Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Институт математики
и компьютерных наук

А. Ю. КОВРИЖНЫХ
О. О. КОВРИЖНЫХ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

А. Ю. Коврижных
О. О. Коврижных

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлению подготовки
080100 "Экономика"

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.9 (075.8)
К568

Рецензенты:
отдел динамических систем Института математики
и механики им. академика Н. Н. Красовского УрО РАН
(заведующий сектором отдела доктор
физико-математических наук Н. Ю. Лукоянов);
А. М. Соломатин, кандидат физико-математических наук,
доцент (Институт урбанистики Уральской государственной
архитектурно-художественной академии)

Коврижных, А.Ю.
К568 Дифференциальные и разностные уравнения : [учеб. пособие] / А. Ю. Коврижных, О. О. Коврижных. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. – 148 с.
ISBN 978-5-7996-1341-9

В учебном пособии рассматриваются разделы теории дифференциальных и разностных уравнений. Приводятся примеры применения методов непрерывного и дискретного моделирования в экономике. Даются задачи для практических занятий и самостоятельной работы.

Для студентов нематематических направлений.

УДК 517.9 (075.8)

ISBN 978-5-7996-1341-9

Оглавление

Предисловие

Цель данного пособия — оказать помощь студентам в освоении разделов образовательной программы по математике, посвященных дифференциальным и разностным уравнениям. Пособие содержит примеры, иллюстрирующие применение методов непрерывного и дискретного моделирования в физике, экономике, биологии и других сферах.

Изучение дифференциальных и разностных уравнений базируется на понятиях дифференциального и интегрального исчисления, для чего необходимо вспомнить понятия числовой последовательности, предела функции. Потребуются также знания и навыки из курсов математического анализа и линейной алгебры: дифференцирование и интегрирование функций одной переменной, свойства определенных интегралов, вычисление и свойства частных производных и дифференциалов функций многих переменных, алгебраические операции над матрицами, вычисление собственных чисел и собственных векторов квадратных матриц.

Настоящее пособие не является учебником и не может претендовать на полноту изложения. Для более глубокого и основательного изучения дисциплины полезно обращаться к литературе из списка библиографичеких ссылок [1–5, 8–11].

Пособие состоит из двух глав, разделенных на параграфы. В последней части даются вопросы для подготовки к экзамену и зачету, задания для практических занятий и ответы к ним. Некоторые из приведенных задач и примеров заимствованы из работ А. Р. Данилина, С. Г. Лобанова, В. К. Романко, П. М. Симонова, А. Ф. Филиппова. Отметим также, что изложение материала в значительной степени соответствует содержанию курса “Дифференциальные и разностные уравнения”, который читается авторами студентам Высшей школы экономики и менеджмента Уральского федерального университета.

В пособии для обозначения множеств натуральных, вещественных и комплексных чисел используются символы $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Конец доказательств и примеров обозначается символом $\square$.

Авторы выражают глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору А. Р. Данилину за внимание к работе и ценные замечания, что позволило существенно улучшить изложение материала.

Введение

Дифференциальные и разностные уравнения являются эффективным инструментом математического моделирования. Слово “модель” обозначает такой материальный или знаковый объект, который в процессе познания реальности заменяет объект-оригинал. При описании многих физических и экономических объектов и процессов применяют знаковые модели. Предполагается, что изучение модели дает новые знания о моделируемом объекте.

Необходимость применения моделей обусловлена тем, что некоторые объекты непосредственно исследовать невозможно, например, экономическую эффективность строящихся предприятий. Часто эксперименты с реальными объектами требуют много времени и средств, а применение моделирования решает эти задачи. Различают прикладные и теоретические модели. Например, результатом прикладного моделирования в экономике являются модели, дающие числовые значения экономических показателей. При изучении качественной характеристики объекта исследования используют теоретические модели. К ним относятся модели рыночного равновесия, модели оптимизации прибыли и др.

При построении модели надо учитывать, что она не является точной копией объекта. Модель должна адекватно отражать только такие характеристики и свойства объекта моделирования, которые необходимо изучить.

