Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский технологический университет»

О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова

КРАТКИЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ КУРС ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ БАКАЛАВРОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ

Учебное пособие

Казань
Издательство КНИТУ
2013

УДК 51(075)

Дегтярева О.М.

Краткий теоретический курс по математике для бакалавров и специалистов: учебное пособие / О.М. Дегтярева, Г.А. Никонова; М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань: КНИТУ, 2013. – 136 с.

ISBN 978-5-7882-1523-5

Содержит краткие теоретические сведения по всем основным разделам высшей математики.

Предназначено для студентов бакалаврской подготовки и специалистов, обучающихся в КНИТУ.

Подготовлено на кафедре высшей математики.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета.

Рецензенты: д-р. физ.- мат. наук, профессор каф. ВМ КГАСУ *В.Л. Крепкогорский*
канд. физ.-мат. наук, доцент каф. общей математики К(П)ФУ *Н.П. Заботина*

ISBN 978-5-7882-1523-5

Пособие содержит краткие теоретические сведения по курсу высшей математики, необходимые при решении практических задач и прохождении промежуточного и итогового тестирования согласно ГОСтам для выпускников технологического университета. В работе используются обозначения, принятые в учебно–методическом комплексе, разработанном на кафедре под редакцией Л.Н. Журбенко

Список используемых обозначений

$\Leftrightarrow$ – равносильность (эквивалентность)
$\wedge$ – и (конъюнкция)
$\vee$ – или (дизъюнкция)
$\forall$ – любой
$\exists$ – существует
$\exists!$ – существует и единственно
$\nexists$ – не существует
$\Rightarrow$ – следует
$\to$ – стремится выполнять равенство
$\parallel$ – параллельны
$\uparrow\uparrow$– параллельны и одинаково направлены
$\uparrow\downarrow$ – параллельны и противоположно направлены
$\perp$ – перпендикулярность
Δ, det – определитель
N, Z, Q, R, C – множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел, соответственно
R^n – n – мерное векторное пространство
$\equiv$ – тождественно
$\sim$ – эквивалентно
$\subset$ – включает
$\subseteq$ – включает или равно

$\in$ – принадлежит
$\notin$ – не принадлежит
$\varnothing$ – пустое множество
$\cup$ – объединение множеств
$\cap$ – пересечение множеств
$\setminus$ – разность множеств
$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}$ – отображение множеств, соответствие
$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftrightarrow}}$ – взаимно–однозначное соответствие
т. – точка
гмт – геометрическое место точек
$\overline{1,n}$ – все значения от 1 до n
б.м. – бесконечно малая функция
б.б. – бесконечно большая функция
э. – экстремум
$\alpha=o(\beta)$ – б.м. более высокого порядка малости по сравнению с β
D(f) – область определения функции
E(f) – область допустимых значений функции
$U_\delta(a)$ – дельта–окрестность т. a
C[X] – класс функций, непрерывных на множестве X
$C_{[a,b]}$ – класс функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$
$f\circ\varphi$ – суперпозиция функций f и φ
т.р. – точка разрыва
т.п. – точка перегиба
$\nearrow$ – возрастает
$\searrow$ – убывает
$\cap$ – выпуклый вверх (выпуклый)
$\cup$ – выпуклый вниз (вогнутый)
Re – действительная часть числа
Im – мнимая часть числа

!   – факториал

П – поток векторного поля

Ц – циркуляция векторного поля

$C'[X]$ – класс функций, непрерывно дифференцируемых на множестве X

J   – якобиан преобразования координат

W(x) – определитель Вронского

gradU – градиент скалярного поля U

div $\vec{a}$ – дивергенция векторного поля $\vec{a}$

Часть 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

I. Определители

Матрица размера mxn – таблица чисел из m строк и n столбцов. Если m и n совпадают, то матрица называется ***квадратной размера n.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{ij}, \mathrm{i}, \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}$ – элементы матрицы; i – номер строки; j – номер столбца.

