Капцов О.В.

Методы интегрирования уравнений с частными производными

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.95+533
ББК 22.161.6
К 20

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07011

Капцов О. В. **Методы интегрирования уравнений с частными производными.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 184 с. — ISBN 978-5-9221-1155-3.

В монографии представлен ряд методов построения точных решений линейных и нелинейных уравнений с частными производными. Изложение ведется в рамках двух основных парадигм: непрерывные преобразования и инвариантность. Особое внимание уделяется таким подходам, как методы интегрирования Дарбу, Эйлера, Беклунда, Мутара. Дано обобщение классических методов для систем дифференциальных уравнений, подробно описан новый способ интегрирования — метод линейных определяющих уравнений. С характеристиками систем уравнений связываются инвариантные тензоры и интегральные инварианты, обсуждаются локальные законы сохранения. В качестве приложений рассмотрены математические модели механики сплошной среды — от гидродинамики до нелинейной теплопроводности.

Книга рассчитана на широкий круг читателей — математиков, механиков, физиков, преподавателей вузов и студентов.

ISBN 978-5-9221-1155-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Появление огромного числа сложных математических моделей требует совершенствования методов исследования. Учебники и монографии по механике, физике, химии пополняются новыми примерами решений конкретных дифференциальных уравнений. Совместное применение аналитических и численных методов позволяет более глубоко проанализировать поведение решений соответствующих уравнений. Данная книга посвящена аналитическим методам интегрирования уравнений с частными производными. Выбор методов определялся, прежде всего, научными пристрастиями автора. Потребность в методах исследования дифференциальных уравнений возникла с появлением первых математических моделей в механике и физике. С историей некоторых методов интегрирования дифференциальных уравнений можно ознакомиться по книгам [21, 25, 53, 106, 118]. Однако еще больший интерес представляют классические монографии [93, 102, 107, 113, 127]. Как было не раз замечено, некоторые важные результаты классиков остаются малоизвестными и фактически не используются. Автор намеренно не стал затрагивать широко известные и многократно описанные методы интегрирования, в том числе модный, до недавнего времени, метод обратной задачи рассеяния. Столь необходимый для исследователя групповой анализ дифференциальных уравнений лишь бегло рассматривается в первой главе, поскольку сейчас имеется достаточно литературы по данному подходу. К сожалению, далеко не всегда можно заранее сказать какой метод наиболее подходит для решения конкретной системы уравнений, поэтому полезно владеть несколькими подходами.

Хотя оглавление книги дает представление о ее содержании, следует сделать некоторые пояснения для читателей, мало знакомых с данной тематикой. В первых параграфах кратко дается представление о теоретико-групповом подходе к дифференциальным уравнениям, приводится пример применения этой техники к известной $(k-\varepsilon)$-модели турбулентности. Затем излагается метод интегрирования Дарбу нелинейных уравнений второго порядка и его развитие на системы уравнений первого порядка. Данный подход основан на инвариантах характеристик, частным случаем которых являются инварианты Римана. Несмотря на то, что интерес к этому методу возродился в последнее время, остаются неясности даже в проблеме классификации уравнений Гурса [126, 139]. В книге дано применение этого метода к системе уравнений газовой динамики. Завершается первая глава изложением интегральных инвариантов по Картану, а также инвариантных тензоров. Эти объекты связываются с характеристиками уравнений в частных производных.

Вторая глава посвящена вопросам эквивалентности и преобразований дифференциальных уравнений. Рассматриваются преобразования, зависящие от производных и переводящие решения одного уравнения в решения другого. К ним относятся дифференциальное преобразование Лапласа и преобразование Эйлера–Дарбу. Именно Эйлер [93] первым применял для интегрирования уравнений второго порядка преобразования, которые сейчас обычно называют преобразованиями Дарбу. Такие преобразования можно использовать для построения решений уравнений с переменными коэффициентами, а в некоторых случаях и для интегрирования нелинейных уравнений. Кроме того, в данной главе описываются преобразования Беклунда и Мутара. В качестве дополнения дано применение метода Хироты к двумерным стационарным уравнениям Эйлера.

В последней главе излагается метод линейных определяющих уравнений, предложенный автором для построения решений нелинейных уравнений с частными производными. В качестве приложений берутся уравнения диффузионного типа и некоторые гиперболические уравнения. Данные уравнения, как правило, допускают очень бедную группу преобразований, и применение группового анализа к ним становится неэффективным. Один из параграфов посвящен законам сохранения. В нем дается вывод определяющих уравнений для законов сохранения и приводятся нестандартные законы сохранения. Особняком в этой главе стоит параграф, в котором получены редукции нелинейных параболических систем к одному уравнению. В некоторых случаях возможна редукция нелинейной системы к линейному уравнению теплопроводности. Список литературы не претендует на полноту, в нем воспроизведены источники, которые автор использовал в ходе работы. Необходимо отметить недавно опубликованные монографии [109, 133], в которых изучаются некоторые близкие вопросы.

