ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО СВЯЗИ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

ПОВОЛЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра высшей математики

Алашеева Е.А.

Рогова Н.В.

Операционное исчисление

по дисциплине математика

САМАРА

ИУНЛ ПГУТИ

2010

УДК 519.2

Б 58

Операционное исчисление/ Алашеева Е.А, Рогова Н.В.-Самара: ГОУВПО ПГУТИ, 2010.-

Рецензент:

Клюев Д.С. – к.ф.м.н., доцент, кафедры ОКиТ РТС, ПГУТИ.

Учебное пособие затрагивает такой раздел высшей математики как: операционное исчисление. Для студентов университетов и вузов, а также для специалистов, желающих изучать операционное исчисление самостоятельно.

Каждая глава заканчивается контрольными вопросами, которые помогут проверить теоретическое освоение курса, содержит большое количество задач для самостоятельного решения и задания типовых расчетов.

Рекомендовано Методическим советом ГОУ ВПО ПГУТИ в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по специальности 210404, 230105, 230201, 210406

Протокол заседания Методического совета ПГУТИ

№ 4 от 21 октября 2010г.

Введение

Операционное исчисление есть часть математического анализа, изучающая свойства преобразования Лапласа и его применение к решению различного типа задач анализа, главным образом задач с начальными условиями, для обыкновенных дифференциальных уравнений. Преобразование Лапласа представляет собой определенный закон соответствия между функциями, т.е. закон, по которому каждой функции из некоторого множества функций одной переменной становится в соответствие одна определенная функция, также зависящая от одного аргумента. Такие соответствия между множествами функций называются операторами. Понятие оператора аналогично понятию функциональной зависимости, осуществляющей однозначное соответствие между множествами чисел. Примерами операторов служат:

1. Функция F, ставящая в соответствие функции $f(x)$ сложную функцию $F(f(x))$, например, функцию $f^3(x)$.

2. Соответствие между монотонными функциями $y = f(x)$ и обратными к ним функциям $x = \varphi(y)$.

3. Оператор дифференцирования, определенный на множестве дифференцируемых

функций и ставящий в соответствие функции $f(x)$ производную $\frac{d}{dx}f(x) = f'(x)$.

4. Оператор интегрирования, задающий соответствие между непрерывной функцией $f(x)$ и первообразной к ней функцией $\int_a^x f(t)dt$.

Возможность производить действия над самими операторами открывает совершенно новый подход к решению некоторых задач, например, дифференциальных уравнений, содержащих оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$. В таком случае данное линейное дифференциальное уравнение, например $\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 4y = q(x)$, представляется формально в виде $\left(\frac{d^2}{dx^2} - 5\frac{d}{dx} + 4\right)y = q(x)$. В этом случае считают, что к неизвестной функции y применено некоторое действие, зависящее от символа $\frac{d}{dx}$ следующим образом: $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 - 5\frac{d}{dx} + 4 = F\left(\frac{d}{dx}\right)$, где $F(p) = p^2 - 5p + 4$, и дающее в результате функцию в правой части $F\left(\frac{d}{dx}\right) = q(x)$. Если сможем производить обратное действие с $F\left(\frac{d}{dx}\right)$, то сможем и решать данное уравнение с любой правой частью, т.е. представить решение в виде некоторого оператора, действующего на правую часть $q(x)$.

Операционное (символическое) исчисление применяется не только для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, но и для решения уравнений с частными производными, дифференциально-разностных уравнений и линейных интегральных уравнений, к которым приводят задачи по переходным процессам линейных физических систем электротехники, радиотехники, импульсной техники, теории автоматического регулирования, теплопроводности, горной техники, телемеханики, теории следящих систем.

Выдающийся советский ученый в области теории колебаний и автоматического управления Андронов А.А. (1901-1952) говорил, что операционное исчисление является азбукой современной автоматики и телемеханики.

О значении операционного исчисления английский математик Э.Т. Уиттнер писал: ”… мы должны считать операционное исчисление наряду с открытиями Пуанкаре автоморфных функций и открытиями Риччи тензорного исчисления тремя наиболее важными успехами математики за последнюю четверть 19 века”.

Оператор – математическое понятие, означающее в самом общем смысле соответствие между элементами двух множеств X и Y.

Первые сведения об операционном исчислении встречаются уже в работах Лейбница (1646-1717), Эйлера (1707-1783), Лагранжа (1736-1813), Лапласа (1749-1827), Фурье (1768-1830), Коши (1789-1857).

Английский инженер-электрик Ол. Хевисайд положил начало систематическому применению операционного исчисления к решению физико-технических задач, поэтому создание операционного исчисления обычно связывают с его именем.

Методы операционного исчисления являются удобными и достаточно мощными средствами для решения многих задач, которые находят многочисленные приложения.

Идея метода заключается в том, что из области функции действительных переменных решение переноситься в область функции комплексного переменного и при этом вместо дифференциального или интегрального уравнения получаются алгебраические уравнения.

Результат, полученный при решении алгебраических уравнений, переводится в область действительного переменного с помощью функции и таблиц.

В самой математике, кроме решения дифференциальных уравнений и систем, операционное исчисление находит применение в теории специальных функций, при вычислении интегралов, суммировании функциональных рядов, а также в некоторых проблемах теории чисел.

1. Оригинал и изображение. Основные теоремы нахождения оригинала и изображения

► **Определение** Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1) функция $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
2) при $t \geq 0$ функция $f(t)$ на любом конечном участке оси t имеет не более, чем конечное число точек разрыва первого рода, т.е. она интегрируема на любом конечном интервале оси t;
3) функция $f(t)$ возрастает не быстрее чем некоторая показательная функция, т.е.

существует такие числа $M > 0$ и $S_0 \geq 0$, что для всех $t > 0$, $|f(t)| \leq M \cdot e^{S_0 t}$. (1)

► **Определение** S_0 называется показателем роста функции $f(t)$.

Условие (1) указывает на то, что если $|f(t)|$ при $t \to \infty$ возрастает, то не очень быстро, медленнее, чем возрастает некоторая экспоненциальная функция.

♦ **Пример**

1) Все ограниченные функции – оригиналы, для них $S_0 = 0$ и $|f(t)| \leq M$, в частности $sinx$ и $cosx$.
2) Все степенные функции $f(t) = t^{\propto}$ ($\propto > 0$), т.к. любая такая функция растет, медленнее чем показательная функция e^t. Легко показать, применяя правило Лопиталя, что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{\propto}}{e^t} = 0.$$

3) Функции $f(t) = tgt, f(t) = t^{\propto}$ ($\propto < 0$) не являются оригиналами, т.к. имеют разрывы второго рода.
4) $f(t) = e^{t^2}$ не является оригиналом, т.к. при $t \to \infty$ она возрастает быстрее, чем e^t.