Определителем II порядка, соответствующим квадратной матрице второго порядка, называется число, обозначаемое Δ, вычисленное по правилу $\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

Определителем III порядка, для квадратной матрицы III порядка, называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей:

1. Определитель Δ не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами.

2. Δ равен сумме произведений элементов любого ряда (строки или столбца) на их алгебраические дополнения $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$,

M_{ij} – определитель, полученный из данного вычеркиванием i–ой строки и j–го столбца. Разложение определителя третьего порядка по II столбцу: $\Delta = a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32} = -a_{12}M_{12}+ a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$.

3. При перестановке двух параллельных рядов (столбцов или строк) знак определителя меняется на противоположный.

4. Δ=0, если все элементы некоторого ряда равны нулю или соответствующие элементы двух параллельных рядов пропорциональны.

5. Общий множитель элементов ряда можно вынести за знак Δ.

6. Δ не изменится, если к элементам его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

Аналогично определителю III порядка вводится определение определителя n–го порядка.

II. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решением системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

, где x_j – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_i, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – свободные члены, называется совокупность чисел x_j^*, , которая при подстановке вместо $x_j, j=\overline{1,n}$ в каждое уравнение системы обращает его в тождество.

Решить систему – значит либо найти все ее решения, либо доказать, что решений не существует.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ –основная матрица системы,

$$(A \setminus B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Обозначим i–ю строку матрицы A через $a_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ ...a_{in})$.

Строки $a_1,a_2,...a_m$ линейно зависимы, если $\exists$числа $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+...+\alpha_m a_m=0$. В противном случае строки – линейно независимы. ***Рангом матрицы A (rgA)*** называется максимальное число линейно–независимых строк матрицы.

Для решения систем применяется ***метод Гаусса*** – метод последовательных исключений неизвестных из уравнений системы.

Прямой ход метода Гаусса. Преобразования проводятся с матрицей (A\B). Если $a_{11}\neq 0$, то при умножении первой строки последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}},\dots,-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и сложении соответственно со 2,..., m –ой строками получим матрицу (A\B) ~ $\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$

Аналогичные преобразования производим с матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$ и т.д., пока не получим матрицу ступенчатого вида: (A\B)~$\left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r-1} & a_{1r} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2r-1} & a'_{2r} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a''_{rr} & \dots & a''_{rn} & b''_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right)$, причем ***rg(A\B)=r, r – число ненулевых строк в ступенчатой матрице.***

Обратный ход метода Гаусса. Восстанавливаем систему уравнений и находим ее решение. При этом возможны случаи:

1. Система несовместна rgA≠ rg(A\B).
2. **r** < n, система имеет бесчисленное множество решений.
3. r=n – решение системы единственно. Последней ненулевой строке соответствует уравнение $a_{nn}''x_n = b_n''$, из него находим x_n, а далее последовательно – $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

Если n=m и Δ≡detA≠0 – решение системы единственно и может быть найдено по формулам ***Крамера:*** $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, j = \overline{1,n}.$ Δ_j – определитель неизвестного x_j получается из Δ заменой j–го столбца столбцом свободных членов.

Действия над матрицами.
Матричный способ решения систем

Матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, размерности **m×n** называются ***равными,*** если $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$. ***Суммой матриц А и В*** размерности **mxn** называется матрица той же размерности $C=(a_{ij}+b_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Матрица, все элементы которой нули, называется ***нуль–матрицей***, обозначается 0. ***Произведением матрицы А на число*** μ называется матрица $B=\mu A=(\mu\, a_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$. ***Произведением матрицы А размерности т×р на матрицу В размерности р×п*** (число столбцов матрицы А равно числу строк матрицы В) называется матрица $C=(a_{i1}b_{1j}+ a_{i2}b_{2j} +...+ a_{ip}b_{pj})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Свойства: 1) В общем случае $AB\neq BA$.

2) $A(BC)=(AB)C$, $(A+B)C = AC+BC$.

Единичная матрица Е – квадратная матрица вида

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \dots 0 \\ & \dots\dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной для квадратной матрицы*** А, если $AA^{-1}= A^{-1}A =E$.

