Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

О. Н. Зайцева, А. Н. Нуриев, П. В. Малов

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРИЛОЖЕНИЯХ. ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Рекомендовано УМО РАЕ по классическому университетскому и техническому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям подготовки: 230400 – «Информационные системы и технологии», 230100 – «Информатика и вычислительная техника», 090900 – «Информационная безопасность»

Казань
Издательство КНИТУ
2014

УДК 519.1, 510.6

Зайцева О. Н.

Математические методы в приложениях. Дискретная математика : учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2014. – 173 с.

ISBN 978-5-7882-1570-9

В представленном пособии в доступной форме рассказывается о фундаментальных понятиях дискретной математики – логике, булевых функциях, множествах, отношениях и графах. Теория изложена кратко, но иллюстрирована многочисленными простыми для пониманимя примерами.

Изложение курса дискретной математики представлено в форме решения математических задач различной сложности, связанных с программированием. Предложены алгоритмы решения этих задач, написанные на «псевдокоде».

Пособие может быть использовано при изучении дисциплин «Дискретная математика», «Информатика», «Линейная алгебра и дискретная математика», «Логика» студентами института легкой промышленности моды и дизайна (направление подготовки «Информационные системы и технологии»), инженерного химико-технологического института (направление подготовки «Информационная безопасность»), института управления, автоматизации и информационных технологий (направление подготовки «Информатика и вычислительная техника»).

Подготовлено на кафедре информатики и прикладной математики.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *П. Г. Данилаев*
канд. физ.-мат. наук, доц. *К. А. Поташев*

ISBN 978-5-7882-1570-9

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика и логика лежат в основе любого современного изучения информатики. Слово «дискретный» означает «составленный из отдельных частей», а дискретная математика имеет дело с совокупностями объектов, называемых множествами, и определенными на них структурами. Элементы этих множеств как правило изолированы друг от друга и геометрически не связаны. Действительно, большинство интересующих нас множеств конечны или счетны.

Эта область математики привлекается для решения задачи на компьютере в терминах аппаратных средств и программного обеспечения с привлечением организации символов и манипуляции данными. Современный цифровой компьютер – по существу конечная дискретная система. Понимания того, как такая машина работает, можно достигнуть, если представить машину как дискретную математическую систему. Поэтому наша главная цель при изучении дискретной математики – приобрести инструменты и технику, необходимые для понимания и проектирования компьютерных систем. Когда и как использовать эти инструменты и технику – основа раздела математики, известного как математическое моделирование.

Представленные в учебном пособии темы интересны в связи с их широкой применимостью как непосредственно в математике, так и в дисциплинах, использующих математический аппарат. В частности, формальные методы, применяемые в информатике, опираются на такие фундаментальные понятия дискретной математики, как логика, множества, отношения и функции.

Теория излагается преднамеренно кратко, а обсуждаемые здесь математические идеи из различных областей дискретной математики доступны студентам нематематических направлений подготовки и вместе с тем соблюдается достаточная степень научности и сложности. В многочисленных примерах обобщаются и развиваются ключевые идеи курса. Пособие содержит теоретические сведения по дискретной математике, а также приложения этих сведений к задачам программирования. Каждая глава начинается с опорного конспекта, а заканчивается набором упражнений для самостоятельного решения.

Основной материал книги изложен в 8 главах.

Первая глава посвящена основам логики и булевой алгебры. Логика необходима в любой формальной дисциплине и состоит из правил получения обоснованного вывода (заключения). Логику можно выделить из контекста тех дисциплин, в которых она используется, и изучать как отдельный раздел науки. В этой главе мы познакомимся с логикой высказываний, имеющей дело с истинностью (или ложностью) простых описательных утверждений. В настоящей главе изучается булева алгебра, а именно множество {0, 1} с определенными на нем операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания. Здесь сформулированы законы булевой алгебры и проведена параллель между булевой алгеброй, логикой высказываний с одной стороны, и с алгеброй множеств с другой. Показано, как булевы выражения могут быть записаны в стандартной форме, носящей название «дизъюнктивная нормальная форма». После этого описан способ, называемый «карта Карно», который применяется для упрощения булевых выражений.

