

Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

К.А. Абдулхаков, В.М. Котляр, С.Г. Сидорин

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Учебное пособие

Казань
Издательство КНИТУ
2012

УДК 539.3.8

Абдулхаков К.А.

Расчет на прочность элементов конструкций : учебное пособие / К.А. Абдулхаков, В.М. Котляр, С.Г. Сидорин; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2012. – 120 с.

ISBN 978-5-7882-1324-8

Изложены теоретические основы расчетов на прочность при осевом растяжении и сжатии, плоском изгибе, изгибе с кручением, а также основы расчета на прочность тонкостенных сосудов.

Предназначено для самостоятельной работы студентов всех форм обучения, изучающих дисциплины «Прикладная механика» и «Сопротивление материалов».

Подготовлено на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского государственного технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *И.Н. Сидоров*
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
Д.Ю. Гопорков

ISBN 978-5-7882-1324-8

© Абдулхаков К.А., Котляр В.М.,
Сидорин С.Г., 2012

© Казанский национальный исследовательский
технологический университет, 2012

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предмет и задачи курса сопротивления материалов

Все современные конструкции, машины, приборы и сооружения изготавливают или строят по заранее разработанным проектам. Проект - это чертеж или ряд чертежей и технических рисунков, в которых указываются все размеры элементов конструкций и деталей машин, необходимых для изготовления, их материалы, а также описание технологии. В процессе проектирования необходимо уметь определять размеры элементов и деталей, входящих в состав сооружений или машин. Вполне очевидно, что эти размеры зависят от ряда условий и обстоятельств, в том числе от свойств материала изделия и от предполагаемых внешних воздействий.

Любая конструкция должна обладать надежностью при эксплуатации и быть экономичной.

Экономичность в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность конструкции обеспечивается, если она сохраняет *прочность, жесткость и устойчивость* при гарантированной долговечности. Надежность и экономичность - противоречивые требования.

Прочность - это способность элемента конструкции сопротивляться *разрушению* при действии на нее внешних сил (нагрузок).

Жесткость - способность элемента конструкции сопротивляться *деформации*.

Устойчивость - свойство системы сохранять свое начальное *равновесное положение* при внешних воздействиях.

Долговечность конструкции состоит в ее способности сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение заранее предусмотренного отрезка времени.

Таким образом, основная задача сопротивления материалов состоит в разработке инженерных методов конструирования и расчета наиболее типичных элементов конструкций на прочность, жест-

кость и устойчивость при заданной долговечности, одновременно обеспечивающих экономичность.

В сопротивлении материалов широко применяются методы теоретической механики и математического анализа, используются данные из разделов физики, изучающих свойства различных материалов, материаловедения и других наук.

Сопротивление материалов является наукой экспериментально-теоретической, которая широко использует опытные данные и теоретические исследования.

Зарождение науки о сопротивлении материалов относится к XVII в. и связано с работами знаменитого ученого того времени Галилео Галилея. Значительный вклад в ее развитие был сделан выдающимися учеными: Гуком, Бернулли, Сен-Венаном, Коши, Ламе, Эйлером и др. В России в конце XIX-начале XX века важные исследования в области сопротивления материалов провели русские ученые Д.И.Журавский, Ф.С.Ясинский, И.Г.Бубнов, С.П.Тимошенко и др.

1.2. Реальный объект и расчетная схема

В сопротивлении материалов, как и во всякой отрасли естествознания, исследование вопроса о надежности реального объекта начинается с выбора расчетной схемы. Приступая к расчету элемента конструкции, следует, прежде всего, установить, что в данном случае является существенным и что несущественным; необходимо провести схематизацию объекта и отбросить все те факторы, которые не могут сколько-нибудь заметным образом повлиять на работу системы в целом. Реальный объект, освобожденный от несущественных особенностей, называется *расчетной схемой*. Выбор расчетной схемы начинается с принятия основных гипотез, которым отвечает материал.

1.3. Основные гипотезы сопротивления материалов

Предполагается, что все *материалы* обладают такими свойствами, что могут считаться:

1. *Однородными*. Под *однородностью* понимается одинаковость свойств во всех точках тела. Экспериментально доказано, что матери-

ал имеет неоднородную, дискретную структуру. Вместе с тем, реальные тела можно рассматривать как однородные в среднем, когда объем элемента тела намного превосходит объем структурных единиц, его составляющих (атомов, молекул, зерен).

