Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

Ф.С. Хайруллин

РАСЧЕТ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ НА ОСНОВЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ С КОНЕЧНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Монография

Казань
Издательство КНИТУ
2012

УДК 531

Хайруллин Ф.С.

Расчет тонкостенных конструкций сложной формы на основе аппроксимирующих функций с конечными носителями : монография / Ф.С. Хайруллин; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2012. – 176 с.

ISBN 978-5-7882-1335-4

В книге представлены результаты исследований в области статического расчета тонкостенных конструкций сложной формы. Предложен метод построения аппроксимирующих функций с конечными носителями, отличительная особенность которого заключаются в том, что в пределах некоторой подобласти в аппроксимирующих функциях путем соответствующего преобразования системы координат и выбора вида этих функций разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Это позволяет выполнять кинематические условия стыковки различных тонкостенных объектов в виде оболочек, ребер и стержней. С использованием данных функций на основе вариационного метода определяются напряженно-деформированные состояния оболочек сложной формы, составных оболочек, стержневых систем, оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, и оболочечно-стержневых конструкций.

Предложены алгоритмы построения аппроксимирующих сглаживающих функций, заданных совокупностью точек, используемых для параметризации срединных поверхностей и граничных линий оболочек.

Предназначена для научных и инженерно-технических работников, аспирантов и магистров, обучающихся по направлению 151000 - Технологические машины и оборудование.

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю.П. Артюхин*
д-р техн. наук, проф. *Ф.А. Шамсутдинов*

ISBN 978-5-7882-1335-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Тонкостенные конструкции в настоящее время являются одними из наиболее распространенных элементов конструкций, применяемых в современной технике. По всей видимости, ни одна область человеческой деятельности, связанная с научно-техническим прогрессом или с бытовой жизнью человека, не обходится без соприкосновения с такими объектами, как пластинчатые, оболочечные или стержневые элементы. Даже в самой природе много объектов, являющихся по форме тонкостенными конструкциями. Это связано с тем, что благодаря своей конфигурации такие элементы являются с одной стороны довольно прочными и жесткими, с другой стороны достаточно легкими и экономичными, что делает их в конечном итоге эффективными. Если в начальный период вопросы расчета и использования тонких пластин и оболочек были связаны с потребностями строительства, то в настоящее время наиболее сложные задачи в этой области возникают в связи с потребностями таких областей промышленности, как машиностроение, авиационная и космическая техника, автомобилестроение и медицина.

Разрешающие уравнения теории тонкостенных конструкций является достаточно сложными, особенно при определении напряженно-деформированного состояния конструкций сложной формы. Аналитические решения можно получить только для некоторых видов конструкций при простейших случаях нагружения. Поэтому для решения прикладных задач используются в основном приближенные или численные методы. Ниже приводится краткий обзор основных методов, используемых для расчета оболочек сложной формы.

В последние десятилетия при решении задач механики деформируемого твердого тела наибольшее развитие и распространение получил метод конечных элементов (МКЭ), который сочетает универсальность и эффективность с простатой и удобством при численной реализации задачи. Фундаментальным исследованиям по МКЭ и вопросам численной реализации метода посвящено большое количество работ, в частности, [9, 29, 35, 43, 44, 77, 78, 93, 104, 114, 115, 129]. В работах [22, 46, 57, 58, 95, 97, 150, 154, 155, 164, 165, 166, 167] и других данный метод используется для определения напряженно-деформированного состояния оболочек сложной формы.

Одним из универсальных численным методом расчета некоторых видов конструкций является метод конечных разностей (МКР). При использовании этого метода исследуемая область разбивается на прямоугольные подобласти, в пределах которых производные от искомых функций заменяются разностными отношениями. По данной теме опубликовано довольно много работ. Некоторые проблемы построения и решения разностных схем рассмотрены в работах [6, 7, 10, 19, 23, 37, 40, 50, 55, 60, 61, 74, 90, 127, 128] и др.

В достаточно общей постановке вопросы расчета оболочек сложной геометрии исследовались в работах [53, 54, 81 - 84]. В этих работах для оболочек неканонической формы и неканонических очертаний параметризация срединных поверхностей производилась на основе теории конечных деформаций поверхностей.