Во второй главе рассматривается короткое введение в логику предикатов. В этой главе также описаны различные методы доказательств (прямое рассуждение, метод «от противного» и обратное рассуждение), снабженные простыми примерами проверки фактов о четных и нечетных числах, иллюстрирующими методологию рассуждений. Рассмотрен сильный метод доказательства, называемый методом математической индукции.

В третьей главе введено понятие множества и описаны различные способы комбинирования разных множеств для получения новых. Результат операций объединения, пересечения, дополнения и симметрической разности иллюстрируются на диаграммах Венна. В этой главе осваиваются такие новые понятия, как, например, принцип включения исключения, упорядоченные пары, декартово произведение, которые потребуются для освоения последующего материала.

Для строгого математического описания любых связей между элементами двух множеств в четвертой главе введено понятие бинарного отношения. В этой главе рассказано о различных путях определения отношений и обсуждены некоторые их свойства. В частности, мы изучим два важных специальных типа отношений: отношение эквивалентности и частичного порядка. Они часто появляются как в математике, так и в информатике.

Пятая глава посвящена функциям, которые играют центральную роль в математике, где они используются для описания любых процессов, при которых элементы одного множества каким-то образом переходят в элементы другого. Такие преобразования элементов – фундаментальная идея, имеющая первостепенное значение для всех вычислительных процессов.

Как мы увидим, функции представляют специальный тип бинарных отношений. Однако перед тем, как будут определены функции, в этой главе мы продолжим работу над бинарными отношениями, начатую в главе 4. Здесь мы изучим два важнейших способа построения новых бинарных отношений из уже имеющихся. Эти способы основаны на вычислении обратного отношения и определении композиции отношений. Упомянутые операции особенно важны, когда мы от отношений переходим к функциям. После определения мы обсудим некоторые свойства функций, а закончим это обсуждение законом, известным как *принцип Дирихле*. Этот, на первый взгляд очень простой, факт даст нам возможность решать несвязанные друг с другом явным образом вычислительные задачи.

В шестой главе рассмотрена область математики, занимающаяся подсчетом элементов конечных множеств – комбинаторика. На простейший, казалось бы, вопрос о мощности множества часто очень трудно дать ответ. В этой главе мы обратимся к другим задачам пересчета, чьи решения получаются с помощью двух новых принципов: правил суммы и произведения.

Общие задачи пересчета связаны с выборкой некоторого числа элементов из заданного базисного множества. Такие задачи полезно делить на типы в зависимости от того, как выбираются элементы: с повторением или без повторений, с учетом порядка выбора или без оного. Мы выведем формулы для каждого из перечисленных типов задач. В последнем параграфе этой главы мы познакомимся с биномом Ньютона и установим связь между его коэффициентами и одной из формул подсчета, полученных ранее.

В седьмой главе мы вводим стандартную терминологию, используемую в теории графов, и разбираем несколько конкретных задач, решаемых с помощью графов. В частности, мы познакомимся с классом графов, называемым деревьями. Деревья – естественная модель, представляющая данные, организованные в иерархичную систему. Поиск по дереву для выделения отдельных предметов и сортировка данных в дереве представляют собой важные точки приложения усилий в информатике.

Основная часть восьмой главы посвящена проблеме поиска путей в сетях. Существование путей устанавливается с помощью матриц достижимости (это матрицы замыкания (относительно транзитивности) отношения, задаваемого ребрами сети). Также в этой главе описан эффективный алгоритм вычисления матрицы достижимости, известный как алгоритм Уоршелла. Далее мы обсудим алгоритм Дейкстры, предназначенный для поиска кратчайшего пути в сетях.

Пособие содержит достаточное количество задач для аудиторных занятий и самостоятельной работы вне аудитории. В нем заложена структура дидактического процесса по схеме: 1) осмысление опорного конспекта $\Rightarrow$ 2) анализ задач с решениями $\Rightarrow$ 3) самостоятельное решение задач $\Rightarrow$ 4) выполнение расчетного задания $\Rightarrow$ 5) в случае затруднения возвращение к 1), 2). Применение представленной выше схемы делает возможным самостоятельное овладение практическими навыками по изученным темам.

ГЛАВА 1. БУЛЕВА ЛОГИКА И БУЛЕВА АЛГЕБРА

Опорный конспект № 1

1.1.Высказывания и логика

Логика представляет собой набор правил для получения обоснованных выводов.

Высказыванием называется утверждение, имеющее истинное значение, т.е. оно может быть истинным или ложным.

