Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

М.Г. Ахметшин, Х.С. Гумерова, Н.П. Петухов

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Учебное пособие

Казань
Издательство КНИТУ
2012

УДК 531

Ахметшин М.Г.

Теоретическая механика : учебное пособие / М.Г. Ахметшин, Х.С. Гумерова, Н.П. Петухов; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2012. – 139 с.

ISBN 978-5-7882-1328-6

Изложены теоретические вопросы по статике, кинематике и динамике, приведены контрольные задания и примеры решения задач.

Предназначено для студентов всех форм обучения, изучающих дисциплину «Теоретическая механика».

Подготовлено на кафедре теоретической механики и сопротивления материалов.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *В.А. Иванов*
ст. науч. сотр. Ин-та механики и машиностроения КазНЦ РАН, канд. физ.-мат. наук *Д.Ю. Топорков*

ISBN 978-5-7882-1328-6

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии, предназначенном для изучения дисциплины «Теоретическая механика» студентами очной и заочной форм обучения технологических и механических специальностей, изложены теоретические вопросы по статике, кинематике и динамике, приведены контрольные задания, указания и примеры решения задач.

Студенты-заочники выполняют две контрольные работы. Первая работа включает темы: «Статика твердого тела», «Кинематика точки», «Кинематика твердого тела», «Сложное движение точки». Вторая работа включает такие темы, как «Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки», «Общие теоремы динамики точки», «Общие теоремы динамики механической системы». О задачах, входящих в контрольные работы, сообщается преподавателем на установочной лекции. Задачи выбираются согласно шифру. ***Шифром*** *являются две последние цифры в зачетной книжке студента.* Контрольные работы выполняются в тетради, на обложке которой указывается фамилия и инициалы, номер группы и номер зачетной книжки.

Прежде чем приступить к решению задач, необходимо изучить соответствующий теоретический материал и разобрать примеры решения задач, приведенных в данном пособии.

При оформлении работы следует написать условия и исходные данные задач. Решения необходимо сопровождать краткими пояснениями с указанием применяемых теорем. Рисунки должны быть выполнены аккуратно с помощью циркуля и линейки.

Теоретическая механика или *классическая механика* – это наука о механическом движении и механическом взаимодействии материальных тел. *Механическим движением* называется изменение с течением времени положения материальных тел в пространстве.

Теоретическая механика состоит из трех частей – *статики*, *кинематики* и *динамики*.

1. Статика

Основные понятия и определения

Основными *задачами статики* являются: 1) приведение данной системы сил к простейшему виду; 2) определение условий равновесия систем сил, действующих на твердое тело.

В зависимости от постановки задачи тело рассматривается с учетом или без учета его размеров. В последнем случае тело представляют в виде *материальной точки*, которая обладает массой и способностью взаимодействовать с другими телами. Тело, которому из данного положения можно сообщить любое перемещение в пространстве, называется *свободным*. В противном случае тело является *несвободным*. *Абсолютно твердое тело* – это материальное тело, в котором расстояние между двумя любыми точками остается неизменным. В природе, безусловно, таких тел нет, поскольку при действии сил тела изменяют свою форму. Однако, например, при определении реакций связей данная гипотеза не вносит существенной погрешности.

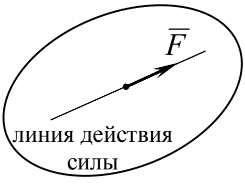

Рис. 1.1

Сила – является основной мерой механического взаимодействия материальных тел. Сила – величина векторная и определяется числовым значением (модулем), направлением и точкой приложения. Условимся в дальнейшем векторы обозначать черточкой сверху или жирным шрифтом.

За единицу силы в системе СИ принимается Ньютон (Н). Сила, величиной 1 Н, приложенная к покоящемуся телу массой 1 кг, вызывает движение тела с ускорением 1 м/с^2.

Линия, по которой направлена сила, называется *линией действия силы* (рис. 1.1).

Совокупность нескольких сил, действующих на данное тело или систему тел, называется *системой сил*. Если линии действия всех сил лежат в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*, а если линии действия сил не лежат в одной плоскости, – *пространственной*. Силы, линии действия которых пересекаются в данной точке, называются *сходящимися*, а силы, линии действия которых параллельны друг другу, – *параллельными*.