К одним из первых численных методов расчета тонкостенных конструкций относятся методы коллокации, в которых неизвестные параметры, определяющие искомые функции, находятся из условия удовлетворения исходных уравнений в заданной системе точек. Начиная с первых публикаций [50, 51], методы коллокации успешно использовались при решении задач расчета пластин и оболочек сложной формы, в том числе в работах [16, 31, 39, 45, 105, 106, 127].

Другим эффективным методом расчета пластин и оболочек сложной формы является метод граничных элементов (МГЭ), в основе которого лежит известный в задачах математической физики метод потенциалов. В отличие от метода конечных элементов в МГЭ дискретизации подлежат лишь границы рассматриваемых объектов и задача сводится к решению граничных интегральных уравнений. По теоретическим основам метода и вопросам его практического применения имеются многочисленные публикации, в том числе разработаны монографии [4, 11, 14, 15, 21, 48, 59, 63, 123, 135].

Также можно отметить следующие методы расчета оболочек сложной формы. В работах [72, 109 - 111] предлагается постановка задачи и метод расчета оболочек с резными срединными поверхностями. Интегрально-проекционный метод для решения задач расчета оболочек используется в работах [86, 99, 112, 113]. Возможность использования для определения деформаций оболочек соотношений из теории пластин показана в работах [117 - 119].

Расчет конструкций, составленных из нескольких видов оболочек или пластин, т.е. составных конструкций, производится в основном вариационными или численными методами, в частности методом конечных элементов или методом суперэлементов. Вопросы постановки и численной реализации данных задач рассмотрены, например, в монографиях [17, 69, 73, 94], а также в работах [8, 30, 32, 33, 41, 47, 62, 64, 66, 79, 85, 89, 122, 131, 170].

Некоторые из методов решения задач механики деформируемого твердого тела основаны на использовании вариационных принципов [1, 20, 70, 71, 91]. Такие методы называются вариационными. К ним относятся метод Ритца, метод Бубнова - Галеркина, вариационно-разностные методы, метод конечных элементов в вариационной постановке и др. При их использовании возникает вопрос выбора аппроксимирующих функций, которые должны обладать определенными свойствами и удовлетворять определенным условиям. Например, при использовании вариационного уравнения Лагранжа, построенного на основе уравнений теории оболочек типа Тимошенко, аппроксимирующие решение функции должны обладать гладкостью класса $C^{(0)}$, составлять полную систему функций и удовлетворять геометрическим граничным условиям. Если оболочка имеет сложную форму, то выбор таких функций вызывает определенные трудности. Одним из методов построения аппроксимирующих функций является метод R-функций В.Л. Рвачева [100 - 102].

Опубликовано довольно много работ, посвященных построению аппроксимирующих функций и использованию этих функций для решения задач расчета оболочек сложной формы. В дополнение к тем методам, которые касались этой темы и изложены выше, можно отметить работы [67, 68, 103, 168, 169] и др.

При решении задач расчета оболочек сложной геометрии могут возникнуть вопросы численной параметризации срединной поверхности и граничных линий оболочек. Причем, аппроксимация радиуса-вектора r срединной поверхности оболочки должна производиться с достаточно большой точностью. Как показывают численные эксперименты, возможная осцилляция даже во вторых производных от r может привести к большим погрешностям в решении задачи, т.к. эти производные определяют радиусы кривизны оболочки. Среди основных аналитических и численных методов параметризации срединной поверхности оболочек сложной формы можно выделить следующие: метод деформации поверхности отсчета; использование кубических и других сплайн-аппроксимаций; использование метода конечных разностей и метода конечных элементов; использование сглаживающей аппроксимации и т.д. Эти и другие методы параметризации поверхностей и кривых рассмотрены в монографиях [28, 38, 42, 52, 67, 107, 138, 156], а также в работах [80, 82, 83, 96, 110, 120, 124 – 126, 154] и др.

Анализ приведенных методов расчета показывает, что хотя и существуют различные методы расчета тонкостенных конструкций сложной формы, однако универсального метода, применимого для любого случая, нет. Каждый из этих методов имеет свои положительные и отрицательные стороны, применим для определенных задач. Даже такой универсальный метод, как метод конечных элементов, имеет свои недостатки. Как отмечено в монографии А.И. Голованова и соавторов [36], несмотря на большое количество работ по методу конечных элементов и большое количество предложенных в этих работах конечных элементов, «лишь ограниченное количество их действительно эффективно в расчетах тонких непологих оболочек».