Для ***невырожденной*** ($\det A\neq 0$) квадратной матрицы А обратная ей матрица имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ –алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя Δ=detA.

Систему линейных алгебраических уравнений при **m=n** можно записать в матричном виде AX=B и решить в матричным способом $X=A^{-1}B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots.a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектор – направленный отрезок прямой.

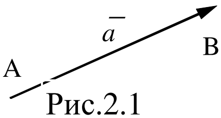

Рис.2.1

Обозначение вектора $\overline{a}$ или $\overline{AB}$, A – начало, B – конец вектора; длина вектора (модуль) обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{AB}|$ (рис. 2.1).

Нуль – вектор – точка. ***Вектора коллинеарны***, если лежат на параллельных прямых. ***Вектора компланарны***, если расположены в параллельных плоскостях. ***Вектора равны,*** если они: коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. ***Суммой*** $\overline{a}+\overline{b}$ ***векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если конец вектора $\overline{a}$ совмещен с началом $\overline{b}$, называется вектор $\overline{c}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ с концом $\overline{b}$. ***Разностью*** $\overline{a}-\overline{b}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, для которого $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$, то есть вектор $\overline{c}$, соединяющий конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого вектора, если начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ совмещены.

Произведением $\lambda\overline{a}$ ***вектора*** $\overline{a}$ ***на число*** λ называется вектор $\overline{b}$: $|\overline{b}| = |\lambda|\,|\overline{a}|$, $\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$ и направлен в ту же сторону при $\lambda>0$ ($\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$) и в противоположную сторону – при $\lambda<0$ ($\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$).

Линейной комбинацией векторов $\overline{a_1}, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a_n}$ называется вектор $\overline{c}=\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{a_k}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – действительные числа.

Векторы $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}$ ***– линейно зависимы,*** если $\exists\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$, что их линейная комбинация равна нулю, в противном случае – линейно – независимы.

Базис на плоскости (пространстве) – максимальная линейно независимая на плоскости (пространстве) система векторов.

Если $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ – базис в пространстве, то вектор $\overline{a}$ раскладывается единственным образом: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \alpha_3 \overline{e}_3$.
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$– координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$:
$\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Если $\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\overline{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то
1) $\overline{a} \pm \overline{b} = \{\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \alpha_3 \pm \beta_3\}$;
2) $\lambda \in R$: $\lambda \overline{a} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\}$.
$\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны ($\overline{b} = \lambda \overline{a}$) $\Leftrightarrow$ если $\alpha_1/\beta_1 = \alpha_2/\beta_2 = \alpha_3/\beta_3$.

Проекцией т. А на ось l называется основание перпендикуляра АА′, опущенного из т. А на $\boldsymbol{l}$: пр$_l$ А= А′.
Составляющая вектора $\overline{AB}$ ***по оси l*** – вектор $\overline{A'B'}$, где
А′= пр$_l$А, B′= пр$_l$B (рис. 2.2 – 2.4).
Проекцией вектора $\overline{AB}$ ***на l*** называется число
пр$_l \overline{AB} = \pm|\overline{A'B'}|$.

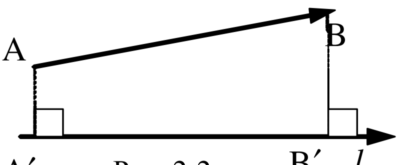

Рис. 2.2

Знак (+) берется , если $\overline{A'B'} \uparrow\uparrow l$, знак (–) – если $\overline{A'B'} \uparrow\downarrow l$. Если $\overline{e}$ – единичный вектор (т.е. $|\overline{e}| = 1$) в направлении l, то
$\overline{A'B'} =$ пр$_l \overline{AB} \cdot \overline{e}$.

Свойства проекций:

1. пр$_l \overline{a} = |\overline{a}|\cos\varphi$, где $\varphi = (\overline{a} \wedge l)$.
2. Проекция суммы векторов на ось l равна сумме проекций векторов на l .
3. пр$_l$ k$\overline{a}$ = k пр$_l \overline{a}$, k = const.