Твердое тело может находиться в состоянии покоя или некоторого движения. Каждое из этих состояний условимся называть *кинематическим состоянием тела*. Если две системы сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right)$ и $\left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_m\right)$ вызывают у одного и того же тела одинаковое кинематическое состояние, то такие две системы сил являются *эквивалентными*: $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right) \sim \left(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_m\right)$. Если система сил $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right) \sim \overline{R}$, то сила $\overline{R}$ называется *равнодействующей* данной системы сил. Систему сил называют *уравновешенной*, если она, будучи приложенной к покоящемуся телу, не изменяет его состояние покоя. Уравновешенная система сил эквивалентна нулю: $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n\right) \sim 0$.

Сила, действующая на тело по малой площадке, называется *сосредоточенной* (условно считают – приложена в точке).

Силы, действующие на части объема, поверхности или линии, называются *распределенными*. Распределенные силы характеризуются интенсивностью q, т.е. значением силы, приходящейся на единицу объема (в случае объемных сил), на единицу площади (в случае поверхностных сил), на единицу длины (в случае действия сил по линии).

Пример. На брус длиной $l = 10$ м действует равномерно распределенная сила интенсивности $q = 0{,}2$ кН/м (рис. 1.2), т.е. на каждый метр длины бруса действует сила 0,2 кН. Определим равнодействующую равномерно распределенной силы, которая приложена посредине бруса:

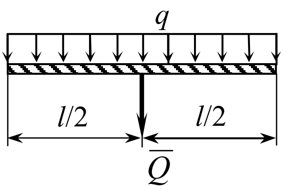

Рис. 1.2

$$Q = ql = 0{,}2 \text{ кН/м} \cdot 10 \text{ м} = 2 \text{ кН}.$$

Аксиомы статики

Первая аксиома. *Система двух равных по величине, но противоположно направленных сил, приложенных к одному телу, и действующих по одной прямой, эквивалентна нулю.* Это утверждение можно записать следующим образом: $F_1 = F_2$, $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim 0$. Тело находится в равновесии (рис. 1.3).

Вторая аксиома. *Механическое состояние тела не изменится, если к системе сил добавить или изъять из нее систему сил, эквивалентную нулю.* Суть аксиомы в том что, если к телу приложена система сил $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ и имеется уравновешенная система сил $(\overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_m) \sim 0$, то $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \sim (\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n, \overline{P}_1, \overline{P}_2, ..., \overline{P}_m)$.

Следствие аксиом 1 и 2. *Не нарушая состояния абсолютно твердого тела, точку приложения силы можно переносить по ее линии действия.*

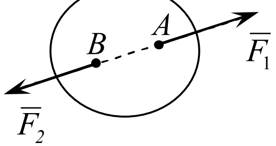

Рис. 1.3

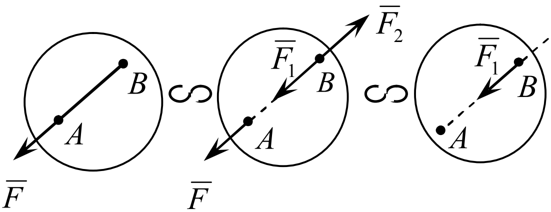

Рис. 1.4

Доказательство. Пусть сила $\overline{F}$ приложена в точке A твердого тела (рис. 1.4). Приложим уравновешенную систему сил ($\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$) в точке B, лежащей на линии действия силы $\overline{F}$, причем $\overline{F} = \overline{F}_1 = -\overline{F}_2$. Очевидно, что силы $\overline{F}$ и $\overline{F}_2$ составляют уравновешенную систему сил и ее можно изъять. Тогда $\overline{F} \sim (\overline{F}, \overline{F}_1, \overline{F}_2) \sim \overline{F}_1$. Таким образом, силу можно перемещать по линии ее действия, т.е. она есть вектор *скользящий*.

Третья аксиома. *Всякое действие вызывает равное и прямо противоположное противодействие.* Эту аксиому в динамике называют *третьим законом Ньютона* о равенстве действия и противодействия.

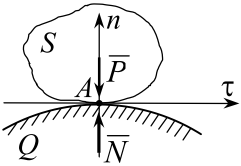

Рис. 1.5

Допустим тело S (рис. 1.5) оказывает давление в точке A на тело Q силой $\overline{P}$. В свою очередь тело Q действует на тело S в точке A силой $\overline{N}$. В соответствие с аксиомой силы равны по модулю $P = N$, но противоположны по направлению: $\overline{N} = -\overline{P}$. В данном случае силы приложены к разным телам, поэтому здесь нельзя применять первую аксиому статики.

Силы взаимодействия двух тел направлены по одной линии действия и могут зависеть от расстояния между ними. Так, например, любая пара молекулы неона находится в постоянном взаимодействии. Если расстояние между ними 2,5Å (1Å=10^{-10} м), то возникают силы отталкивания. На расстоянии 3,5Å действуют уже силы притяжения, а на расстоянии 5Å силы взаимодействия практически равны нулю.

