МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА»

В.В. Шумаев

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Пенза 2014

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА»

Кафедра «Физика и математика»

В.В. Шумаев

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для студентов, обучающихся по направлению
21.03.02 – Землеустройство и кадастры

Пенза 2014

УДК 519.6(075)
ББК 22.19(я7)
Ш 96

Рецензент – канд. с-х. наук, доцент кафедры «Общее земледелие и землеустройство» С.В. Богомазов.

Печатается по решению методической комиссии агрономического факультета от 3 марта 2014 г., протокол № 9.

Шумаев, В.В.
Ш96 Прикладная математика: учебное пособие / В.В. Шумаев. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – 101 с.

Учебное пособие предназначено для студентов второго курса агрономического факультета, обучающихся по направлению подготовки 21.03.02 - Землеустройство и кадастры. Учебное пособие состоит из шести разделов, содержит основные теоретические сведения по изучаемым разделам дисциплины, а также подробный разбор задач с учетом профиля сельскохозяйственного вуза.

Учебное пособие необходимо для оказания помощи студентам при подготовке к занятиям в качестве дополнительного пособия.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование различных явлений или процессов математическими методами осуществляется с помощью математической модели. Математическая модель представляет собой формализованное описание исследуемого объекта посредством систем линейных, нелинейных или дифференциальных уравнений, систем неравенств, определенного интеграла, многочлена с неизвестными коэффициентами и т. д. Математическая модель должна охватывать важнейшие характеристики исследуемого объекта и отражать связи между ними.

После того, как математическая модель составлена, переходят к постановке вычислительной задачи. При этом устанавливают, какие характеристики математической модели являются исходными (входными) данными, какие – параметрами модели, а какие – выходными данными. Проводится анализ полученной задачи с точки зрения существования и единственности решения.

На следующем этапе выбирается метод решения задачи. Во многих конкретных случаях найти решение задачи в явном виде не представляется возможным, так как оно не выражается через элементарные функции. Такие задачи можно решить лишь приближенно. Под вычислительными (численными) методами подразумеваются приближенные процедуры, позволяющие получать решение в виде конкретных числовых значений. Для решения одной и той же задачи могут быть использованы различные вычислительные методы, поэтому нужно уметь оценивать качество различных методов и эффективность их применения для данной задачи.

Результаты расчета анализируются и интерпретируются. При необходимости корректируются параметры метода, а иногда математическая модель, и начинается новый цикл решения задачи.

Настоящее учебное пособие написано в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования и рекомендациями ПрООП ВПО по направлению 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

1 РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть дана некоторая функция $f(x)$ и требуется найти все или некоторые значения x, для которых $f(x)=0$.

Значение x^*, при котором $f(x^*)=0$, называется **корнем** (или **решением**) уравнения. Относительно функции $f(x)$ часто предполагается, что $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности корня.

Корень x^* уравнения называется **простым,** если первая производная функции $f(x)$ в точке x^* не равна нулю, т. е. $f'(x^*)\neq 0$. Если же $f'(x^*)=0$, то корень x^* называется **кратным корнем.**

Геометрически корень уравнения есть точка пересечения графика функции $y=f(x)$ с осью абсцисс. На рисунке 1.1 изображен график функции $y=f(x)$, имеющей четыре корня: два простых $\left(x_1^* \text{ и } x_3^*\right)$ и два кратных $\left(x_2^* \text{ и } x_4^*\right)$.