Назовем основные этапы математического моделирования. На первом этапе рассматривается задача из реальной жизни, собирается информация для построения модели. Затем на основе собранной информации строится математическая модель объекта-оригинала (уравнение, формула, система и т. п.). С этой моделью производятся математические операции, направленные на решение полученных уравнений и систем. Далее от полученных математических результатов мы вновь возвращаемся к реальному миру и смотрим, что же эти результаты нам говорят о той реальной задаче, которая была поставлена.

Физические, экономические и социальные процессы развиваются во времени и являются динамическими процессами, характеризующимися скоростью протекания. Поэтому многие из них описываются дифференциальными уравнениями. Разностные уравнения возникают, например, в моделях экономической динамики с дискретным временем.

Глава 1

Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Основные определения и примеры

Дифференциальным называют уравнение, связывающее независимые переменные, искомые функции и производные от искомых функций. *Порядком* дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной, входящей в уравнение.

Обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) называется такое уравнение, в котором искомые функции зависят лишь от одной независимой переменной и все они и их производные входят в уравнение в виде своих значений в одной и той же переменной точке. Например, уравнение

$$y'(x) = y^2(x)$$

является ОДУ первого порядка. Часто в записи ОДУ аргументы у неизвестной функции и ее производных опускают, поскольку они одинаковы. Приведем примеры уравнений, не являющихся обыкновенными дифференциальными. Уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

является уравнением *в частных производных*. Оно содержит частные производные неизвестной функции z, зависящей от двух переменных x и y. Уравнение

$$x'(t) = x(t-1)$$

есть уравнение *с запаздыванием*, в нем значения неизвестной функции и ее производной вычислены в разных точках.

Мы будем изучать только обыкновенные дифференциальные уравнения.

Общий вид *обыкновенного дифференциального уравнения n-го порядка с одной искомой функцией*:

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1.1}$$

где y — искомая функция аргумента x; $F = F(x, y, y_1, ..., y_n)$ — известная функция от $(n + 2)$-х аргументов.

Решением уравнения (1.1.1) в интервале (α, β) называется функция $y = \varphi(x)$, обращающая это уравнение в тождество в интервале (α, β), т. е. если для любого $x \in (\alpha, \beta)$ выполняется равенство

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Замечание 1.1.1. Определение решения включает в себя требование возможности его подстановки в уравнение (1.1.1), в частности, у функции $y = \varphi(x)$ должны существовать все производные до порядка n включительно на интервале (α, β).

Задание. Выписать из следующих функций:

$$\begin{array}{llll} y = e^{3x} - 1, & y = 2e^{-2x}, & y = e^{-x} + 4, & y = e^{-2x} + 1, \\ y = 2e^{-x}, & y = e^{3x} - 2, & y = e^{-3x}, & y = 3e^{x} - 6 \end{array}$$

решения уравнения

$$y' = 3y + 6$$

на $\mathbb{R}$, а для остальных функций доказать, что они не являются решениями.

Пример 1.1.1. Задачу отыскания всех первообразных данной функции f можно записать в виде уравнения

$$y' = f(x), \tag{1.1.2}$$

где f — заданная функция; $y = y(x)$ — неизвестная функция, $y' = \frac{dy}{dx}$. Это уравнение представляет собой простейший пример ОДУ. Как доказывается в интегральном исчислении, если f непрерывна на некотором промежутке, то уравнение (1.1.2) имеет на нем бесконечное семейство решений, которое задается формулой

$$y = F(x) + C,$$

где F — какая-нибудь фиксированная первообразная функции f, а параметр C пробегает все вещественные значения.

Пример 1.1.2. Свойством функции $y = e^x$ является то, что она совпадает со своей производной. Это свойство записывается в виде ОДУ

$$y' = y, \tag{1.1.3}$$

решениями которого, наряду с e^x, будут все функции семейства

$$y = C\, e^x,$$

где C пробегает все вещественные значения.

Пример 1.1.3. На тело (материальную точку) массы m, падающее по вертикальной прямой, принятой за ось Oy, действует сила тяжести $F = mg$. Если $y = y(t)$ есть координата точки в момент времени t, то по закону Ньютона ($m\overline{w} = \overline{F}$, где $\overline{w}$ — ускорение, $\overline{F}$ — сила) $my'' = mg$, или

$$y'' = g, \tag{1.1.4}$$

где y'' — ускорение движущейся точки. Уравнение (1.1.4) является ОДУ второго порядка с искомой функцией $y(t)$, разрешенное относительно старшей производной. Легко проверить подстановкой в уравнение (1.1.4), что его решением является всякая функция $y = \frac{1}{2}g\,t^2 + C_1 t + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные числа.