Четвертая аксиома. *Система двух сил* $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$, *приложенных в одной точке твердого тела, всегда имеет равнодействующую силу* $\overline{R}$ (рис. 1.6). Эта равно-действующая – равна векторной сумме $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$: $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$. Все три силы находятся в одной плоскости. Величину равнодействующей можно вычислить по теореме косинусов или найти как модуль диагонали параллелограмма:

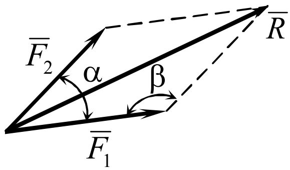

Рис. 1.6

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\beta} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}\,.$$

Данная аксиома допускает и обратное утверждение: *силу можно разложить бесчисленным множеством способов на две силы.*

Чаще всего силу $\overline{F}$ раскладывают на две взаимно перпендикулярные составляющие (рис. 1.7): горизонтальную $\overline{F}_x$ и вертикальную $\overline{F}_y$. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ является равнодействующей $\overline{F}$, а стороны AB и AD – искомыми составляющими: $\overline{F} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$.

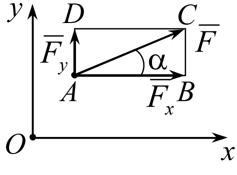

Рис. 1.7

Их модули $F_x = F\cos\alpha$, $F_y = F\sin\alpha$.

Проекция силы на ось

С понятием «составляющие силы» тесно соприкасается понятие «проекция силы на ось». *Проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между положительным направлением оси и направлением проектируемой силы*:

$$F_x = F\cos(\widehat{x,\overline{F}}), \qquad F_y = F\cos(\widehat{y,\overline{F}}).$$

Проекция силы на ось является алгебраической величиной. Если угол между положительным направлением оси и вектором силы заключен в пределах от 0° до 90°, либо от 270° до 360°, то проекция

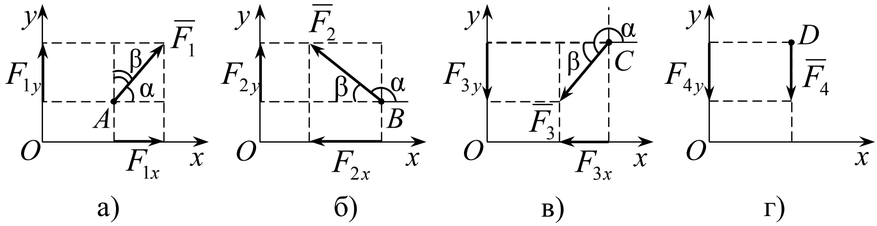

Рис. 1.8

силы на ось положительна. Если он лежит в пределах от 90° до 270°, то проекция силы на ось отрицательна. *Если сила перпендикулярна оси, то ее проекция на эту ось равна нулю.*

Например, для сил, изображенных на рис. 1.8, проекциями сил на оси x, y будут:

$$F_{1x} = F_1\cos\alpha = F_1\sin\beta, \qquad F_{1y} = F_1\sin\alpha = F_1\cos\beta,$$

$$F_{2x} = F_2\cos\alpha = -F_2\cos\beta, \qquad F_{2y} = F_2\sin\alpha = F_2\sin\beta,$$

$$F_{3x} = F_3\cos\alpha = -F_3\cos\beta, \qquad F_{3y} = F_3\sin\alpha = -F_3\sin\beta,$$

$$F_{4x} = 0, \qquad F_{4y} = -F_4.$$

Сложение сходящихся сил. Равновесие сходящихся сил

Изложим на примере четырех сходящихся сил, приложенных в точке O (рис.1.9), два способа сложения сил: векторный и аналитический. При *векторном способе сложения сходящихся сил* (его называют также геометрическим способом) равнодействующая $\overline{R}$

системы сил приложена в той же точке O и является замыкающей стороной силового многоугольника, построенного на слагаемых силах (рис. 1.10): $\overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD}$ или $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 + \overline{F}_4$.

При построении силового многоугольника надо к концу первого слагаемого вектора $\overline{F}_1$ присоединить параллельно перенесенный вектор $\overline{F}_2$, затем присоединить к концу вектора $\overline{F}_2$ параллельно перенесенный вектор $\overline{F}_3$ и т.д. Векторный способ сложения сходящихся векторов является простым и наглядным. Однако точность определения равнодействующей силы $\overline{R}$ зависит от точности построения силового многоугольника.