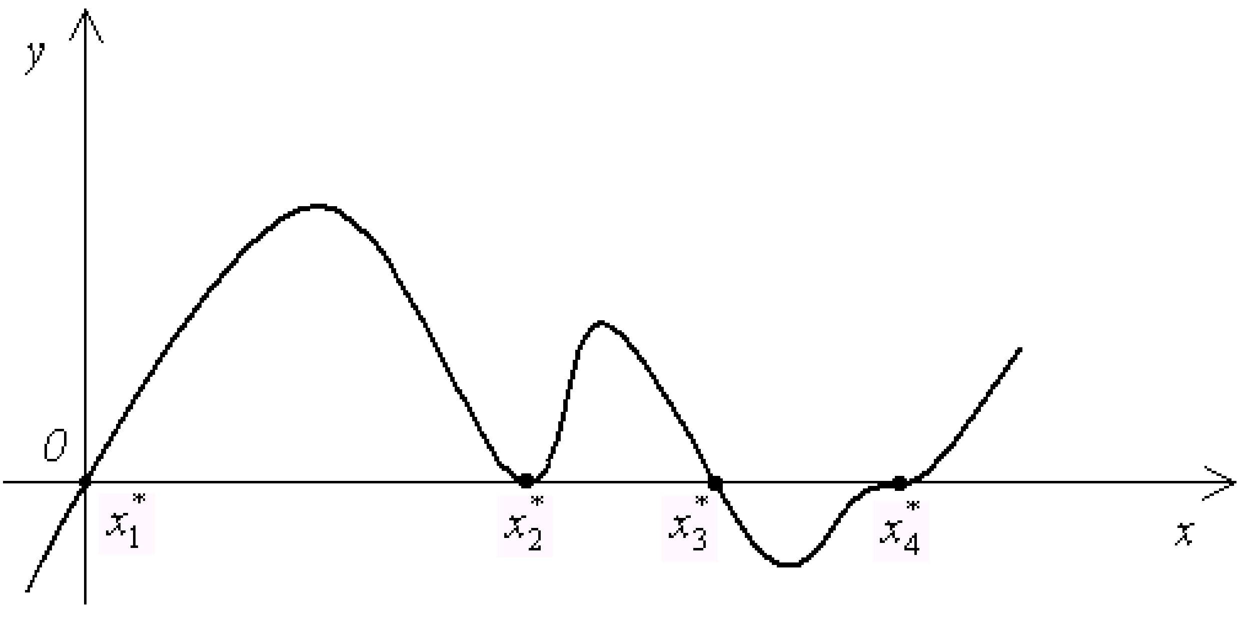

Рисунок 1.1 - График функции $y=f(x)$

Большинство методов решения уравнения ориентировано на отыскание простых корней.

1.2 Основные этапы отыскания решения

В процессе приближенного отыскания корней уравнения обычно выделяют два этапа: **локализация** (или **отделение) корня** и **уточнение корня**.

Локализация корня заключается в определении отрезка $[a, b]$, содержащего один и только один корень. Не существует универсального алгоритма локализации корня. Иногда удобно бывает локализовать корень с помощью построения графика или таблицы значений функции $y = f(x)$. На наличие корня на отрезке $[a, b]$ указывает различие знаков функции на концах отрезка. Основанием для этого служит следующая теорема.

Теорема. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на его концах значения разных знаков, так что $f(a) \cdot f(b) < 0$, то отрезок $[a, b]$ содержит по крайней мере один корень уравнения.

Однако корень четной кратности таким образом локализовать нельзя, так как в окрестности такого корня функция $f(x)$ имеет постоянный знак. На этапе уточнения корня вычисляют приближенное значение корня с заданной точностью $\varepsilon > 0$. Приближенное значение корня уточняют с помощью различных итерационных методов. Суть этих методов состоит в последовательном вычислении значений $x_0, x_1, ..., x_n, ...$, которые являются приближениями к корню x^*.

1.3 Метод половинного деления

Метод половинного является самым простым и надежным способом решения нелинейного уравнения. Пусть из предварительного анализа известно, что корень уравнения находится на отрезке $[a_0, b_0]$, т. е. $x^* \in [a_0, b_0]$, так, что $f(x^*) = 0$. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a_0, b_0]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков, т.е. $f(a_0) \cdot f(b_0) < 0$.

Разделим отрезок $[a_0, b_0]$ пополам. Получим точку $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$. Вычислим значение функции в этой точке: $f(x_0)$. Если $f(x_0) = 0$, то x_0 – искомый корень, и задача решена. Если $f(x_0) \neq 0$, то $f(x_0)$ –

число определённого знака: $f(x_0)>0$ либо $f(x_0)<0$. Тогда либо на концах отрезка $[a_0, x_0]$, либо на концах отрезка $[x_0, b_0]$ значения функции $f(x)$ имеют разные знаки. Обозначим такой отрезок $[a_1, b_1]$. Очевидно, что $x^* \in [a_1, b_1]$ и длина отрезка $[a_1, b_1]$ в два раза меньше, чем длина отрезка $[a_0, b_0]$. Поступим аналогично с отрезком $[a_1, b_1]$. В результате получим либо корень x^*, либо новый отрезок $[a_2, b_2]$ и т. д. (рис. 1.2).