Высказывание $a = \{0,1\}$ - логическая переменная.

Составное высказывание может быть построено из других с помощью логических операций.

Логические операции:

1. Конъюнкция:

$$c = a \wedge b = \begin{cases} 1, \text{если } a = 1,\ b = 1, \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

2. Дизъюнкция:

$$c = a \vee b = \begin{cases} 0, \text{если } a = 0,\ b = 0, \\ 1, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

3. Отрицание (инверсия):

$$b = \bar{a} = \begin{cases} 0, \text{если } a = 1, \\ 1, \text{ если } a = 0 \end{cases}$$

4. Импликация:

$$c = a \Rightarrow b = \begin{cases} 0, \text{если } a = 1,\ b = 0, \\ 1, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

5. Эквивалентность:

$$c = a \Leftrightarrow b = \begin{cases} 1, \text{если } a = b = 1 \text{ или } a = b = 0, \\ 0, \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

1.2. Булева алгебра

Булева переменная принимает только два значения: 0 и 1. Булевы переменные можно комбинировать, используя операции $\vee, \wedge, \bar{\ }$ для создания *булевых выражений*.

Булевой функцией от *n* аргументов называется функция *f* из *n*-ой степени множества { 0, 1 } в множество { 0, 1 }

Булева функция называется *минтермом*, если столбец таблицы истинности, в котором записаны ее значения, содержит одну единицу.

Законы булевой алгебры

1. Законы коммутативности:

$p \wedge q = q \wedge p, p \vee q = q \vee p$

2. Законы ассоциативности:

$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r,$

$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

3. Законы дистрибутивности:

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r),$

$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

4. Законы идемпотентности:

$p \wedge p = p, p \vee p = p$

5. Законы поглощения:

$p \wedge (p \vee q) = p,\ p \vee (p \wedge q) = p$

6. Законы де Моргана:

$\overline{(p \wedge q)} = \bar{p} \vee \bar{q},\ \ \overline{(p \vee q)} = \bar{p} \wedge \bar{q}.$

Любая булева функция может быть единственным образом записана как дизъюнкция минтермов. Такое представление функции называется *дизъюнктивной нормальной формой.*

1.3. Карта Карно

Булево выражение можно упростить, используя карту Карно, прямоугольную таблицу, чьи строки и столбцы обозначены конъюнкциями булевых переменных и их отрицаний. В клетках этой таблицы, соответствующих минтермам данной дизъюнктивной нормальной формы, помещаются единицы.

1.1. Высказывания и логика

Стандартными блоками формальной логики являются высказывания. *Высказыванием* называется утверждение, которое имеет значение истинности, т.е. может быть **истинным** (обозначается буквой И или 1) или **ложным** (обозначается Л или 0). Например,

- земля плоская;
- Владимир – строитель;
- 3 – простое четное число.

Каждое из высказываний можно обозначить своей буквой. Пусть, например, P обозначает высказывание «земля плоская», Q – «Владимир – строитель» и R – «3 – простое четное число».

Используя такие логические операции, как **не**, **или**, **и**, можно построить новые, так называемые *составные высказывания*, компануя более простые. Например,

- (**не** P) – это высказывание «земля не плоская»;
- (P **или** Q) – «земля плоская или Владимир – строитель»;
- (P **и** Q) – «земля плоская и Владимир – строитель».

Пример 1.1. Обозначим через P высказывание «логика – забава», а через Q – «сегодня пятница». Требуется выразить каждое из следующих составных высказываний в символьной форме.

(а) Логика – не забава, и сегодня пятница.

(б) Сегодня не пятница, да и логика – не забава.

(в) Либо логика – забава, либо сегодня пятница.

Решение.

(а) (**не** P) **и** Q.

(б) (**не** P) **и** (**не** Q).

(в) P **или** Q.

Чтобы уметь определять значение истинности составных высказываний, нам необходимо разобраться со смыслом логических операций, т.е. какой эффект они оказывают на истинностное значение простых высказываний. Операции над высказываниями, за исключением операции отрицания, определяют дискретные функции двух логических переменных, принимающие значение 0,1.

Конъюнкцией или *логическим умножением* двух высказываний P и Q называют составное высказывание вида (P **и** Q). Оно принимает истинное значение только в том случае, когда истинны обе его составные части. Такое определение хорошо согласуется с обычным пониманием союза «и» в разговорном языке. Соответствующая таблица истинности — таблица 1.1.