Пример 1.1.4 (модель роста населения (демографический процесс)). Из статистических данных известно, что для некоторого региона число новорожденных и число умерших за единицу времени пропорциональны численности населения с коэффициентами пропорциональности k_p и k_c соответственно. Это предположение приближенно выполняется, пока ресурсов достаточно много, и условия для жизни благоприятны. Найдем закон изменения численности населения с течением времени.

Отвлекаясь от того, что численность населения может измеряться только целыми числами, обозначим $y = y(t)$ число жителей региона в момент времени t. Прирост населения за время Δt равен разности между числом родившихся и умерших за это время, т. е.

$$\Delta y = k_p y(t)\Delta t - k_c y(t)\Delta t.$$

Разделим обе части равенства на Δt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ky,$$

где $k = k_p - k_c$ — коэффициент естественного прироста населения. Перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$, получим дифференциальное уравнение

$$y' = ky. \tag{1.1.5}$$

Это уравнение было получено *Мальтусом* и называется *уравнением мальтузианского роста.* Его решение (как можно убедиться с помощью непосредственной подстановки в уравнение (1.1.5)) дается множеством функций

$$y = C\,e^{kt},$$

где C – произвольное действительное число. Если известно, что в начальный момент времени $t = 0$ численность населения составляла величину y_0, то зависимость численности населения от времени определяется формулой

$$y(t) = y_0\, e^{kt}.$$

Анализируя эту зависимость, можно прогнозировать рост численности населения в зависимости от коэффициента естественного прироста и времени. В частности, для удвоения количества населения требуется всегда одно и то же время $T = k^{-1} \ln 2$, независимо от его количества. Однако данная простая модель корректно описывает только начальный этап роста населения на относительно небольшом промежутке времени. Точность экспоненциальной модели снижается по мере роста населения вследствие конкуренции за ресурсы. Коэффициент естественного прироста можно считать постоянным лишь на относительно небольшом отрезке времени.

Пример 1.1.5 (эффективность рекламы). Средства массовой информации объявили о поступлении в магазины города нового товара. В начальный момент времени $t = 0$ это известие дошло до N_1 человек из числа N потенциальных покупателей товара. Нужно найти функцию $x = x(t)$, которая определяла бы число $x(t)$ покупателей, узнавших о поступлении товара в момент времени t. Экономисты считают правдоподобной гипотезу, согласно которой скорость $\frac{dx}{dt}$ распространения рекламы (хотя бы “из уст в уста”) пропорциональна как $x(t)$, так и числу людей $N-x(t)$, еще не знающих о поступлении товара. Коэффициент пропорциональности обозначим буквой k. Получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x). \tag{1.1.6}$$

К этому уравнению мы вернемся позже. □

Мы видим, что, как правило, ОДУ имеет бесконечно много решений. Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется *интегрированием* ОДУ (так как в большинстве случаев нахождение решений ОДУ связано с вычислением интегралов).

1.2. Уравнения первого порядка

Изучение теории ОДУ начнем с ОДУ первого порядка, разрешенных относительно производной, т. е. с уравнений вида

$$y' = f(x, y). \tag{1.2.1}$$

Для ОДУ (1.2.1) условие вида $y(x_0) = y_0$ называется *начальным условием*, а задача нахождения решения, удовлетворяющего начальному условию

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

называется *задачей Коши* (или начальной задачей).

Геометрическая интерпретация уравнения, разрешенного относительно производной

График решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения (1.2.1) называется его *интегральной кривой*. Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в области Γ. Производная функции y' представляет собой угловой коэффициент касательной к кривой $y(x)$ в точке с абсциссой x. В геометрических терминах уравнение (1.2.1) выражает следующий факт: кривая на плоскости (x, y) является его интегральной кривой тогда и только тогда, когда в любой точке (x_0, y_0) этой кривой она имеет касательную с угловым коэффициентом $k = f(x_0, y_0)$. Таким образом, зная правую часть уравнения (1.2.1), мы можем заранее построить касательные ко всем интегральным кривым во всех точках. Для этого каждой точке (x_0, y_0) области Γ нужно