2. *Сплошными*. Понятие *сплошности*, как среды, непрерывно заполняющей отведенный ей объем, следует из понятия однородности, что, в свою очередь, позволяет применить к этой среде анализ бесконечно малых величин.

3. *Изотропными*. Сплошная среда принимается *изотропной*, т.е. обладающей во всех направлениях одинаковыми свойствами. *Анизотропными* называются материалы, свойства которых в разных направлениях различны (например, древесина).

4. *Деформируемыми*. Если в теоретической механике тела считаются абсолютно жесткими, то в сопротивлении материалов тела обладают способностью *деформироваться*, т.е. под действием внешней нагрузки изменять свои начальные размеры и форму. Деформации материала в каждой точке *прямо пропорциональны* действующим в этой точке напряжениям (т.е. подчиняются закону Гука). Они считаются *малыми* относительно его размеров и можно не учитывать их влияние на взаимное расположение нагрузок и на расстояния от нагрузок до любых точек тела (расчет по недеформированной схеме).

5. *Упругими*. *Упругостью* называется свойство тел восстанавливать свои первоначальные форму и размеры после снятия нагрузки.

Помимо рассмотренных выше допущений в сопротивлении материалов вводится ряд гипотез, позволяющих значительно упростить расчет:

- *Принцип независимости действия сил* (принцип суперпозиции): результат совместного воздействия нескольких сил равен сумме (алгебраической или геометрической) результатов воздействия каждой из них в отдельности.

- *Принцип Сен-Венана* (принцип локальности): на достаточном удалении от места приложения нагрузки конкретный способ осуществления этой нагрузки можно не учитывать.

- *Гипотеза Бернулли* (гипотеза плоских сечений): поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему

нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси при действии нагрузки.

1.4. Упрощения в геометрии реального объекта

В сопротивлении материалов все элементы конструкций, условно делятся на три типа: брус, пластина, оболочка.

Брусом называется элемент, длина которого значительно больше его поперечных размеров. Например, для бруса прямоугольного сечения (рис.1.1) $l \gg b$, $l \gg h$. Геометрическое место точек, совпадающих с центрами тяжести поперечных сечений бруса, называется *осью бруса*.

Брус, работающий при растяжении, называют *стержнем*, при изгибе – *балкой*, при кручении – *валом*.

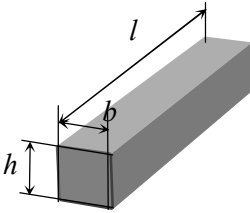


Рис.1.1

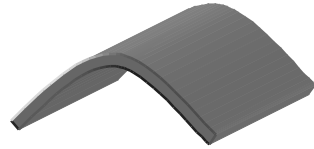


Рис.1.2



Рис.1.3

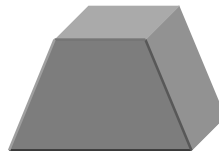


Рис.1.4

Элемент конструкции, образованный двумя поверхностями, отстоящими друг от друга на малое расстояние, называется *оболочкой*.

На рис.1.2 представлена панель оболочки.

Оболочка, срединная поверхность которой представляет собой плоскость, называется *пластиной* (рис.1.3)

Элемент конструкции, размеры которого во всех направлениях мало отличаются друг от друга, называется *массивом* (рис.1.4).

1.5. Классификация внешних сил

Под внешними силами понимаются силы, возникающие в результате взаимодействия рассматриваемого тела с окружающими телами.

По месту расположения точек приложения различают объемные и поверхностные силы. *Объемные силы* непрерывно распределены по всему объему, занятому телом (вес, силы инерции, магнитные силы и т.п.). Их размерность Н/м^3 , кгс/см^3 . *Поверхностные силы* приложены к поверхности тела. Интенсивность поверхностной силы имеет размерность Н/м^2 (Па).

Соприкосновение тел всегда происходит не в точке, а по некоторой площадке, так как тела деформируются. Поэтому сосредоточенных сил в природе не существует, и все поверхностные силы являются распределенными. Но в тех случаях, когда площадка, на которой действует нагрузка, очень мала по сравнению с размерами тела, будем говорить о *сосредоточенной силе*, как о равнодействующей сил, (размерность Н, кгс). Иногда тела соприкасаются по очень узкой, но длинной площадке (например, цилиндр и плоскость). В этом случае можно считать, что поверхностная нагрузка действует по линии или распределена по линии, (*погонная распределенная нагрузка*; размерность Н/м , кгс/см).