Таблица 1.1

P	Q	(P **и** Q)
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

Дизъюнкцией или *логическим сложением* двух высказываний P и Q называется составное высказывание (P **или** Q). Оно истинно, если хотя бы одна из ее составных частей имеет истинное значение, что в некотором смысле также согласуется с обыденным пониманием союза «или». Другими словами, (P **или** Q) означает, что «или P, или Q, или и то, и другое». Таблица истинности дизъюнкции обозначена как таблица 1.2.

Таблица 1.2

P	Q	(P **или** Q)
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

Пример 1.2. Что можно сказать об истинности составного высказывания: «либо луна делается из зеленого сыра и Генрих VIII имел шесть жен, или не верно, что дронт вымер»?

Решение. Обозначим через P высказывание «луна делается из зеленого сыра», через Q — «Генрих VIII имел шесть жен» и через R — «дронт вымер». Символьная запись данного высказывания имеет вид: (P **и** Q) **или** (**не** R). Известно, что высказывание P ложно, а Q и R истинны. Поэтому высказывание (P **и** Q) **или** (**не** R) имеет такое истинностное значение: (Л **и** И) **или** Л, что эквивалентно Л.

Отрицанием произвольного высказывания P называется высказывание вида (**не** P), чье истинностное значение строго противоположно значению P. Определяющая таблица истинности отрицания высказывания приведена в таблице 1.3.

Таблица 1.3

P	(не P)
И	Л
Л	И

Два составных высказывания, построенные из одних и тех же простых утверждений, но разными путями, могут принимать одинаковые значения истинности на любом возможном наборе значений истинности своих составных частей. Такие высказывания называются *логически эквивалентными.*

Пример 1.3. Показать, что высказывание (**не** (P **и** (**не** Q))) логически эквивалентно утверждению ((**не** P) **или** Q).

Решение. Заполним совместную таблицу истинности (таблица 1.4) для составных высказываний: R = (**не** (P **и** (**не** Q))) и S = ((**не** P) **или** Q). Вспомогательные колонки используются для построения обоих выражений из P и Q.

Таблица 1.4

P	Q	**не** P	**не** Q	P **и (не** Q**)**	R	S
И	И	Л	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	И	Л	Л
Л	И	И	Л	Л	И	И
Л	Л	И	И	Л	И	И

Две последние колонки таблицы идентичны. Это означает, что высказывание R логически эквивалентно высказыванию S.

Важно изучить еще один тип логического оператора, результатом которого является *условное высказывание.* Примером такого высказывания является следующее: «если завтра будет суббота, то сегодня — пятница». При определении истинностного значения условного высказывания, необходимо различать фактическую истину и логическую.

Рассмотрим высказывание «если P, то Q». В том случае, когда предпосылка P истинна, мы не можем получить логически корректного заключения, если Q ложно. Однако если посылка P ложна, мы имеем логически корректное высказывание и когда Q ложно, и когда оно истинно.

Пример 1.4. Пусть P – (ложное) высказывание $1 = 5$, Q – (тоже ложное) высказывание $3 = 7$ и R – (истинное) утверждение $4 = 4$. Показать, что условные высказывания: «если P, то Q» и «если P, то R», – оба истинны.

Решение. Если $1 = 5$, то, прибавляя 2 к обеим частям равенства, мы получим, что $3 = 7$. Следовательно, высказывание «если P, то Q»справедливо. Вычтем теперь из обеих частей равенства $1 = 5$ число 3 и придем к $-2 = 2$. Поэтому $(-2)^2 = 2^2$, т. е. $4 = 4$. Таким образом, «если P, то R» тоже верно.

В логике условное высказывание «если P, то Q» принято считать ложным только в том случае, когда *предпосылка* P истинна, а *заключение* Q ложно. В любом другом случае оно считается истинным.

Используя символ импликации «$\Rightarrow$», мы пишем $P \Rightarrow Q$ для обозначения условного высказывания «если P, то Q». Такая запись читается как «из P следует Q» или, «P влечет Q», или «P достаточно для Q», или «Q необходимо для P».

Таблица истинности импликации приведена в таблице. 1.5.

