МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «ПЕНЗЕНСКАЯ ГСХА»

Кафедра физики и математики

Н.М. Семикова

МАТЕМАТИКА

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ЧАСТЬ 2

Пенза 2014

УДК 519.2(075)
ББК 22.171(я7)
С 30

Рецензент: старший преподаватель кафедры «Организация и информатизация производства» Пензенской ГСХА О. В. Ментюкова.

Печатается по решению методической комиссии экономического факультета ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА» от 24 февраля 2014 года, протокол № 64.

Семикова, Наталья Михайловна.
С30 Математика. Теория вероятностей: методические указания и задания для самостоятельной работы. Часть 2 / Н.М. Семикова. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – 84 с.

Методические указания и задания предназначены для выполнения самостоятельной работы по математике студентам, обучающимся по направлениям 080200 «Менеджмент» и 080100 «Экономика» (квалификация – бакалавр).

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по основным темам курса теории вероятностей, решения типовых задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения, что позволяет использовать пособие для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие является продолжением (второй частью) методических разработок для студентов, обучающихся по направлению подготовки 080200 «Менеджмент» при изучении раздела «Теория вероятностей» дисциплины Б.2.1 «Математика», и по направлению подготовки 080100 «Экономика» при изучении дисциплины Б.2.3 «Теория вероятностей и математическая статистика».

Вторая часть пособия включает в себя следующие темы: «Понятие случайной величины. Способы задания дискретной случайной величины», «Числовые характеристики дискретной случайной величины», «Законы распределения дискретной случайной величины», «Непрерывная случайная величина. Функция и плотность распределения», «Числовые характеристики непрерывной случайной величины», «Законы распределения непрерывной случайной величины» и задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы в качестве расчетно-графической работы.

Каждая тема содержит краткие теоретические сведения, методические рекомендации по использованию основных теорем и формул, подробно разобранные примеры решения задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами. Задачи соответствуют профилю вуза и составлены, в основном, по материалам сельскохозяйственной практики автора пособия.

Для контроля освоения раздела «Теория вероятностей» рекомендуется использовать задания для самостоятельной работы, включающие 30 вариантов, которые представлены в пособии.

Рекомендуется следующий порядок работы над материалом каждой темы:

- изучение литературы по теме;
- разбор примеров решения задач;
- подготовка ответов на контрольные вопросы;
- самостоятельное решение задач.

ТЕМА 1 ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Литература
[1], глава 3, § 3.1, 3.2.
[2], глава 6, § 1, 2, 3.

Случайные величины

Случайной величиной называют такую величину, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины подразделяются на дискретные и непрерывные.

Случайная величина, принимающая конечное или бесконечное, но счетное множество значений, называется *дискретной*.

Множество называется *счетным*, если каждому элементу множества можно поставить в соответствие единственное натуральное число.

Если же множество возможных значений случайной величины несчетно, то такая величина называется *непрерывной*.

То есть, дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и т.д.).

Для полного описания случайной величины недостаточно лишь знания ее возможных значений, необходимо еще знать вероятности этих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_m; \ldots$.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называется *законом распределения случайной величины* (или просто: *распределением*).

Способы задания дискретной случайной величины

Функциональная зависимость вероятности p_i от x_i (или функция, связывающая значения x_i с соответствующими вероятностями) называется *законом распределения дискретной случайной величины*

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1,2,3,\ldots,n,\ldots.$$

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде *таблицы распределения*:

X:

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_i	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

где первая строка содержит все возможные значения (обычно в порядке возрастания) случайной величины, а вторая – их вероятности. Такую таблицу называют *рядом распределения*.

Так как события $\{X = x_1\}, \{X = x_2\}, \ldots$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать *графически*, если на оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2), \ldots$ называют *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения* (*рисунок 1*).

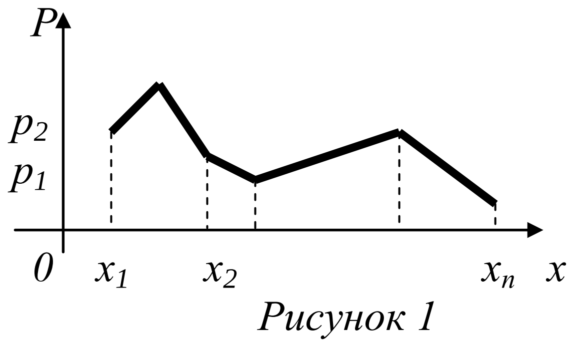

Рисунок 1

Зависимость между значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями также можно задать *аналитически,* т. е. в виде формулы.