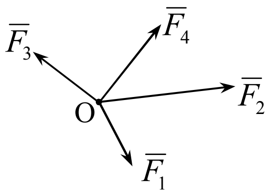

Рис. 1.9

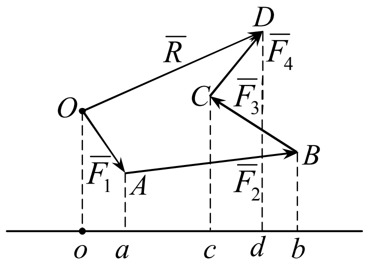

Рис. 1.10

На практике чаще применяют *аналитический способ сложения сходящихся сил*, который называют способом проекций. Спроектируем силы $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на горизонтальную ось и алгебраически сложим их проекции:

$$od = oa + ab - bc + cd \ .$$

Проекцией равнодействующей $\overline{R}$ сходящихся сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4$ на горизонтальную ось будет отрезок od.

Обобщая эти способы сложения сходящихся сил для плоской системы n сил, и обозначив проекции равнодействующей на оси координат через $R_x, R_y,$ можно написать равенства в векторном виде и в проекциях на оси координат:

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \ , \qquad R_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \ , \quad R_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \ . \qquad (1.1)$$

Модуль равнодействующей определим через ее проекции на координатные оси: $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$. Направление равнодействующей определяется через ее направляющие косинусы:

$$\cos(x, \hat{\overline{R}}) = R_x / R, \quad \cos(y, \hat{\overline{R}}) = R_y / R.$$

В случае равновесия системы сходящихся сил равнодействующая $\overline{R} = 0$. Ее модуль $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 0$, следовательно

$$R_x = 0, \quad R_y = 0. \tag{1.2}$$

Учитывая равенства (1.1) и (1.2), получим *уравнения равновесия плоской системы сходящихся сил:*

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \tag{1.3}$$

Таким образом, *для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю суммы проекций всех сил на оси координат.*

Момент силы относительно центра (точки)

Пусть на тело в точке A действует сила $\overline{F}$ (рис. 1.11). Из некоторого центра O проведем радиус-вектор $\overline{r} = \overline{OA}$. *Моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется вектор, равный векторному произведению радиус-вектора $\overline{r}$, проведенного из центра O в точку A, где приложена сила, на вектор силы $\overline{F}$* :

$$\overline{m}_O(\overline{F}) = [\overline{r} \times \overline{F}]. \tag{1.4}$$

Из определения векторного произведения следует, что вектор $\overline{m}_O(\overline{F})$ направлен перпендикулярно плоскости ΔOAB, образованной векторами $\overline{r}$ и $\overline{F}$, в ту сторону, откуда мы видим направление силы $\overline{F}$ против хода часовой стрелки. Модуль вектора момента равен

$$\left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| = \left|\overline{r}\right| \times \left|\overline{F}\right| \cdot \sin\alpha = \left|\overline{F}\right| \cdot h,$$

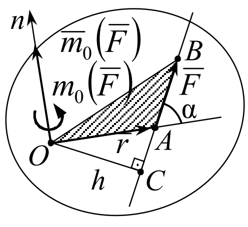

Рис. 1.11

где $h=|\bar{r}|\sin\alpha=OC$ – плечо силы $\bar{F}$ относительно центра O, т.е. кратчайшее расстояние от центра O до линии действия силы $\bar{F}$.

Наряду с определением момента силы относительно центра (как вектор) сформулируем определение момента силы относительно точки (как алгебраическая величина).

Момент силы $\bar{F}$ относительно точки O есть взятое со знаком плюс или минус произведение модуля силы на кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы:

$$m_O(\bar{F})=\pm Fh. \tag{1.5}$$

Момент силы измеряется Ньютон-метрами (Н·м). Алгебраическая величина момента силы $m_O(\bar{F})$ изображается в виде дуговой стрелки (рис. 1.11). *Момент является положительным, если сила стремится повернуть тело относительно точки против хода часовой стрелки.* Отметим два свойства момента силы относительно точки. *Момент силы относительно точки не изменится, если силу как скользящий вектор перенести вдоль линии действия.* Например, если точку приложения A силы $\bar{F}$ перенести в точку C (рис. 1.11). *Момент силы относительно точки равняется нулю, если точка лежит на линии действия этой силы.* В этом случае плечо h равно нулю.

Пара сил. Момент пары сил

Система двух равных по модулю, параллельных и противоположно направленных сил $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, называется парой сил (рис. 1.12). Плоскость, в которой находятся линии действия сил $\bar{F}$ и $\bar{F}'$, называется *плоскостью действия пары сил*. Расстояние $d=AB$ между линиями действия сил называется *плечом пары сил*.

