой

$$w(\varphi, \tau) = a_0 e^{-\delta\tau} \cos \mu\tau \cos[2(\varphi - \varphi_0)]. \quad (1.2.56)$$

Для постоянной угловой скорости вращения основания можно записать

$$w(\varphi, \tau) = a_0 e^{-\delta\tau} \cos \tilde{\mu}\tau \cos \left[ 2(\varphi - \varphi_0) + \frac{4}{5} \nu_0 \tau \right], \quad (1.2.57)$$

и измерение вращения основания можно, как и прежде, осуществлять по положению пучностей колебаний стоячих волн по отношению к корпусу прибора.

Важной характеристикой резонатора является его *добротность*, определяемая формулой

$$Q = \frac{1}{\nu_0 \xi}, \quad (1.2.58)$$

где

$$\nu_0 = \kappa \mu_0 = 6 \sqrt{\frac{EJ}{5\rho SR^4}}$$

— собственная частота упругих колебаний. Для плавленого кварца  $Q$  лежит в пределах  $10^6 \dots 10^7$ .

*Внешняя нагрузка.* Естественно, что слабое затухание стоячих волн, определяемое параметром  $\delta$ , следует компенсировать внешней “подкачкой” энергии. Этого можно достичь под действием внешней распределенной нагрузки  $p(\varphi, t)$  с компонентами  $p_v, p_w$ . Выполняя анализ динамики кольцевого резонатора аналогично вышеприведенному, опустив промежуточные выкладки, получим в размерном виде

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \\ + \kappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = \frac{1}{\rho S} (p_w'' - p_v'). \end{aligned} \quad (1.2.59)$$

Уравнение (1.2.59) — это уравнение движения неидеально упругого нерастяжимого кольца, вращающегося в своей плоскости с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси симметрии и подверженного действию внешней распределенной нагрузки.

Для свободных колебаний резонатора в отсутствие угловой скорости уравнение динамики можно записать в компактной операторной форме

$$\left[ \kappa^2 \partial_\varphi^2 (\partial_\varphi^2 + 1)^2 (\xi \partial_t + 1) + \partial_t^2 (\partial_\varphi^2 - 1) \right] w = 0, \quad (1.2.60)$$

где  $\partial_\varphi \equiv \partial/\partial\varphi$ ,  $\partial_t \equiv \partial/\partial t$ .

**Численное решение задач динамики упругого кольца методом конечных разностей.** Рассмотрим уравнение свободных колебаний кольцевого резонатора в общем виде (1.2.59) без правой части:

$$\begin{aligned} \ddot{w}'' - \ddot{w} + 4\Omega\dot{w}' + \kappa^2(w^{VI} + 2w^{IV} + w'') + \kappa^2\xi(\dot{w}^{VI} + 2\dot{w}^{IV} + \dot{w}'') = 0, \\ w(\varphi, 0) = a(\varphi), \quad \dot{w}(\varphi, 0) = b(\varphi), \quad w^{(n)}(0, t) = w^{(n)}(2\pi, t), \quad n = \overline{0, 5}. \end{aligned} \quad (1.2.61)$$

В общем случае полагаем, что  $\Omega = \Omega(t)$  (переменная угловая скорость вращения основания), а  $\xi = \xi(\varphi)$  (разнобортность).

Для численного решения данной задачи используем метод конечных разностей [22]. Введем сначала равномерную пространственно-временную сетку

$$\begin{aligned} \varphi_j = jh, \quad j = 0, 1, \dots, N-1, \quad h = \frac{2\pi}{N}; \\ t_i = i\tau, \quad i = 0, 1, \dots, M, \quad \tau = \frac{T}{M}. \end{aligned}$$

Далее аппроксимируем четные производные по окружной координате в каждом узле  $\varphi_j$  центральными конечными разностями:

$$w^{(n)}(\varphi_j, t_i) \sim \Delta_h^n w_j^i = \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k w_{j+k-n/2}^i, \quad (1.2.62)$$

где  $C_n^k$  — биномиальные коэффициенты, а  $w_j^i \equiv w(\varphi_j, t_i)$ . Нечетную производную представим в виде

$$w'(\varphi_j, t_i) \sim \frac{w_{j+1}^i - w_{j-1}^i}{2h}.$$

Погрешность таких аппроксимаций для каждой производной имеет порядок  $h^2$ .

Аналогичным образом аппроксимируем с погрешностью порядка  $\tau^2$  производные по времени:

$$\dot{w}(\varphi_j, t_i) \sim \frac{w_j^{i+1} - w_j^{i-1}}{2\tau}, \quad \ddot{w}(\varphi_j, t_i) \sim \frac{w_j^{i+1} - 2w_j^i + w_j^{i-1}}{\tau^2}.$$

Обозначим дифференциальный оператор

$$Lw \equiv \kappa^2(w^{\text{VI}} + 2w^{\text{IV}} + w'').$$

Тогда, при использовании (1.2.62), его конечноразностный аналог имеет вид

$$\begin{aligned} \Lambda w_j^i = \frac{1}{h^6} & \left[ (w_{j-3}^i + w_{j+3}^i) + (2h^2 - 6)(w_{j-2}^i + w_{j+2}^i) + \right. \\ & \left. + (h^4 - 8h^2 + 15)(w_{j-1}^i + w_{j+1}^i) + 2(-h^4 + 6h^2 - 10) \right]. \end{aligned}$$

Введем однопараметрическое семейство трехслойных схем

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta_h^2 w_j^{i+1} - 2\Delta_h^2 w_j^i + \Delta_h^2 w_j^{i-1}}{\tau^2} - \frac{w_j^{i+1} - 2w_j^i + w_j^{i-1}}{\tau^2} + \\ & + \xi_j \frac{1}{2\tau} (\Lambda w_j^{i+1} - \Lambda w_j^{i-1}) + \Lambda [\sigma w_j^{i+1} + (1 - 2\sigma)w_j^i + \sigma w_j^{i-1}] + \\ & + \Omega_i \frac{w_{j+1}^{i+1} - w_{j-1}^{i+1} - w_{j+1}^{i-1} + w_{j-1}^{i-1}}{h\tau} = 0, \\ & j = 0, 1, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (1.2.63) \end{aligned}$$

где  $\xi_j \equiv \xi(\varphi_j)$ ,  $\Omega_i \equiv \Omega(t_i)$ . Числовой параметр  $\sigma \in [0, 1]$  служит для обеспечения устойчивости схемы. При  $\sigma = 0$  получаем чисто явную разностную схему, а при  $\sigma = 1$  — неявную, более устойчивую к погрешностям вычислений.

К системе уравнений (1.2.63) следует добавить начальные условия

$$\begin{aligned} w_j^0 &= a_j, \quad w_j^1 = w_j^0 + \tau b_j, \\ a_j &\equiv a(\varphi_j), \quad b_j \equiv b(\varphi_j), \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (1.2.64)$$

и условия периодичности

$$w_j^i = \begin{cases} w_j^i, & 0 \leq j \leq N-1, \\ w_{j+N}^i, & j < 0, \\ w_{j-N}^i, & j > N-1. \end{cases} \quad (1.2.65)$$

В силу (1.2.65) матрица системы (1.2.63) будет представлять собой семидиагональную матрицу-циркулянт.