По характеру изменения силы во времени различают нагрузки статические и динамические. *Статические* нагрузки (постоянные) - такие, которые изменяют свою величину или точку приложения (направление) с очень небольшой скоростью, так что возникающими при этом ускорениями (силами инерции) можно пренебречь. *Динамические* нагрузки (переменные) - изменяются во времени с большой скоростью, при этом силы инерции должны быть учтены, так как оказывают существенное влияние на конструкцию (например, ударные).

1.6. Внутренние силы. Метод сечений

Внутри любого материала имеются внутренние межатомные силы. Приложение к телу внешней нагрузки вызывает изменение (увеличение или уменьшение) их, т.е. появление дополнительных внутренних сил. Дополнительные силы взаимодействия, возникающие внутри

объекта под действием внешних сил, называются в сопротивлении материалов внутренними силами.

Для определения внутренних усилий используется *метод сечений*.

Сущность метода заключается в следующем. Пусть некоторое тело находится в равновесии под действием системы внешних сил (рис.1.5).

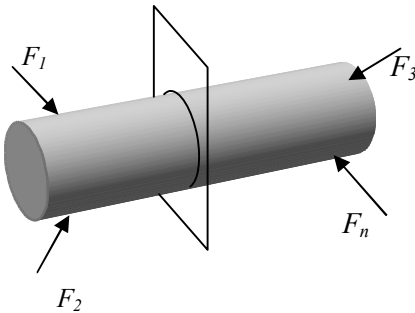


Рис.1.5

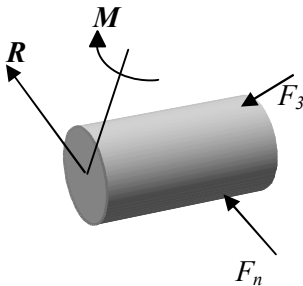


Рис.1.6

Рассечем (мысленно) тело на две части плоскостью, перпендикулярной продольной оси тела (поперечным сечением).

Отбросим правую или левую часть тела. Чтобы оставшаяся часть находилась в равновесии, по плоскости сечения должны действовать внутренние силы.

Заменим действие одной части на другую внутренними силами (рис.1.6). Эти внутренние силы по характеру приложения - распределенные, в общем случае они не одинаковы по всему сечению. Внутренние силы могут быть приведены к их равнодействующим: главному вектору - R и главному моменту - M .

Рассмотрим правую часть. Введем ортогональную систему координат с началом в точке O , причем ось z пусть совпадает с продольной осью тела, а оси x и y - с главными центральными осями инерции поперечного сечения. Разложим главный вектор R и момент M по осям (рис.1.7). Получим шесть составляющих, которые называются *внутренними силовыми факторами* (ВСФ):

N - продольная (нормальная) сила, проекция вектора \mathbf{R} на ось z ;

Q_x, Q_y - поперечные силы, проекции вектора \mathbf{R} на оси x, y соответственно;

$M_z = T$ - крутящий момент, составляющая момента \mathbf{M} вокруг оси z ;

M_x, M_y - изгибающие моменты, составляющие момента \mathbf{M} вокруг осей x, y соответственно.

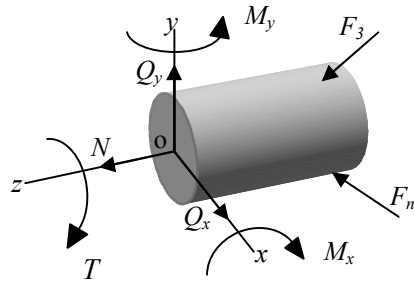


Рис.1.7

Уравновесим отсеченную часть. Так как отсеченная часть тела находится в равновесии, то для определения шести неизвестных ВСФ составим шесть уравнений равновесия:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum Z = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \sum m_{0x} = 0; \\ \sum m_{0y} = 0; \\ \sum m_{0z} = 0, \end{cases}$$

из которых определяются все ВСФ:

$N = \sum F_{iz}$ - *нормальная сила* равна сумме проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, на продольную ось z ;

$Q_x = \sum F_{ix}; Q_y = \sum F_{iy}$ - *поперечные силы* равны по величине суммам проекций всех внешних сил, действующих на отсеченную часть, на оси x и y соответственно;

$T = \sum m_{iz}$ - *крутящий момент* равен сумме внешних моментов, действующих на отсеченную часть, относительно оси z ;

$M_x = \sum m_{ix}; M_y = \sum m_{iy}$ - *изгибающие моменты* равны суммам внешних моментов, действующих на отсеченную часть, относительно осей x и y соответственно.