Эту книгу можно рассматривать как продолжение монографии [4]. Часть материала в разные годы была прочитана студентам Сибирского федерального университета. Новые результаты, изложенные в книге, получены в ходе работы над проектами Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №96-01-00047, 04-01-00130, 07-01-00363, 07-01-00489).

Я выражаю глубокую признательность коллегам А. В. Аксенову, В. Н. Гребеневу, С. Р. Свирщевскому, С. П. Цареву, своим ученикам Ю. В. Шанько, А. В. Шмидту, А. В. Заблуде, И. А. Ефремову за заинтересованное обсуждение отдельных тем книги. Особую благодарность хочется высказать моему учителю — академику Льву Васильевичу Овсянникову, под влиянием которого формировались мои научные пристрастия.

Глава 1

ИНВАРИАНТНОСТЬ

§ 1. Интегральные многообразия и системы Пфаффа

В этом и дальнейших параграфах рассматриваются базовые понятия геометрической теории уравнений с частными производными. Все функции считаются гладкими, т. е. бесконечно дифференцируемыми. Изложение начинается с одного уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0. \tag{1.1}$$

Если функция $u(x, y)$ является его решением, то должны выполняться равенства:

$$\begin{aligned} du - u_x\,dx - u_y\,dy &= 0,\\ du_x - u_{xx}\,dx - u_{xy}\,dy &= 0,\\ du_y - u_{xy}\,dx - u_{yy}\,dy &= 0. \end{aligned} \tag{1.2}$$

С геометрической точки зрения удобно представлять уравнение (1.1) как многообразие в пространстве R^8 с координатами x, y, u, p, q, r, s, t. Уравнению (1.1) сопоставляется многообразие

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0 \tag{1.3}$$

в R^8, а соотношениям (1.2) — система Пфаффа

$$\begin{aligned} du - p\,dx - q\,dy &= 0,\\ dp - r\,dx - s\,dy &= 0,\\ dq - s\,dx - t\,dy &= 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Пусть имеются дважды непрерывно дифференцируемые функции

$$x = X, \quad y = Y, \quad u = U, \quad p = P, \quad q = Q, \quad r = R, \quad s = S, \quad t = T,$$

заданные в некоторой области $O \subset R^2$, зависящие от переменных α, β и удовлетворяющие (1.3), (1.4). Предположим, что эти функции определяют двумерное многообразие $M_2 \subset R^8$, однозначно проектируемое в $R^2(x, y)$, тогда M_2 называется интегральным многообразием, а функции X, Y, U — параметрическим решением уравнения (1.1).

В некоторых случаях полезно рассматривать одномерные интегральные многообразия. В частности, такие многообразия возникают при изучении характеристик уравнения (1.1). Интегральные многообразия различных размерностей для уравнений с частными производными были введены С. Ли. Подробности можно найти в работах [19, 25, 113]. Параметрическим представлением решения приходится пользоваться, когда его трудно записать в явном виде. Параметрические решения возникают, например, в задачах механики и гидродинамики.

Понятие интегрального многообразия несложно распространить на системы уравнений с любым числом переменных. Пусть задана система m уравнений в частных производных с n независимыми переменными

$$F(x, u, p, s) = 0, \tag{1.5}$$

где $x = (x^1, \ldots, x^m)$, $u = (u^1, \ldots, u^m)$, p, s — наборы первых и вторых производных от функций u^j, $F = (F^1, \ldots, F^m)$. Дополним уравнения (1.5) системой Пфаффа

$$du^j - \sum_{i=1}^{n} p_i^j dx^i = 0, \tag{1.6}$$

$$dp_k^j - \sum_{i=1}^{n} s_{ik}^j dx^i = 0, \tag{1.7}$$

где $1 \leqslant j \leqslant m$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Параметризованное многообразие M_n размерности n, заданное гладкими функциями

$$\begin{gathered} x^i = X^i, \quad u^j = U^j, \quad p_i^j = P_i^j, \quad s_{ik}^j = S_{ik}^j, \\ 1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \end{gathered}$$

определенными в области $O \subset R^n$, называется интегральным, если эти функции удовлетворяют уравнениям (1.5), (1.6), (1.7), а M_n однозначно проецируется в R^n.

С геометрической точки зрения система (1.5) задает многообразие в пространстве струй $J^2(R^n, R^m)$. Определение этого понятия приводится ниже.