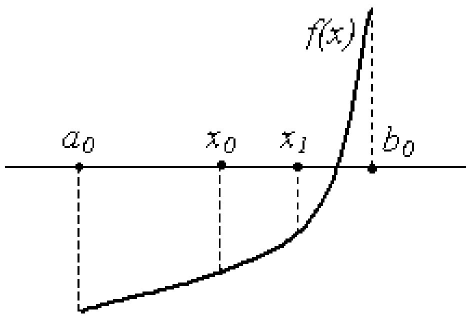

Рисунок 1.2 - График функции

Середина n-го отрезка $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Очевидно, что длина отрезка $[a_n, b_n]$ будет равна $\frac{b_0 - a_0}{2^n}$, а так как $x^* \in [a_n, b_n]$, то

$$\left| x_n - x^* \right| \le \frac{b_n - a_n}{2} \le \frac{b_0 - a_0}{2^{n+1}}. \tag{1.1}$$

Критерий окончания. Из соотношения (1.1) следует, что при заданной точности приближения ε вычисления заканчиваются, когда будет выполнено неравенство $b_n - a_n < 2\varepsilon$ или неравенство $n > \log_2 \left(\frac{b_0 - a_0}{\varepsilon} \right) - 1$. Таким образом, количество итераций можно определить заранее. За приближенное значение корня берется величина x_n.

Пример 1.1. Найдем приближенно $x = \sqrt[5]{2}$ с точностью $\varepsilon = 0{,}01$. Эта задача эквивалентна решению уравнения $x^5 - 2 = 0$, или нахождению нуля функции $f(x) = x^5 - 2$. В качестве начального отрезка $[a_0, b_0]$ возьмем отрезок $[1,2]$. На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками: $f(1) < 0$, $f(2) > 0$. Найдем число n делений отрезка $[1,2]$, необходимых для достижения требуемой точности. Имеем:

$$\left|x_n - x^*\right| \le \frac{2-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-2}, \ n \ge 6.$$

Следовательно, не позднее 6-го деления найдем $x = \sqrt[5]{2}$ с требуемой точностью, $x = \sqrt[5]{2} \approx 1{,}1484$. Результаты вычислений представлены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 - Результаты вычислений

n	0	1	2	3	4	5	6
a_n	1,0000	1,0000	1,0000	1,1250	1,1250	1,1406	1,1406
b_n	2,0000	1,5000	1,2500	1,2500	1,1875	1,1875	1,1562
x_n	1,5000	1,2500	1,1250	1,1875	1,1406	1,1562	1,1484
Зн $f(a_n)$	-	-	-	-	-	-	-
Зн $f(b_n)$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x_n)$	5,5938	0,7585	-0,2959	0,1812	-0,0691	0,0532	-0,0078
$b_n - a_n$	1,0000	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156

1.4 Метод простой итерации

Пусть уравнение $f(x) = 0$ можно заменить эквивалентным ему уравнением

$$x = \varphi(x). \tag{1.2}$$

Выберем каким-либо образом начальное приближение x_0. Вычислим значение функции $\varphi(x)$ при $x = x_0$ и найдем уточненное значение $x_1 = \varphi(x_0)$. Подставим теперь x_1 в уравнение (1.1) и получим новое приближение $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность приближений к корню:

$$x_{n+1} = \varphi(x_n). \tag{1.3}$$

Формула (1.3) является **расчетной формулой** метода простой итерации.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится при $n \to \infty$, т. е. существует

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{1.4}$$

и функция $\varphi(x)$ непрерывна, то, переходя к пределу в (1.3) и учитывая (4), получим: $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = \varphi\left(x^*\right)$.

Таким образом, $x^* = \varphi\left(x^*\right)$, следовательно, x^* – корень уравнения (1.2).

Сходимость метода. Сходимость метода простой итерации устанавливает следующая теорема.