Примеры решения задач

Пример 1.1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрываются один выигрыш в 1000 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X – стоимости возможного выигрыша на один лотерейный билет.

Решение.

Стоимость выигрыша на один лотерейный билет X может принимать возможные значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_2 = 1000$. Вероятности каждого x_i найдем по классической формуле:

$$p_1 = P(X = x_1) = \frac{89}{100}, \quad p_2 = P(X = x_2) = \frac{10}{100}, \quad p_3 = P(X = x_3) = \frac{1}{100}.$$

Запишем ряд распределения X :

x_i	0	100	1000
p_i	0,89	0,1	0,01

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

Построим многоугольник распределения (*рисунок 2*):

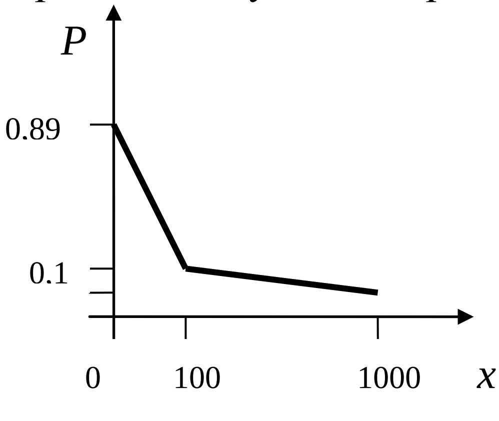

Рисунок 2

Пример 1.2. Имеется 10 семян ржи, среди которых 8 всхожих. Наудачу отобраны два из них. Составить ряд распределения числа всхожих семян среди отобранных.

Решение.

Обозначим X – число всхожих семян среди двух отобранных. Возможными значениями X будут: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вероятности p_i найдем по классической формуле $p_i = \dfrac{m_i}{n}$, где n – число всевозможных случаев отобрать 2 семя из 10, $n = C_{10}^2$, m_i – число благоприятствующих случаев отобрать i всхожих семян из 8 и $(2-i)$ невсхожих семян из 2.

$$p_1 = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = 0{,}022, \quad p_2 = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = 0{,}356, \quad p_3 = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = 0{,}622.$$

Следовательно, ряд распределения X имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,022	0,356	0,622

$$\text{Контроль: } \sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}022 + 0{,}356 + 0{,}622 = 1.$$

Пример 1.3. В партии куриных яиц 10% негодных. Составить закон распределения в табличной и аналитической формах дискретной случайной величины X – числа негодных яиц среди 5 отобранных наудачу.

Решение.

Выпишем возможные значения X:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$.

Вероятность каждого x_i найдем по формуле Бернулли, так как проверка каждого яйца (испытание) независима от результатов других проверок и вероятность появления события A (негодного яйца) постоянна и равна p=0,1, следовательно, q=0,9.

Тогда:

$$p_1 = P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}9^5 = 0{,}59049;$$

$$p_2 = P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 0{,}5 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}32805;$$
$$p_3 = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}0729;$$
$$p_4 = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081;$$
$$p_5 = P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = 0{,}0005 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}00045;$$
$$p_6 = P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}1^5 = 0{,}00001.$$

Итак,

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Можно проверить, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Запишем закон распределения X в аналитической форме с помощью формулы Бернулли:

$$p_i = P_5(i) = C_5^i p^i q^{5-i} \qquad \left(i = \overline{0,5}\right).$$

Пример 1.4. В городе 4 библиотеки, в каждой из которых студент может получить учебник Н. Ш. Кремера с вероятностью 0,3. Построить ряд распределения случайной величины X – числа библиотек, которые посетит студент, чтобы получить учебник.

Решение.

Посещение библиотеки можно считать испытанием (поиск книги), в каждом из которых событие A – учебник получен – может появиться с одной и той же вероятностью p =0,3. Причем, при первом же появлении A испытания прекращаются (получив учебник в i-той библиотеке, студент уже не посетит остальные библиотеки). Следовательно, дискретная случайная величина X – число проведенных испытаний, причем это число ограничено: $n \le 4$. Составим ряд распределения случайной величины X. Возможными значениями будут: 1, 2, 3, 4. Подсчитаем соответствующие вероятности.

Событие $X=1$ эквивалентно событию A –студент получит книгу в первой библиотеке. Тогда