Пусть L_s^1 обозначает пространство линейных отображений из R^n в R^m, а L_s^k — пространство симметричных полилинейных отображений

$$l : R^n \times \ldots \times R^n = R^{nk} \to R^m.$$

Декартово произведение $R^n \times R^m \times L_s^1 \times \ldots \times L_s^k$ называют k-м продолжением пространства R^{n+m} или пространством струй k-го порядка и обозначают $J^k(R^n, R^m)$. Для единообразия пространство R^{n+m} обозначается через $J^0(R^n, R^m)$.

Очевидно, пространство $J^k(R^n, R^m)$ вкладывается в пространство $J^{k+1}(R^n, R^m)$ и в результате получается диаграмма вложений

$$J^0(R^n, R^m) \to J^1(R^n, R^m) \to \ldots \to J^k(R^n, R^m) \to J^{k+1}(R^n, R^m) \to \ldots .$$

В некоторых случаях удобно рассматривать пространство струй бесконечного порядка $J^\infty(R^n, R^m)$, элементами которого являются бесконечные последовательности $(x,\, u,\, l^1,\, l^2,\, \ldots)$, где $l^k \in L_s^k$, $x \in R^n$, $u \in R^m$.

Теперь кратко опишем геометрические образы, связанные с уравнениями Пфаффа. Произвольное уравнение Пфаффа

$$a_1(x)\, dx^1 + \ldots + a_n(x)\, dx^n = 0, \tag{1.8}$$

где a_i — некоторые функции, задает в каждой точке $x_0 = (x_0^1,\, \ldots,\, x_0^n)$ гиперплоскость

$$a_1(x_0)(x^1 - x_0^1) + \ldots + a_n(x_0)(x^n - x_0^n) = 0.$$

Таким образом, уравнение (1.8) порождает поле гиперплоскостей в R^n. Система уравнений Пфаффа каждой точке $x_0 \in R^n$ сопоставляет линейное многообразие и порождает поле линейных многообразий. Принято говорить, что система Пфаффа (1.6), (1.7) задает контактную структуру в $J^2(R^n, R^m)$. Диффеоморфизм области $O \subset J^0(R^n, R^m)$ называется точечным преобразованием.

Используя уравнения Пфаффа, легко получить известные формулы преобразования производных. Рассмотрим, например, точечное преобразование пространства R^3, заданное функциями

$$\widetilde{x} = X(x, y, u), \quad \widetilde{y} = Y(x, y, u), \quad \widetilde{u} = U(x, y, u). \tag{1.9}$$

Для нахождения формул преобразования производных требуется, чтобы уравнение Пфаффа

$$du - p\, dx - q\, dy = 0 \tag{1.10}$$

переходило в уравнение

$$d\widetilde{u} - \widetilde{p}\, d\widetilde{x} - \widetilde{q}\, d\widetilde{y} = 0. \tag{1.11}$$

Таким образом, соотношение (1.11) должно выполняться в силу (1.10), т. е. уравнение Пфаффа должно оставаться инвариантным. Используя (1.10), несложно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
d\widetilde{x} &= D_x(X)\, dx + D_y(X)\, dy,\\
d\widetilde{y} &= D_x(Y)\, dx + D_y(Y)\, dy,\\
d\widetilde{u} &= D_x(U)\, dx + D_y(U)\, dy,
\end{aligned}$$

где $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x} + p\,\dfrac{\partial}{\partial u}$, $D_y = \dfrac{\partial}{\partial y} + q\,\dfrac{\partial}{\partial u}$. Подставляя эти выражения в (1.11), получаем уравнение

$$(D_xU - \widetilde{p}D_xX - \widetilde{q}D_xY)\, dx + (D_yU - \widetilde{p}D_yX - \widetilde{q}D_yY)\, dy = 0.$$

Поскольку коэффициенты при dx и dy должны обращаться в ноль, то должны выполняться следующие соотношения относительно $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$:

$$\widetilde{p}D_xX + \widetilde{q}D_xY = D_xU, \qquad \widetilde{p}D_yX + \widetilde{q}D_yY = D_yU.$$

Значит, величины $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ задаются формулами

$$\widetilde{p} = \frac{\begin{vmatrix} D_xU & D_xY \\ D_yU & D_yY \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \widetilde{q} = \frac{\begin{vmatrix} D_xX & D_xU \\ D_yX & D_yU \end{vmatrix}}{\Delta}, \tag{1.12}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} D_xX & D_xY \\ D_yX & D_yY \end{vmatrix}$. Формулы (1.12) определяют продолжение (поднятие) точечного преобразования (1.9) в пространство $J^1(R^2, R^1)$; контактная структура, заданная уравнением (1.10), остается инвариантной при преобразовании (1.9).