В работе Эдельмана, Казаринеса, Уолтона [153] исследуется влияние порядка аппроксимирующей функции на точность решения. На конкретных примерах показывается, что использование высокоточных конечных элементов, построенных на полиномах высокого порядка, позволяет получать более точные результаты на малом количестве элементов при меньших размерах матрицы жесткости, чем при использовании более простых конечных элементов. Однако при использовании функций высокой степени аппроксимации в узловых точках требуется задавать производные высоких порядков, например, производные второго порядка. Это приводит к усложнению формулировки и выполнения граничных условий, а при расчете составных оболочек создает проблемы с выполнением условий сопряжения на изломе срединной поверхности оболочки.

При численной параметризации срединной поверхности оболочки аппроксимирующая функция должна удовлетворять определенным требованиям гладкости функции. Например, если используется классическая теория оболочек, то необходимо обеспечить непрерывность функции класса $C^{(2)}$. Такого рода непрерывность могут обеспечить кубические сплайн аппроксимации. Однако в этом случае необходимо задавать значения производных в узловых точках, что сделать с достаточной точностью не очень просто, а в некоторых случаях вообще не возможно.

В первой главе предлагается метод построения аппроксимирующих функций с конечными носителями иерархического типа. Отличительная особенность метода заключается в том, что в пределах некоторой криволинейной четырехугольной или треугольной подобласти оболочки в аппроксимирующих функциях, путем соответствующего преобразования системы координат и выбора этих функций, разделяются параметры, определяющие искомые функции внутри подобласти и на ее границах. Причем, аппроксимирующие функции на границах области являются инвариантными величинами относительно преобразования системы координат. Это позволяет выполнять кинематические условия стыковки этих подобластей и удовлетворять геометрическим граничным условиям.

Для определения напряженно-деформированного состояния тонких оболочек используется теория оболочек типа Тимошенко и вариационный принцип Лагранжа, на основе которых с использованием предложенных аппроксимирующих функций строятся методы решения задач для оболочек сложной формы в плане, а также составных оболочек. Рассматриваются вопросы построения матрицы жесткости конструкции, особенности численной реализации задачи.

Во второй главе излагаются алгоритмы построения аппроксимирующих сглаживающих функций, которые используются для описания линий и поверхностей, заданных совокупностью точек.

Для построения сглаживающих функций предлагается использовать функционал, в котором с механической точки зрения в основе условия «изгибания» поверхности лежит теория оболочек типа Тимошенко. Это приводит к уменьшению порядка производных в функционале. В качестве сглаживающих функций берутся функции, предложенные в предыдущей главе для аппроксимации компонентов перемещений оболочек.

В третьей главе показывается возможность использования предложенного в первой главе метода расчета тонких оболочек и стержней для моделирования напряженно-деформированного состояния составных тонкостенных конструкций, элементами которых являются оболочки и стержни. Рассматриваются методы расчета составных оболочек, оболочек, подкрепленных ребрами жесткости, оболочечно-стержневых конструкций. В связи с использованием единого подхода и одинаковых функций форм для расчета оболочек и стержней оказывается возможным довольно простое соединение разных оболочек друг с другом, оболочек с ребрами жесткости, оболочек и стержней.

Предложенный метод позволяет также при решении сложных задач создавать элементы типа суперэлементов, в которых определенная часть степеней свободы исключается при формировании глобальной матрицы жесткости конструкции, что приводит к значительному уменьшению порядка окончательной системы уравнений.

В четвертой главе приводятся примеры решения конкретных задач. Проводится сравнение с решениями других авторов. На численных примерах доказывается достоверность полученных результатов и эффективность рассмотренного в работе метода. Показываются основные возможности данного метода.

ГЛАВА 1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК И СТЕРЖНЕЙ

В данной главе приводятся определяющие уравнения теории тонких оболочек типа Тимошенко. Приводится порядок построения аппроксимирующих функций с конечными носителями иерархического типа для четырехугольных и треугольных подобластей, на основе которых строится вариационный метод расчета тонких оболочек сложной формы в плане, а также составных оболочек. Данный метод используется для определения напряженно-деформированного состояния тонких стержней. Показываются порядок формирования матрицы жесткости конструкций и особенности численной реализации задачи.