Таблица1.5

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Пример 1.5. Высказывание ((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P)) называется про*тивоположным* или *контрапозитивным* к высказыванию $(P \Rightarrow Q)$. Показать, что ((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P)) логически эквивалентно высказыванию $(P \Rightarrow Q)$.

Решение. Рассмотрим совместную таблицу истинности (таблица 1.6).

Таблица 1.6

P	Q	**не** P	**не** Q	$(P \Rightarrow Q)$	((**не** Q) $\Rightarrow$ (**не** P))
И	И	Л	Л	И	И
И	Л	Л	И	Л	Л
Л	И	И	Л	И	И
Л	Л	И	И	И	И

Поскольку два последних столбца этой таблицы совпадают, то и высказывания, о которых идет речь, логически эквивалентны.

Порядок выполнения логических операций задается круглыми скобками, но для уменьшения числа скобок принято применять следующую последовательность:

1. инверсия
2. конъюнкция
3. дизъюнкция
4. импликация
5. эквивалентность

При построении таблиц истинности необходимо учитывать все возможные сочетания логических значений 0 и 1 исходных выражений.

Для построения таблицы истинности необходимо определить:

- количество строк: *количество строк* = 2^n + *строка для заголовка (n - количество простых высказываний),*
- количество столбцов*: количество столбцов = количество переменных + количество логических операций.*
- последовательность выполнения основных логических операций.

Пример 1.6. Составить таблицу истинности сложного логического выражения $D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$

Решение: A, B, C – три простых высказывания, поэтому:

количество строк = 2^3 +1 = 9 (*n* = 3, т.к. на входе три элемента A, B, C)

количество столбцов = 3 + 3 = 6

A	B	C	$\overline{A}$	$B \vee C$	$D = \overline{A} \wedge (B \vee C)$
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Простейшие равносильности, которые используются для упрощения формул логики высказываний:

1. $\overline{\overline{a}}=a$
2. $a\wedge b=b\wedge a$; $a\vee b=b\vee a$
3. $(a\wedge b)\wedge c=a\wedge(b\wedge c)$; $(a\vee b)\vee c=a\vee(b\vee c)$
4. $a\wedge(b\vee c)=(a\wedge b)\vee(a\wedge c)$; $a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$
5. $\overline{a\wedge b}=\overline{a}\vee\overline{b}$; $\overline{a\vee b}=\overline{a}\wedge\overline{b}$
6. $a\wedge a=a$; $a\vee a=a$
7. $a\wedge 1=a$; $a\vee 1=a$
8. $a\wedge 0=0$; $a\vee 0=a$
9. $a\wedge\overline{a}=0$; $a\vee\overline{a}=1$
10. $a\Rightarrow b=\overline{a}\vee b$
11. $a\Rightarrow b=\overline{b}\Rightarrow\overline{a}$
12. $a\Leftrightarrow b=(a\Rightarrow b)\wedge(b\Rightarrow a)=(a\wedge b)\vee(\overline{a}\wedge\overline{b})$

Для преобразования формул кроме равносильностей 1 – 12 необходимы следующие теоремы.

Теорема 1 (о подстановке формулы вместо переменной): Пусть $P(\ p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)=Q(\ p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$, F – некоторая формула. Тогда при подстановке вместо p_i формулы F равносильность $P=Q$ сохраняется. ■

Теорема 2 (о замене подформул): Пусть $P(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)=Q(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$, C_p – формула, содержащая P, C_Q – результат замены в ней P на Q. Тогда $C_p=C_Q$. ■

Теоремы являются следствием сохранения таблиц истинности рассматриваемых формул.

Пример 1.7. Доказать, что $\overline{\overline{\overline{a}}\wedge\overline{\overline{b}}}=a\vee b$

Решение: На основании равносильности 5 имеем $\overline{\overline{a}\wedge\overline{b}}=\overline{\overline{a}}\vee\overline{\overline{b}}$. на основании равносильности 1 $\overline{\overline{a}}\vee\overline{\overline{b}}=a\vee\overline{\overline{b}}=a\vee b$

1.2. Булева алгебра

Простейшая булева алгебра состоит из множества $B = \{0, 1\}$ вместе с определенными на нем операциями *дизъюнкции* ($\vee$), *конъюнкции* ($\wedge$) и *отрицания* ($\bar{\ }$).