Для получения формул преобразования вторых производных нужно требовать инвариантности системы Пфаффа (1.4). Приведенные выше рассуждения переносятся на произвольные точечные преобразования. Соответствующие выкладки представлены в § 10.

§ 2. Инвариантность и группы преобразований

Пусть имеется множество M и отображение $f: M \to M$. Подмножество $K \subset M$ называется инвариантным относительно f, если $f(K) = K$. Будем говорить, что отображение $\varphi: M \to B$, где B — некоторое множество, является инвариантным относительно f, если $\varphi \circ f = \varphi$.

Множество всех обратимых отображений $f: M \to M$ образует группу преобразований. Часто возникает вопрос о нахождении группы преобразований, оставляющей подмножество $K \subset M$ инвариантным или, как говорят, о нахождении группы симметрий множества K. Вторая задача состоит в нахождении всех инвариантных отображений для заданной группы преобразований.

Если множество M наделено некоторой структурой, то ставится задача о нахождении группы преобразований, сохраняющих эту структуру. Например, если M — векторное пространство со скалярным произведением, то изучают группу преобразований, сохраняющих скалярное произведение. Выше рассматривались преобразования, оставляющие инвариантными уравнения Пфаффа.

Исследование той или иной проблемы инвариантности нередко проводят, ограничиваясь локальными группами преобразований. Это связано с тем, что инфинитезимальные методы более просты в применении. В этом параграфе рассматриваются локальные однопараметрические группы преобразований.

Пусть имеется семейство преобразований множества M :

$$f : M \times I \to M,$$

где I — некоторый интервал множества действительных чисел R. Это семейство называется локальной однопараметрической группой преобразований, если выполнены условия:

1) $f(x, 0) = x \quad \forall x \in M$;

2) $f(f(x, a_1), a_2) = f(x, a_1 + a_2) \quad \forall x \in M$ и $\forall a_1, a_2 \in I$ таких, что $a_1 + a_2 \in I$.

В дальнейшем предполагается, что M — открытое множество в R^n, а отображение f является гладким. Известно [62], что в этом случае локальная однопараметрическая группа может быть задана как решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\widetilde{x}^i}{da} = \xi^i(\widetilde{x}), \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{2.1}$$

с начальными данными

$$\widetilde{x}^i(0) = x^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Правые части системы (2.1) задают векторное поле $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ на некотором открытом множестве в R^n.

Будем обозначать локальную однопараметрическую группу преобразований, порожденную векторным полем ξ через G_1. Как известно, она представляется в виде

$$f(x, a) = x + a\,\xi(x) + o(a),$$

где $o(a)$ — функция более высокого порядка малости, чем a при $a \to 0$. Предположим, что некоторая локальная однопараметрическая группа G_1 действует на открытом множестве пространства $R^n \times R^m = J^0(R^n, R^m)$. Если потребовать, чтобы G_1 оставляла инвариантными уравнения Пфаффа (1.6), то можно продолжить действие G_1 на пространство струй $J^1(R^n, R^m)$.

Рассмотрим для упрощения рассуждений пространство $R^2 \times R$ и локальную однопараметрическую группу G_1:

$$\widetilde{x} = x + a\xi^1 + o(a), \quad \widetilde{y} = y + a\xi^2 + o(a), \quad \widetilde{u} = u + a\,\eta + o(a). \tag{2.2}$$

Компоненты векторного поля $v = (\xi^1, \xi^2, \eta)$ могут зависеть от x, y, u. Данная группа должна оставлять инвариантным уравнение (1.10). Подставляя формулы (2.2) в уравнение (1.11), получим

$$d(u + a\,\eta + o(a)) - \widetilde{p}\, d(x + a\,\xi^1 + o(a)) - \widetilde{q}\, d(y + a\,\xi^2 + o(a)) = 0, \tag{2.3}$$

где $\widetilde{p}$, $\widetilde{q}$ представляются в виде

$$\widetilde{p} = p + a\,\varsigma^1 + o(a), \quad \widetilde{q} = q + a\,\varsigma^2 + o(a). \tag{2.4}$$

Величины ς^1, ς^2 необходимо найти из уравнения (2.3). Для более краткой записи будем отбрасывать функции порядка $o(a)$ и вместо знака равенства использовать символ $\approx$.