1.1. Основные соотношения теории тонких оболочек.

Рассмотрим деформирование тонкой оболочки, срединная поверхность которой имеет сложную форму в плане. Пусть срединная поверхность оболочки задана в гауссовой ортогональной системе координат в линиях главной кривизны. Предполагается, что перемещения и деформации малы, материал оболочек изотропен, справедлив закон Гука.

Для определения напряженно-деформированного состояния оболочек используются соотношения теории оболочек типа Тимошенко [26, 87] без учета обжатия поперечных слоев, на основании которых перемещения произвольной точки оболочки представляются в виде:

$$U_1 = u_1(\alpha_1, \alpha_2) + \xi \psi_2(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$U_2 = u_2(\alpha_1, \alpha_2) - \xi \psi_1(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$U_3 = w(\alpha_1, \alpha_2),$$

где U_1, U_2, U_3 - компоненты перемещения произвольной точки оболочки; $u_1, u_2, w, \psi_1, \psi_2$ - компоненты перемещения и углов сдвига срединной поверхности оболочки; α_1, α_2, ξ - ортогональная криволинейная система координат, связанная со срединной поверхностью оболочки; ξ - координата, направленная по нормали к оболочке.

Деформации тонкой оболочки определяются через перемещения по формулам

$$
\begin{gathered}
e_1 = \varepsilon_1 + \xi\,\kappa_1, \quad e_2 = \varepsilon_2 + \xi\,\kappa_2, \\
\gamma_{12} = \varepsilon_{12} + \xi\,\kappa_{12}, \quad \gamma_{13} = \varepsilon_{13}, \quad \gamma_{23} = \varepsilon_{23}.
\end{gathered} \tag{1.1.1}
$$

Здесь

$$
\begin{gathered}
\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + k_1 w, \\
\varepsilon_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + k_2 w, \\
\varepsilon_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right), \\
\varepsilon_{13} = \psi_2 + \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1} - k_1 u_1, \\
\varepsilon_{23} = -\psi_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2} - k_2 u_2, \\
\kappa_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1} - \frac{\psi_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}, \\
\kappa_2 = -\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2} + \frac{\psi_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}, \\
\kappa_{12} = \frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\psi_2}{A_1}\right) - \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\psi_1}{A_2}\right) + k_1\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right) \\
+ k_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right),
\end{gathered} \tag{1.1.2}
$$

$e_1, e_2, \gamma_{12}, \gamma_{13}, \gamma_{23}$ - компоненты деформации произвольной точки оболочки; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_{12}$ - компоненты деформации срединной поверхности; A_1, A_2, k_1, k_2 - коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки.

Формулы для вычисления усилий и моментов в оболочке имеют вид

$$N_i = B_1\left(\varepsilon_i + \nu\varepsilon_j\right), \quad S = \frac{1}{2}B_1(1-\nu)\varepsilon_{12},$$

$$M_i = B\left(\kappa_i + \nu\kappa_j\right), \quad H = \frac{1}{2}B(1-\nu)\kappa_{12}, \tag{1.1.3}$$

$$Q_i = \frac{1}{2}k\,B_1(1-\nu)\varepsilon_{i3}, \quad i = \overline{1,2},\ j \neq i,$$

где N_1, N_2, S - усилия; M_1, M_2, H - изгибающие и крутящий моменты; Q_1, Q_2 - поперечные силы; $B_1 = \dfrac{Eh}{1-\nu^2}$, $B = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ - мембранная и изгибная жесткости оболочки; E, ν - соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона; h - толщина оболочки; k - коэффициент сдвига.

На основании закона Гука напряжения в оболочке определяются по формулам:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(e_1 + \nu e_2),$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}(e_2 + \nu e_1),$$

$$\tau_{12} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{12},$$

$$\tau_{13} = k\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{13} f(z),$$

$$\tau_{23} = k\frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{23} f(z),$$

где *f(z)* – функция, характеризующая распределение напряжений по толщине оболочки.

