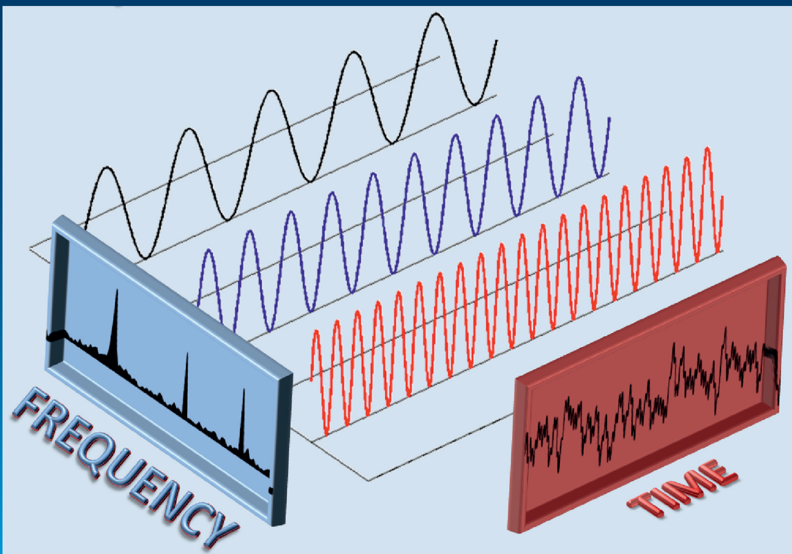
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина
Институт математики и компьютерных наук

С. Н. ВАСИЛЬЕВ
В. Т. ШЕВАЛДИН

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

С. Н. Васильев,
В. Т. Шевалдин

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата
по направлениям подготовки 010100 «Математика»,
010200 «Математика и компьютерные науки»,
090301 «Компьютерная безопасность»,
230700 «Прикладная информатика»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517.518.45(075.8)
В191

Р е ц е н з е н т ы:
отдел аппроксимации и приложений
Института математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
(заведующий отделом
доктор физико-математических наук А. Г. Б а б е н к о);
Р. Р. А к о п я н, кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой прикладной математики
(Озерский технологический институт, филиал НИЯУ МИФИ)

Васильев, С. Н.

В191 Гармонический анализ : [учеб. пособие] / С. Н. Васильев, В. Т. Шевалдин ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 79 с.

ISBN 978-5-7996-1178-1

Учебное пособие создано на материале лекций, прочитанных авторами по основам преобразования Фурье в многомерных евклидовых пространствах.

Для студентов, знакомых с основами математического анализа, теории меры и интеграла Лебега.

УДК 517.518.45(075.8)

ISBN 978-5-7996-1178-1

Оглавление

Предисловие 5
Введение 6
1. Некоторые сведения из теории функций действительного переменного 7
2. Введение непрерывного преобразования Фурье на основе рядов Фурье 10
3. Преобразование Фурье в пространстве $L_1(\mathbb{R}^N)$ . . 13
4. Свойства преобразования Фурье 13
5. Свертка двух функций 18
6. Дифференцирование преобразования Фурье . . . 21
7. Преобразование Фурье от производной (одномерный случай) 24
8. Примеры вычисления непрерывного преобразования Фурье 25
9. Методы суммирования рядов Фурье 27
10. Методы вычисления интегралов от несуммируемых функций 31
11. Примеры методов суммирования 33
12. Обращение преобразования Фурье 34
13. Поточечное обращение преобразования Фурье . . 39
14. Преобразование Фурье функций из пространства $L_2(\mathbb{R}^N)$ 42
15. Обращение преобразования Фурье в $L_2(\mathbb{R}^N)$ . . . 48
16. Пример вычисления обратного преобразования Фурье 49
17. Принцип неопределенности Гейзенберга 50
18. Теорема отсчетов 52
19. Преобразование Фурье обобщенных функций . . . 55
20. Приложения преобразования Фурье 59
21. Формула суммирования Пуассона 63
22. Преобразование Фурье дискретных сигналов . . . 65

23. Различные варианты определения непрерывного преобразования Фурье 71
24. Преобразование Фурье функции с компактным носителем 72
25. Оконное преобразование Фурье 74
Список библиографических ссылок 77
Предметный указатель 78

Предисловие

Данное пособие отражает содержание курса “Гармонический анализ”, который неоднократно был прочитан авторами в Институте математики и компьютерных наук УрФУ (ранее — математико-механический факультет УрГУ) и представляет собой краткий конспект односеместрового курса наших лекций. Материал рассчитан на студентов старших курсов, обучающихся по направлениям бакалавриата “Математика”, “Математика и компьютерные науки” и “Компьютерная безопасность”. Предполагается, что слушатели курса хорошо владеют методами математического анализа функций нескольких переменных и знакомы с основами интеграла Лебега, функционального анализа (в частности, с теорией линейных операторов в нормированных пространствах), комплексного анализа и теории приближения функций.