Уравнение (2.3) с учетом (2.4) переписывается следующим образом:

$$du + a\,d\eta - (p + a\varsigma^1)(dx + a\,d\xi^1) - (q + a\varsigma^2)(dy + a\,d\xi^2) \approx$$
$$\approx du + a(\eta_x\,dx + \eta_y\,dy + \eta_u\,du) - (p + a\varsigma^1)[dx + a(\xi^1_x\,dx + \xi^1_y\,dy + \xi^1_u\,du)] -$$
$$- (q + a\varsigma^2)[dy + a(\xi^2_x\,dx + \xi^2_y\,dy + \xi^2_u\,du)] \approx 0.$$

Последнее соотношение должно выполняться в силу (1.10), поэтому его можно преобразовать к виду

$$p\,dx + q\,dy + a[\eta_x\,dx + \eta_y\,dy + \eta_u(p\,dx + q\,dy)] -$$
$$- (p + a\varsigma^1)[dx + a(\xi^1_x\,dx + \xi^1_y\,dy + \xi^1_u(p\,dx + q\,dy))] -$$
$$- (q + a\varsigma^2)[dy + a(\xi^2_x\,dx + \xi^2_y\,dy + \xi^2_u(p\,dx + q\,dy))] \approx 0.$$

Приводя подобные члены при dx, dy в последнем соотношении и приравнивая полученные коэффициенты к нулю, приходим к двум уравнениям:

$$\eta_x + \eta_u p - \varsigma^1 - p(\xi^1_x + p\xi^1_u) - q(\xi^2_x + p\xi^2_u) = 0, \tag{2.5}$$
$$\eta_y + \eta_u q - \varsigma^2 - p(\xi^1_y + q\xi^1_u) - q(\xi^2_y + q\xi^2_u) = 0. \tag{2.6}$$

Таким образом, получаем известные формулы продолжения:

$$\varsigma^1 = D_x\eta - pD_x\xi^1 - qD_x\xi^2, \tag{2.7}$$
$$\varsigma^2 = D_y\eta - pD_y\xi^1 - qD_y\xi^2; \tag{2.8}$$

здесь вновь использованы операторы $D_x = \dfrac{\partial}{\partial x} + p\dfrac{\partial}{\partial u}, D_y = \dfrac{\partial}{\partial y} + q\dfrac{\partial}{\partial u}$.

Один раз продолженное векторное поле $v_1 = (\xi^1, \xi^2, \eta, \varsigma^1, \varsigma^2)$ задано на некотором множестве из $J^1(R^2, R^1)$. Ему можно взаимно однозначно сопоставить оператор

$$\xi^1\frac{\partial}{\partial x} + \xi^2\frac{\partial}{\partial y} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \varsigma^1\frac{\partial}{\partial p} + \varsigma^2\frac{\partial}{\partial q},$$

который тоже часто называют продолженным векторным полем.

Условия инвариантности уравнений Пфаффа (1.4) позволяют получить формулы второго продолжения. Вывод общих формул продолжения имеется в [62, 64]. Продолженная локальная однопараметрическая группа преобразований, действующая на открытом множестве в $J^k(R^n, R^m)$, обозначается через $G^k_1(n, m)$.

Говорят, что система уравнений с частными производными $E \subset$ $\subset J^k(R^n, R^m)$ инвариантна относительно локальной однопараметрической группы преобразований G_1, если продолженная группа $G_1^k(n,m)$ оставляет многообразие E инвариантным. Решение системы уравнений E представляет собой n-мерное многообразие $S \subset R^{n+m}$. Если это многообразие инвариантно относительно группы G_1, то соответствующее решение называется инвариантным.

Общая теория инвариантных и частично инвариантных решений подробно описана в [62, 64]. В следующем параграфе будет рассмотрена конкретная система уравнений с частными производными и построен пример инвариантного решения.

§ 3. Инвариантные решения модели дальнего турбулентного следа

В этом параграфе строятся автомодельные решения $(e-\varepsilon)$-модели турбулентности в приближении дальнего следа[90, 144]:

$$
\begin{gathered}
u_0\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial y}\right),\\
u_0\frac{\partial e}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right) + c_\mu\frac{e^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \varepsilon,\\
u_0\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{y^s}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^s \frac{c_\mu}{\sigma}\frac{e^2}{\varepsilon}\frac{\partial e}{\partial y}\right) + c_1 e\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - c_2\frac{\varepsilon^2}{e},
\end{gathered}
\tag{3.1}
$$

где $u_0 = 1$ — скорость набегающего потока, u — дефект скорости, e — кинетическая энергия турбулентности, ε — скорость диссипации кинетической энергии, c_1, c_2, c_μ, σ — эмпирические константы, $s = 0$ для плоского течения и $s = 1$ в осесимметрическом случае.