Для *булевых переменных* p и q (т.е. переменных, принимающих значения 0 и 1) можно построить таблицы, определяющие действия операций $\bar{p}$, $p \vee q$ и $p \wedge q$ (см. таблицу 1.7 и таблицу 1.8).

Таблица 1.7

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

Таблица 1.8

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

Эти таблицы напоминают таблицы истинности логических операций **не**, **или** и **и**, с которыми мы встретились в п.1.1 данной главы. Действительно, мы можем легко трансформировать таблицу 1.7 и таблицу 1.8 в таблицы истинности, возникающие в логике высказываний, заменив переменные p и q на высказывания P и Q, и используя истинностные значения Л и И вместо 0 и 1 соответственно. Таким образом, $\bar{p}$ заменяется на (**не** P), $p \vee q$ – на (P **или** Q), а $p \wedge q$ – на (P **и** Q). Поэтому и в контексте булевой алгебры мы будем называть такого сорта таблицы таблицами истинности.

Мы можем комбинировать булевы переменные с помощью операции ($\vee$), ($\wedge$) и ($\bar{\ }$), получая *булевы выражения*, так же, как мы строили составные высказывания из более простых, компануя их с помощью логических операций. Законы булевой алгебры приведены в таблице 1.9.

Два булевых выражения называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковые таблицы истинности. Вычисляя таблицы истинности, легко установить справедливость булевой алгебры.

Таблица 1.9. Законы булевой алгебры

Законы коммутативности:	$p \wedge q = q \wedge p$,
	$p \vee q = q \vee p$;
Законы ассоциативности:	$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$,
	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$;
Законы дистрибутивности:	$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
	$p \vee (q \wedge r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$;
Законы идемпотентности:	$p \wedge p = p$,
	$p \vee p = p$;
Законы поглощения:	$p \wedge (p \vee q) = p$,
	$p \vee (p \wedge q) = p$;
Законы де Моргана:	$\overline{(p \wedge q)} = \overline{p} \vee \overline{q}$,
	$\overline{(p \vee q)} = \overline{p} \wedge \overline{q}$.

Пример 1.7. Докажите закон дистрибутивности:

$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$$

Решение. Требуемые таблицы истинности приведены в таблице 1.10. Поскольку два последних столбца таблицы полностью совпадают, булевы выражения $p \wedge (q \vee r)$ и $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ эквивалентны.

Таблица 1.10

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Схожесть названий и форм законов булевой алгебры и соответствующих законов алгебры множеств, которые будут изучены в п.3.2., не случайна. В таблице, приведенной ниже, устанавливается соответствие между булевыми операциями, логическими операторами логики высказываний и операциями над множествами.

Таблица 1.11

Логические операторы	Операции над множествами	Булевы операции
не	**-**	**-**
или	$\cup$	$\vee$
и	$\cap$	$\wedge$

Стоит раз и навсегда убедиться в справедливости законов булевой алгебры, чтобы в дальнейшем доказывать эквивалентность булевых выражений с их помощью, не обращаясь к таблицам истинности. Это можно делать так же, как мы проверяли равенства множеств, опираясь на законы алгебры множеств.

Пример 1.8. Покажите, что булево выражение $\overline{(\overline{p} \wedge q)} \wedge (p \vee q)$ эквивалентно p.

Решение. Сделаем несложные преобразования.

$\overline{(\overline{p} \wedge q)} \wedge (p \vee q) = ((\overline{\overline{p}}) \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q) =$ (закон де Моргана)

$= (p \vee \overline{q}) \wedge (p \vee q) =$ (так как $(\overline{\overline{p}}) = p$)

$= p \vee (\overline{q} \wedge q) =$ (закон дистрибутивности)

$= p \vee 0 =$ (так как $\overline{q} \wedge q = 0$)

$= p$ (по определению $\vee$).

Булевой функцией от n булевых переменных $p_1, p_2, \ldots, p_n$ называется такая функция $f : B^n \rightarrow B$, что $f\,(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ – булево выражение.

Наша ближайшая задача – показать, как произвольную булеву функцию можно записать в стандартном виде (он называется *дизъюнктивной нормальной формой*). Начнём с небольшого примера. Рассмотрим булеву функцию $m\,(p, q, r)$ от булевых переменных p, q и r, чья таблица истинности дана ниже (таблица 1.12).