Подставляя в эти соотношения формулы (1.1) с учетом соотношений (1.2) – (1.3), получим следующие выражения для определения напряжений:

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= \frac{1}{h}\left(N_1 + \frac{12\xi}{h^2} M_1\right),\\
\sigma_2 &= \frac{1}{h}\left(N_2 + \frac{12\xi}{h^2} M_2\right),\\
\tau_{12} &= \frac{1}{h}\left(S + \frac{12\xi}{h^2} H\right),\\
\tau_{13} &= \frac{Q_1}{k^2} f(z),\\
\tau_{23} &= \frac{Q_2}{k^2} f(z).
\end{aligned} \tag{1.1.4}
$$

Потенциальная энергия деформации оболочки, приведенная к срединной поверхности Ω, имеет вид

$$
\Pi = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \left(N_1\varepsilon_1 + N_2\varepsilon_2 + S\varepsilon_{12} + M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + H\kappa_{12} + \right.
$$
$$
\left. + Q_1\varepsilon_{13} + Q_2\varepsilon_{23}\right) d\Omega .
$$

С учетом геометрических (1.2) и физических (1.3) соотношений потенциальная энергия деформации оболочки записывается через компоненты перемещения следующим образом:

$$
\Pi = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \left\{ B_1 \left[\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w \right)^2 + \right.\right.
$$
$$
+ \left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w \right)^2 +
$$
$$
+ 2\nu \left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + k_1 w \right) \times
$$
$$
\times \left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + k_2 w \right) +
$$
$$
+ \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{u_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{u_2}{A_2}\right) \right)^2 +
$$

$$
+\frac{k^2(1-\nu)}{2}\left(\left(\psi_2+\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}-k_1u_1\right)^2+\left(-\psi_1+\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-k_2u_2\right)^2\right)\Bigg]+
$$

$$
+B\Bigg[\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\psi_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)^2+\left(-\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\psi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)^2+
$$

$$
+2\nu\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{\psi_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)\left(-\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}+\frac{\psi_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)+
$$

$$
+\frac{1-\nu}{2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{\psi_2}{A_1}\right)-\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{\psi_1}{A_2}\right)+k_1\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{u_2}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\right)+\right.
$$

$$
\left.\left.+k_2\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{u_1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\right)\right)^2\Bigg]\right\}d\Omega \qquad (1.1.5)
$$

При решении задачи используется вариационный принцип Лагранжа [1]. В связи с этим приведем выражение вариации работы внешних сил:

$$
\delta' W=\iint_{\Omega}(q_1\delta u_1+q_2\delta u_2+q\delta w)d\Omega+
$$

$$
+\sum_i(F_{i1}\delta u_{1i}+F_{i2}\delta u_{2i}+F_{i3}\delta w_i) \qquad (1.1.6)
$$

где q_1, q_2, q_3 - компоненты распределенной нагрузки; F_{i1}, F_{i2}, F_{i3} - компоненты *i*-той сосредоточенной силы.

1.2. Аппроксимирующие функции с конечным носителем для четырехугольных подобластей.

Рассмотрим на срединной поверхности Ω тонкой оболочки подобласть Ω_k в виде криволинейного четырехугольника (рис.1.2.1), границы которого описываются уравнениями $\alpha_2=f_1(\alpha_1), \alpha_2=f_2(\alpha_1)$, $\alpha_1=f_3(\alpha_2)$, $\alpha_1=f_4(\alpha_2)$, где f_i- однозначные функции класса C^1. Пусть поверхность Ω является поверхностью класса C^1, а граничные линии могут не совпадать с координатными линиями системы координат α_1, α_2.

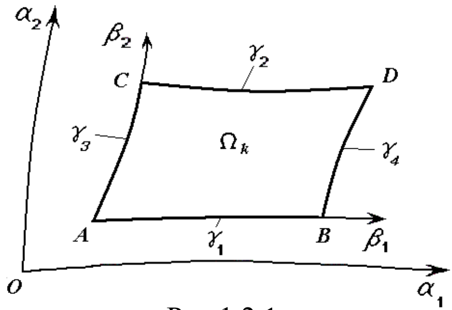

Рис.1.2.1

В подобласти Ω_k вводится локальная система координат β_1, β_2, которая связана с системой координат α_1, α_2 следующим образом:

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 = {} & f_3\left(g_3\left(s_3^*\beta_2\right)\right)(1-\beta_1) + f_4\left(g_4\left(s_4^*\beta_2\right)\right)\beta_1 + \\
& + \left[g_1\left(s_1^*\beta_1\right) - \alpha_{11}(1-\beta_1) \quad - \alpha_{12}\beta_1\right](1-\beta_2) + \\
& + \left[g_2\left(s_2^*\beta_1\right) - \alpha_{13}(1-\beta_1) \quad - \alpha_{14}\beta_1\right]\beta_2, \\
\alpha_2 = {} & f_1\left(g_1\left(s_1^*\beta_1\right)\right)(1-\beta_2) + f_2\left(g_2\left(s_2^*\beta_1\right)\right)\beta_2 + \\
& + \left[g_3\left(s_3^*\beta_2\right) - \alpha_{21}(1-\beta_2) \quad - \alpha_{23}\beta_2\right](1-\beta_1) + \\
& + \left[g_4\left(s_4^*\beta_2\right) - \alpha_{22}(1-\beta_2) \quad - \alpha_{24}\beta_2\right]\beta_1,
\end{aligned}
\tag{1.2.1}
$$

где

$$
s_i = q_i\left(\alpha_1\right) \equiv \int_{\alpha_{1,2i-1}}^{\alpha_1} \sqrt{A_{1i}^2 + A_{2i}^2\, f'^2_i(\alpha_1)}\; d\alpha_1,
$$

$$
s_j = q_j\left(\alpha_2\right) \equiv \int_{\alpha_{2,i}}^{\alpha_2} \sqrt{A_{1j}^2 + A_{2j}^2\, f'^2_j(\alpha_2)}\; d\alpha_2,
$$

$s_i^* = q_i(\alpha_{1,2i})$, $s_j^* = q_j(\alpha_{2,j})$ - длины дуг кривых γ_i, γ_j; $\alpha_1 = g_i(s_i)$, $\alpha_2 = g_j(s_j)$ - функции обратные к функциям $s_i = q_i(\alpha_1)$, $s_j = q_j(\alpha_2)$

$j = i + 2,\ i = \overline{1,2}$; A_{1i}, A_{2i} - коэффициенты первой квадратичной формы, вычисленные на линиях γ_i; $(\alpha_{1i}, \alpha_{2i})$ - координаты угловых точек *A, B, C, D;* $i = \overline{1,4}$.

В системе координат β_1, β_2 граничные линии совпадают с координатными линиями $\beta_1 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 0,\ \beta_2 = 1$, т.е. подобласть Ω_k занимает область $0 \le \beta_1, \beta_2 \le 1$.

Система координат β_1, β_2 введена таким образом, что на граничных линиях γ_i уравнения (2.1) переходят в уравнения этих линий. Например, уравнение кривой γ_1 получается при $\beta_2 = 0$:

$$\alpha_1 = g_1\left(s_1^* \beta_1\right), \alpha_2 = f_1\left(g_1\left(s_1^* \beta_1\right)\right),$$

уравнение кривой γ_4 при $\beta_1 = 1$:

$$\alpha_1 = f_4\left(g_4\left(s_4^* \beta_2\right)\right), \alpha_2 = g_4\left(s_4^* \beta_2\right).$$

Отметим, что на линиях γ_i координатная сетка является равномерной, т.к. координаты β_1, β_2 на них являются фактически дуговыми безразмерными координатами.

В подобласти Ω_k искомые функции аппроксимируются функциями, заданными в системе координат β_1, β_2, следующим образом:

$$U = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} D_{mn}^k\, t_m(\beta_1)\, t_n(\beta_2), \tag{1.2.2}$$

где U - вектор перемещений и углов поворота срединной поверхности подобласти Ω_k, заданный в системе координат α_1, α_2; D_{mn}^k - вектор неизвестных постоянных; функции формы

$$t_1(\beta_1) = 1 - \beta_1,\ t_2(\beta_1) = \beta_1,$$

$$t_m(\beta_1) = t_1(\beta_1)\,[t_2(\beta_1)]^{m-2} \left(m = \overline{3, M}\right) \tag{1.2.3}$$

На границах подобласти