Теорема. Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a, b]$, причем все ее значения $\varphi(x) \in [a, b]$. Тогда, если выполняется условие $\left|\varphi'(x)\right| < 1$ при $a < x < b$:

1) процесс итерации $x_n = \varphi(x_{n-1})$ $(n = 1, 2, ...)$ сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a, b]$;

2) предельное значение $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ является единственным корнем уравнения $x = \varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Так как $x^* = \varphi\left(x^*\right)$ и $x_n = \varphi\left(x_{n-1}\right)$, то можно записать

$$x_n - x^* = \varphi\left(x_{n-1}\right) - \varphi\left(x^*\right) = \left[\varphi\left(x_{n-1}\right) - \varphi\left(x^*\right)\right] \cdot \left(\frac{x_{n-1} - x^*}{x_{n-1} - x^*}\right) =$$

$$= \frac{\varphi\left(x_{n-1}\right) - \varphi\left(x^*\right)}{x_{n-1} - x^*} \cdot \left(x_{n-1} - x^*\right).$$

По теореме о среднем (она утверждает, что если производная функции $f(x)$ непрерывна на некотором интервале $[a, b]$, то тангенс угла наклона хорды, проведенной между точками a и b, (т.е. $\left\{\dfrac{f(b) - f(a)}{(b - a)}\right\}$ равен производной функции в некоторой промежуточной точке, лежащей между a и b) частное в последнем выражении будет равно $\varphi'(C)$, где C – некоторая промежуточная точка в интервале поиска корня. Следовательно, $x_n - x^* = \varphi'(C) \cdot \left(x_{n-1} - x^*\right)$.

Если ввести обозначение $M = \max|\varphi'(x)|$ для всего интервала поиска, то предыдущее равенство может быть переписано в виде: $|x_n - x^*| \le M \cdot |x_{n-1} - x^*|$

Аналогично $|x_{n-1} - x^*| \le M \cdot |x_{n-2} - x^*|$. Тогда для $|x_n - x^*|$ будет справедливо неравенство: $|x_{n-1} - x^*| \le M^2 \cdot |x_{n-2} - x^*|$ и т. д. Продолжая эти выкладки дальше, в результате получаем $|x_n - x^*| \le M^n \cdot |x_0 - x^*|$, где n – натуральное число. Таким образом, чтобы метод сходился, необходимо выполнение неравенства: $|x_n - x^*| \le M^n \cdot |x_0 - x^*|$.

Отсюда следует, что $M = \max|\varphi'(x)|$ должно быть меньше единицы. В свою очередь, для всех остальных значений $\varphi'(x)$ меньших M, можно записать: $|\varphi'(x)| < 1$. Число q определим из соотношения $|\varphi'(x)| \le q < 1$. Тогда справедливо неравенство (вывод см. ниже): $|x^* - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|$. Если поставить условие, что истинное значение корня x^* должно отличаться от приближенного значения на величину ε, т.е. $|x^* - x_n| \le \varepsilon$, то приближения $x_0, x_1, ..., x_n$ надо вычислять до тех пор, пока не будет выполнено неравенство

$$\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon \text{ или } |x_n - x_{n-1}| \le \frac{\varepsilon(1-q)}{q} \text{ и тогда } x^* = x_n \pm \varepsilon.$$

Вывод неравенства. Рассмотрим два последовательных приближения: $x_n = \varphi(x_{n-1})$ и $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Отсюда $x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})$.

Используя теорему о среднем, получим:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\left(f(x_n) - f(x_{n-1})\right) \cdot (x_n - x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = f'(x_n) \cdot (x_n - x_{n-1}),$$

тогда на основании условия $|\varphi'(x)| \le q < 1$ можно записать:

$$|x_{n+1} - x_n| \le q\,|x_n - x_{n-1}|\ .$$

С другой стороны, пусть $f(x) = x - \varphi(x)$. Очевидно, что $f'(x) = 1 - \varphi'(x) \ge 1 - q$. Отсюда, учитывая, что $f(x^*) = 0$, получим

$$|x_n - \varphi(x_n)| = |f(x_n) - f(x^*)| = |x_n - x^*| \cdot |f'(x_n)| \ge (1-q)|x_n - x^*|,$$