Несложно проверить, что в плоском случае система (3.1) инвариантна относительно трех преобразований переносов

$$
\widetilde{x} = x + a_1, \quad \widetilde{y} = y + a_2, \quad \widetilde{u} = u + a_3, \quad a_i \in R,
$$

а также двух растяжений

$$
\widetilde{x} = ax, \quad \widetilde{u} = \frac{u}{a}, \quad \widetilde{e} = \frac{e}{a^2}, \quad \widetilde{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{a^3}, \tag{3.2}
$$

$$
\widetilde{y} = by, \quad \widetilde{u} = bu, \quad \widetilde{e} = b^2 e, \quad \widetilde{\varepsilon} = b^2\varepsilon, \quad a, b \in R. \tag{3.3}
$$

Можно показать, что других локальных однопараметрических групп преобразований, оставляющих систему (3.1) инвариантной, нет [39]. Очевидно, система (3.1) инвариантна относительно преобразования отражения $\widetilde{y} = -y$. В осесимметрическом случае перенос по y отсутствует.

В дальнейшем для упрощения будем изучать только плоские движения жидкости (осесимметричный случай рассматривается аналогично). Воспользуемся инвариантностью системы относительно преобразований растяжения (3.2), (3.3) для построения решений. Полагая $b = a^{\alpha}, \alpha \in R$, в формулах (3.3), получаем преобразование растяжения:

$$\widetilde{x} = ax, \quad \widetilde{y} = a^{\alpha}y, \quad \widetilde{u} = a^{\alpha-1}u, \quad \widetilde{e} = a^{2\alpha-2}e, \quad \widetilde{\varepsilon} = a^{2\alpha-3}\varepsilon. \tag{3.4}$$

Несложно видеть, что функции

$$I_1 = yx^{-\alpha}, \quad I_2 = ux^{1-\alpha}, \quad I_3 = ex^{2-2\alpha}, \quad I_4 = \varepsilon x^{3-2\alpha}$$

остаются инвариантными при преобразовании (3.4). Значит, три множества, заданных уравнениями:

$$I_2 = U(I_1), \quad I_3 = E(I_1), \quad I_4 = D(I_1), \tag{3.5}$$

являются инвариантными относительно действия (3.4). Здесь U, E, D пока произвольные дифференцируемые функции. Согласно (3.5), находим представление для решений:

$$u = x^{\alpha-1}U(t), \quad e = x^{2\alpha-2}E(t), \quad \varepsilon = x^{2\alpha-3}D(t), \tag{3.6}$$

где $t = yx^{-\alpha}$.

Подставляя (3.6) в исходную систему (3.1), получаем обыкновенные дифференциальные уравнения:

$$\begin{gathered}
U'' = \frac{(\alpha-1)UD^2 - U'\alpha tD^2 - 2c_\mu EU'DE' + c_\mu E^2U'D'}{c_\mu E^2D}, \\
E'' = \frac{2(\alpha-1)D^2E - t\alpha D^2E' - 2c_\mu EDE'^2 + c_\mu E^2E'D' - 2c_\mu E^2U'^2D + D^3}{c_\mu E^2D}, \\
D'' = \frac{2\alpha\sigma ED^3 - 3\sigma ED^3 - t\alpha\sigma D^2ED' - 2c_\mu E^2D'DE'}{c_\mu E^3D} + \\
+ \frac{c_\mu E^3D'^2 - c_1c_\mu\sigma E^2U'^2D^2 + c_2\sigma D^4}{c_\mu E^3D}.
\end{gathered} \tag{3.7}$$

Скорость набегающего потока считается единичной, а эмпирические константы, входящие в систему (3.1), выбираются следующим образом: $c_\mu = 0{,}09$, $c_1 = 0{,}1287$, $c_2 = 1{,}92$, $\sigma = 1{,}3$.

Пусть выполняется следующее условие:

$$\frac{e^2}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \to 0 \qquad \text{при} \qquad y \to \pm\infty.$$

Тогда, интегрируя первое уравнение системы (3.1) по y от $-\infty$ до ∞, получим закон сохранения импульса

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u\,dy = 0, \qquad \text{или} \qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} u\,dy = \text{const}. \tag{3.8}$$

Подставим представление (3.6) во второе равенство (3.8). В результате имеем
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^{\alpha-1}U(t)x^{\alpha}dt = \mathrm{const}.$$

Для того, чтобы левая часть последнего равенства не зависела от x при $U > 0$, необходимо взять $\alpha = 0{,}5$. В связи с этим замечанием, решения системы (3.7) следует искать при $\alpha = 0{,}5$.

Вне зоны турбулентного следа функции u, e, ε должны обращаться в ноль, поэтому будем требовать выполнения условий
$$U(\pm a) = E(\pm a) = D(\pm a) = 0 \tag{3.9}$$
при некотором $a > 0$. Число a, связанное с шириной следа, можно считать равным 1, так как система (3.7) тоже инвариантна относительно растяжения. Вместо числа a можно было бы задавать величину импульса, однако его значение в экспериментах не определяется.