Значительная часть пособия представляет собой изложение основных формул и теорем гармонического анализа на многомерных евклидовых пространствах. Здесь мы руководствовались стремлением показать, как в теории преобразования Фурье методы вещественного и комплексного анализа сравнительно легко обобщаются с одномерного случая на многомерный. Доказательства основных результатов проводятся по схеме первой главы монографии И. Стейна и Г. Вейса “Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах” [1]. Далее мы отступаем от изложения основ гармонического анализа по этой книге американских математиков, переходя к функциям одной переменной, чтобы сформулировать наиболее значимые, на наш взгляд, применения непрерывного и дискретного преобразований Фурье и подготовить студентов к пониманию следующего за гармоническим анализом курса лекций “Теория всплесков”.

Введение

Гармонический анализ (или анализ Фурье) — раздел математики, в котором изучаются свойства функций с помощью их представления в виде рядов или интегралов Фурье. Современный гармонический анализ — хорошо разработанный предмет, который можно рассматривать и как междисциплинарную область научных исследований, и как их эффективный аппарат. Методы анализа Фурье активно используются как в теоретических исследованиях, так и во многих прикладных и инженерных задачах. В частности, преобразование Фурье существенно применяется для обработки различных сигналов в теории информации. На методах гармонического анализа основаны, например, такие популярные форматы сжатия мультимедийных данных, как JPEG, MPEG и MP3. Знаменитая теорема отсчетов Уиттекера — Найквиста — Котельникова — Шеннона (см. § 18) фактически является основой современного цифрового мира, предоставляя базу для перевода аналоговых данных в дискретные и обратно.

В последние годы интерес к гармоническому анализу сильно возрос ввиду появления нового, бурно развивающегося (особенно за рубежом) направления математических исследований, которое сейчас в России принято называть теорией всплесков. По существу, появился новый, технически весьма удобный в приложениях метод представления и анализа функций одной и нескольких переменных. Эта теория имеет истоки в классических областях математики: в математическом анализе (дифференциальное и интегральное исчисление), теории функций вещественного переменного, теории ортогональных рядов, теории функций комплексного переменного, функциональном анализе, но прежде всего, конечно, в анализе интегралов Фурье и других интегральных представлений. Основные подходы и методы гармонического анализа и теории всплесков базируются на результатах классиков математической науки Ж. Фурье, А. Лебега, Н. Н. Лузина, С. Банаха, Д. Гильберта, А. Зигмунда, Дж. Литлвуда, Р. Пэли, К. Шеннона, Н. Винера и многих других.

1. Некоторые сведения из теории функций действительного переменного

Векторные величины $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N)$ будем обозначать полужирным шрифтом. Скалярное произведение будем обозначать $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \sum_{k=1}^{N} x_k t_k$, длину (модуль) вектора — $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_N^2}$.

Приведем несколько фактов из теории функций действительного переменного, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Более подробные сведения и доказательства изложенных фактов можно найти в [2–4].

Измеримость произведения измеримых множеств. Пусть $X \subset \mathbb{R}^k$, $Y \subset \mathbb{R}^l$ $(k, l \in \mathbb{N})$, множества X, Y измеримы по Лебегу и их меры $\mu_k(X)$ и $\mu_l(Y)$ конечны. Тогда $H = X \times Y = \{(\mathbf{x}; \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$ измеримо в пространстве $\mathbb{R}^{k+l}$, причем $\mu_{k+l}(H) = \mu_k(X)\mu_l(Y)$.

Измеримость подграфика функции. Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$, X измеримо и $f : X \to \widetilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \infty$. Если функция f измерима и неотрицательна на X и $\int_X f d\mathbf{x} < \infty$, то множество $H = \{(\mathbf{x}; y) \mid \mathbf{x} \in X, y \in [0, f(\mathbf{x})]\}$ измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$, причем $\mu_{n+1}(H) = \int_X f d\mathbf{x}$.

Комплекснозначные функции. Наряду с функциями $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N \in \mathbb{N})$ (принимающими вещественные значения) можно рассматривать комплекснозначные функции $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_N) = U(\mathbf{x}) + iV(\mathbf{x}),$$

где $U, V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $|f| = (U^2 + V^2)^{1/2}$.