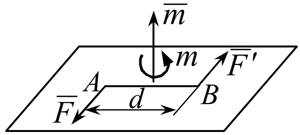

Рис. 1.12

Пара сил стремится повернуть тело в плоскости действия сил. *Момент пары равен произведению модуля одной из сил пары на ее плечо:* $m=\pm Fd$. Знак момента пары определяется так же, как для момента силы. Момент пары можно представить в виде *вектора* $\bar{m}$, направленного перпендикулярно плоскости действия пары сил. *Момент пары – вектор свободный.* Свободный вектор можно переносить в пространстве как угодно, не меняя направление, например, вектор $\overline{m}$ (рис. 1.12) можно направить от точки B.

Пара сил не имеет равнодействующей, однако, силы пары не уравновешиваются, так как они не направлены по одной прямой.

Отметим еще одно свойство пары сил: *две пары сил, имеющие одинаковые моменты, эквивалентны.*

Момент силы относительно оси

Пусть вектор $\overline{F}_{xy}$ является проекцией силы $\overline{F}$ на плоскость xy, а ось z пересекает эту плоскость в точке O_1. *Момент* $m_z(\overline{F})$ *силы* $\overline{F}$ *относительно оси z равен моменту проекции* $\overline{F}_{xy}$ *относительно точки* O_1 :

$$m_z(\overline{F}) = \pm F_{xy} h \,, \tag{1.6}$$

где h – кратчайшее расстояние от точки O_1 до линии действия силы $\overline{F}_{xy}$ (рис. 1.13). Момент силы относительно оси будет положительным, если сила $\overline{F}_{xy}$ стремится повернуть тело вокруг оси z (как это показано на рис. 1.13) против хода часовой стрелки.

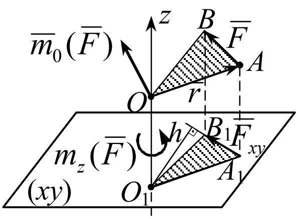

Рис. 1.13

Момент силы относительно оси z равен нулю в двух случаях:

1) если $F_{xy} = 0$, т.е. линия действия силы $\overline{F}$ параллельна оси z ;

2) если $h = 0$, т.е. линия действия силы $\overline{F}$ пересекает ось z .

Отсюда следует, что *если сила и ось лежат в одной плоскости, то момент силы относительно этой оси равен нулю.*

Выразим момент силы $\overline{F}$ относительно центра O через его проекции на оси координат:

$$\overline{m}_o(\overline{F}) = m_x(\overline{F})\,\overline{i} + m_y(\overline{F})\,\overline{j} + m_z(\overline{F})\,\overline{k} = \left[\overline{r} \times \overline{F}\right] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$= (yF_z - zF_y)\,\bar{i} + (zF_x - xF_z)\,\bar{j} + (xF_y - yF_x)\,\bar{k}\ ,$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - орты осей координат,

x, y, z - координаты точки A приложения силы $\bar{F}$,

F_x, F_y, F_z - проекции силы на оси координат.

Сопоставляя выражения при ортах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, получим аналитические формулы для моментов силы относительно координатных осей:

$$m_x(\bar{F}) = yF_z - zF_y\,, \quad m_y(\bar{F}) = zF_x - xF_z\,, \quad m_z(\bar{F}) = xF_y - yF_x\,. \quad (1.7)$$

В случае, если сила $\bar{F}$ лежит в плоскости Oxy , то

$$m_x(\bar{F}) = m_y(\bar{F}) = 0\,, \qquad m_z(\bar{F}) = m_o(\bar{F}) = xF_y - yF_x\,. \qquad (1.8)$$

Связи и их реакции

Тело, которое может совершать любые перемещения в пространстве, называется *свободным*. Тело, перемещения которого ограничиваются со стороны других тел, называется *несвободным*. *Связями* называется любого вида ограничения, которые налагаются на положения тела в пространстве.

Сила, способная привести покоящееся тело в движение, называется *активной*. Сила, препятствующая со стороны связи тем или иным его перемещениям, называется силой реакции (противодействия) связи или просто *реакцией связи*.

Покажем направление реакций некоторых основных видов связей.

Гладкая поверхность (рис. 1.14). Поверхность называется гладкой, если можно пренебречь силами трения между телами, взаимодействующих по этой поверхности. Гладкая поверхность не позволяет перемещаться телу A по направлению нормали к поверхностям тел в точках их касания. Поэтому реакции $\bar{R}, \bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3$ будут направлены по нормалям и приложены в точках взаимодействия.