Будем искать решения уравнений (3.7), удовлетворяющие граничным условиям (3.9). Кроме того требуется, чтобы решения являлись четными функциями. Это приводит к граничным условиям
$$U'(0) = E'(0) = D'(0) = 0. \tag{3.10}$$
Нестандартность этой задачи состоит в том, что коэффициенты уравнений имеют особенности в краевых условиях.

В работе [40] был найден первый интеграл системы (3.7):
$$c_\mu U'E^2/D + \alpha tU = \mathrm{const}. \tag{3.11}$$
Из условий (3.10) следует, что константа, стоящая в правой части (3.11), равна нулю. Это позволяет при расчетах использовать уравнение первого порядка для U или исключить одну из функций D, E. Для расчетов использовался метод стрельбы. Значения функций U, E, D в точке $t = 0$ находились в процессе вычислений. В результате были получены следующие значения:
$$U(0) = 4{,}4985, \quad E(0) = 2{,}2367, \quad D(0) = 3{,}2968.$$

Интересно отметить полученные в [40] формулы разложения решений в окрестности особой точки $t = 1$:
$$\begin{aligned} U &= c_1(t-1)^{\alpha_1} + o(|t-1|^{\alpha_1}),\\ E &= c_2(t-1)^{\alpha_2} + o(|t-1|^{\alpha_2}),\\ D &= c_3(t-1)^{\alpha_3} + o(|t-1|^{\alpha_3}), \end{aligned}$$
где $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{10}{7}$, $\alpha_3 = \dfrac{13}{7}$, $c_i \in R$. Решения подходят к оси гладко, поскольку все α_i $(i = 1, 2, 3)$ больше единицы. Графики решений приведены на рисунках 1–3. Качественное и количественное

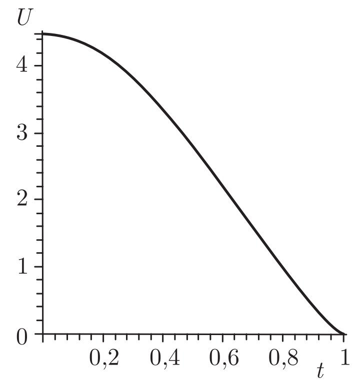

Рис. 1. График функции U

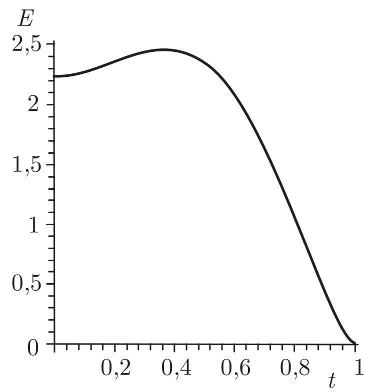

Рис. 2. График функции E

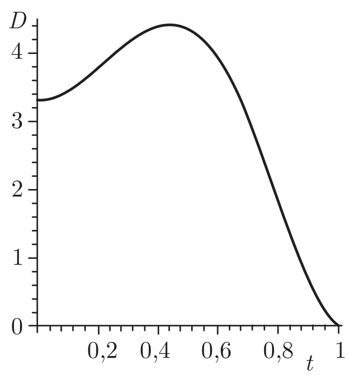

Рис. 3. График функции D

соответствие с известными экспериментальными данными [82, 89] по дефекту скорости и кинетической энергии турбулентности удовлетворительное. Надежные данные по диссипации энергии нам не известны. В монографии [144] краевая задача (3.7), (3.9), (3.10) решалась методом установления. В недавно опубликованной работе [41] найдены автомодельные решения другой двумерной модели турбулентного второго порядка в приближении дальнего следа. Искомыми величинами в той модели являются: дефект скорости, турбулентная кинетическая энергия, диссипация энергии и напряжение Рейнольдса. Полученные решения оказались близкими к решениям $(e{-}\varepsilon)$-модели.

§ 4. Характеристики уравнений второго порядка и их инварианты

Характеристики играют важную роль в исследовании свойств гиперболических уравнений и систем. В этом параграфе дается определение характеристик и вводится понятие инвариантов характеристик. Следует отметить, что существуют различные геометрические подходы к теории характеристик, однако окончательные формулы совпадают. Классическое описание имеется в [25, 52, 114], современное можно найти в [110].