Для наглядного представления о характере работы конструкции строят графики изменения ВСФ по длине бруса (вдоль оси z). Такой

график принято называть эпюрой (от французского слова *épure* – чертеж).

1.7. Понятие о напряжениях

Используя метод сечений, мы определяем во всех случаях внутренние усилия в виде сосредоточенных равнодействующих сил и моментов. В действительности внутренние усилия по характеру приложения являются распределенными и в общем случае они не одинаковы по поперечному сечению. Рассмотрим правую часть тела (рис.1.6). Выделим на плоскости сечения площадку ΔA ; по этой площадке будет действовать внутренняя сила ΔR (рис.1.8).

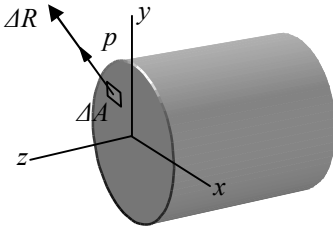


Рис.1.8

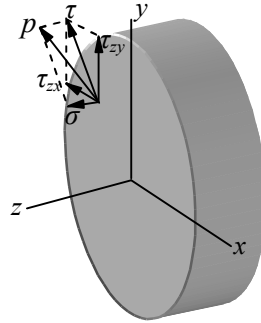


Рис. 1.9

Величина отношения $\Delta R/\Delta A = p_{cp}$ называется средним напряжением на площадке ΔA . Истинное напряжение в точке K получим устремив ΔA к нулю:

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = \frac{dR}{dA}$$

Это напряжение называется полным напряжением в данной точке и в общем случае оно направлено под некоторым углом к плоскости сечения. Спроектировав полное напряжение на внешнюю нормаль n к сечению, получим нормальное напряжение в точке K $\sigma = p \cdot \cos \alpha$, проекция полного напряжения на плоскость сечения даст касательное напряжение в точке K $\tau = p \cdot \sin \alpha$ (рис.1.9), где α - угол между на-

правлением p и внешней нормалью n (для поперечного сечения направление внешней нормали n совпадает с направлением оси z).

Нормальные напряжения возникают, когда частицы материала стремятся отдалиться друг от друга или, наоборот, сблизиться. Касательные напряжения связаны со сдвигом частиц по плоскости рассматриваемого сечения.

Очевидно, что $p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$. Касательное напряжение в свою очередь может быть разложено по направлениям осей OX и OY (τ_{zx} , τ_{zy}). Размерность напряжений – Н/м² (Па).

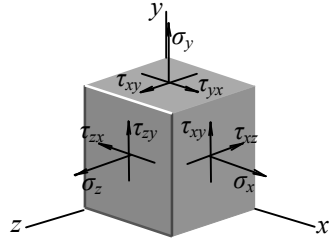


Рис 1.10

Если вокруг точки A мысленно вырезать параллелепипед, то по его граням будет действовать совокупность напряжений, характеризующих напряженное состояние материала в точке (рис. 1.10).

1.8. Связь напряжений с внутренними силовыми факторами.

Нормальные и касательные напряжения в каждом поперечном сечении тела связаны определенным образом с внутренними усилиями, действующими в этом сечении. Если рассмотреть элементарную площадку dA поперечного сечения A бруса с действующими по этой площадке напряжениями σ , τ_x , τ_y , получим, что на площадку dA действуют элементарные силы σdA , $\tau_x dA$, $\tau_y dA$. Тогда можно записать следующие интегральные зависимости:

$$N = \int_F \sigma dA; \quad Q_x = \int_F \tau_{zx} dA; \quad Q_y = \int_F \tau_{zy} dA;$$

$$M_x = \int_F (\tau_{zx} \cdot y - \tau_{zy} \cdot x) dA; \quad M_x = \int_F \sigma y dA; \quad M_y = \int_F \sigma x dA.$$