Сначала рассмотрим уравнение в частных производных с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0, \tag{4.1}$$

где $p = u_x$, $q = u_y$, $r = u_{xx}$, $s = u_{xy}$, $t = u_{yy}$. Уравнение (4.1) определяет многообразие E в пространстве струй $J^2(R^2, R)$. Каждая параметрическая кривая в пространстве $J^1(R^2, R)$ задается пятью функциями:

$$x = X(\alpha), \quad y = Y(\alpha), \quad u = U(\alpha), \quad p = P(\alpha), \ q = Q(\alpha). \tag{4.2}$$

Пусть Γ_0 — проекция кривой (4.2) на плоскость $R^2(x, y)$. Обозначим через Γ_1 кривую (4.2), удовлетворяющую первому уравнению Пфаффа системы (1.4). Тогда функции, задающие эту кривую, удовлетворяют условию

$$U' - PX' - QY' = 0. \tag{4.3}$$

Функции U, P, Q, удовлетворяющие условию (4.3), назовем данными Коши для уравнения (4.1) на кривой Γ_0. Если $Y' \neq 0$, то на кривой Γ_0 достаточно задать функции U и P, а Q определится из (4.3).

Теперь рассмотрим вопрос об однозначности поднятия кривой Γ_1 в пространство $J^2(R^2, R)$. Будем требовать, чтобы поднятая кривая Γ_2 являлась одномерным интегральным многообразием уравнения (4.1). Это означает, что Γ_2 задается функциями:

$$x = X(\alpha), \quad y = Y(\alpha), \quad u = U(\alpha), \quad p = P(\alpha),$$
$$q = Q(\alpha), \quad r = R(\alpha), \quad s = S(\alpha), \quad t = T(\alpha),$$

которые удовлетворяют системе Пфаффа (1.4) и уравнению (4.1). Значит, эта восьмерка функций должна быть решением системы

$$\begin{gathered} F(X, Y, U, P, Q, R, S, T) = 0, \\ P' - X'R - Y'S = 0, \\ Q' - X'S - Y'T = 0 \end{gathered} \tag{4.4}$$

и уравнения (4.3). По теореме о неявной функции можно однозначно найти R, S, T из системы (4.4), если выполнено неравенство

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_r & F_s & F_t \\ X' & Y' & 0 \\ 0 & X' & Y' \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если же для всех точек кривой Γ_0 выполняется равенство

$$\Delta = Y'^2 F_r - X'Y'F_s + X'^2 F_t = 0, \tag{4.5}$$

то эта кривая называется характеристикой уравнения (4.1).

Предположим, что параметр α можно исключить из соотношений

$$x = X(\alpha), \quad y = Y(\alpha).$$

Тогда приходим к неявной форме задания характеристики $h(x, y) = 0$. Несложно получить аналог условия (4.5) для функции h. Действительно, дифференцируя по α равенство $h(X(\alpha),\ Y(\alpha)) = 0$, имеем соотношение

$$h_x X' + h_y Y' = 0.$$

Используя это соотношение, (4.5) можно переписать в виде

$$F_r h_x^2 + F_s h_x h_y + F_t h_y^2 = 0. \tag{4.6}$$

В таком виде обычно задается уравнение для характеристик.

В дальнейшем предполагаем, что квадратичная форма

$$F_r v^2 + F_s vw + F_t w^2$$

не является положительно определенной. В этом случае левая часть (4.6) раскладывается на линейные множители

$$(\lambda_1 h_x + \lambda_2 h_y)(\lambda_3 h_x + \lambda_4 h_y).$$

Тогда операторы

$$\lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}, \quad \lambda_3 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_4 \frac{\partial}{\partial y}$$

являются операторами дифференцирования по направлению характеристик уравнения (4.1).

Обозначим производные $\dfrac{\partial u^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j}$ через $u_{i,j}$. Операторы полного дифференцирования по x и y формально представляются в виде бесконечных сумм

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{i,y \geqslant 0} u_{i+1,j} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{i,y \geqslant 0} u_{i,j+1} \frac{\partial}{\partial u_{ij}}.$$

О п р е д е л е н и е. Пусть

$$l = \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

является дифференцированием по направлению характеристик уравнения (4.1). Тогда

$$L = \lambda_1 D_x + \lambda_2 D_y \tag{4.7}$$

называется *оператором полного дифференцирования вдоль характеристик уравнения* (4.1).

О п р е д е л е н и е. Пусть L — оператор полного дифференцирования вдоль характеристики уравнения (4.1). Функция $H : J^k(R^2, R) \to R$ называется *инвариантом характеристики порядка* k, если

$$LH|_{[E]} = 0. \tag{4.8}$$

Здесь $[E]$ обозначает уравнение (4.1) и его дифференциальные следствия $D_x^i D_y^j F = 0$.

Например, функции

$$I_1 = u, \quad I_2 = \frac{u_y}{u_x}, \quad I_3 = x + \frac{u_y}{u_x} y$$