Министерство образования и науки России
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Казанский национальный исследовательский
технологический университет»

Н.Н. Газизова, О.М. Дегтярева,
Р.Н. Хузиахметова

ПОДГОТОВКА К ИТОГОВОМУ ТЕСТИРОВАНИЮ ПО МАТЕМАТИКЕ В ВЫСШЕЙ ШКОЛЕ. БАНК ТЕСТОВ

Учебное пособие

Казань
Издательство КНИТУ
2013

УДК 51(075)

Газизова Н.Н.

Подготовка к итоговому тестированию по математике в высшей школе. Банк тестов : учебное пособие / Н.Н. Газизова, О.М. Дегтярева, Р.Н. Хузиахметова, М-во образ. и науки России, Казан. нац. исслед. технол. ун-т. – Казань : Изд-во КНИТУ, 2013. – 236 с.

ISBN 978-5-7882-1402-3

Основная цель работы – подготовить студентов к тестированию по курсу высшей математики. Содержит теоретические сведения, задачи с решениями, 30 вариантов индивидуальных заданий с ответами.

Предназначено для студентов всех направлений бакалаврской подготовки в качестве руководства при подготовке к итоговой проверке знаний по математике в технологическом университете.

Подготовлено на кафедре высшей математики.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Казанского национального исследовательского технологического университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор каф. ВМ КГАСУ
В.Л. Крепкогорский
канд. физ.-мат. наук, доцент каф. МиЭИ КФУ
Е.М. Романова

ISBN 978-5-7882-1402-3

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по курсу высшей математики и варианты тестов для проверки усвоения студентами необходимого объема знаний согласно существующим ГОСтам для выпускников технологического университета. В пособии используются обозначения, принятые в учебно–методическом комплексе, разработанном на кафедре под редакцией Журбенко Л.Н.

Список используемых обозначений

$\Leftrightarrow$ – равносильность (эквивалентность)

$\wedge$ – и (конъюнкция)

$\vee$ – или (дизъюнкция)

$\forall$ – любой

$\exists$ – существует

$\exists!$ – существует и единственно

$\nexists$ – не существует

$\Rightarrow$ – следует

$\rightarrow$ – стремится выполнять равенство

$\uparrow\uparrow$ – параллельны и одинаково направлены

$\uparrow\downarrow$ – параллельны и противоположно направлены

$\perp$ – перпендикулярность

Δ, det – определитель

N, Z, Q, R, C – множества натуральных, целых, рациональных, действительных, комплексных чисел, соответственно

R^n – n – мерное векторное пространство

$\equiv$ – тождественно

$\sim$ – эквивалентно

$\subset$ – включает

$\subseteq$ – включает или равно

$\in$ – принадлежит

$\notin$ – не принадлежит

$\varnothing$ – пустое множество

$\cup$ – объединение множеств

$\cap$ – пересечение множеств

$\setminus$ – разность множеств

$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\rightarrow}}$ – отображение множеств, соответствие

$\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{\leftrightarrow}}$ – взаимно–однозначное соответствие

т. – точка

гмт – геометрическое место точек

{ } – дробная часть числа, элементы множества, неопределенность

$\overline{1,n}$ – все значения от 1 до n

б.м. – бесконечно малая функция

б.б. – бесконечно большая функция

э. – экстремум

$\alpha=o(\beta)$ – б.м. более высокого порядка малости по сравнению с β

D(f) – область определения функции

E(f) – область допустимых значений функции

$U_\delta(a)$ – дельта–окрестность т. a

C[X] – класс функций, непрерывных на множестве X

$C_{[a,b]}$ – класс функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$

$f\circ\varphi$ – суперпозиция функций f и φ

т.р. – точка разрыва

т.п. – точка перегиба

$\nearrow$ – возрастает

$\searrow$ – убывает

$\cap$ – выпуклый вверх (выпуклый)

$\cup$ – выпуклый вниз (вогнутый)

Re – действительная часть числа

Im – мнимая часть числа

! – факториал

П – поток векторного поля

Ц – циркуляция векторного поля

$C'[X]$ – класс функций, дифференцируемых на множестве X непрерывно

J – якобиан преобразования координат

W(x) – определитель Вронского, вронскиан

gradU – градиент скалярного поля U

div $\vec{a}$ – дивергенция векторного поля $\vec{a}$

Часть 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.

Глава 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

I. Определители

Матрица размера mxn – таблица чисел из m строк и n столбцов. Если m и n совпадают, то матрица называется ***квадратной размера n.***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Числа $a_{ij}, \mathrm{i}, \mathrm{j} = \overline{1, n}$ – элементы матрицы; i – номер строки; j – номер столбца.

Определителем II порядка, соответствующим квадратной матрице второго порядка, называется число, обозначаемое Δ, вычисленное по правилу $\Delta \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$.

Определителем III порядка, для квадратной матрицы III порядка, называется число, вычисляемое по правилу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Свойства определителей:

1. Определитель Δ не изменится, если все его строки заменить соответствующими столбцами.

2. Δ равен сумме произведений элементов любого ряда (строки или столбца) на их алгебраические дополнения $A_{ij} =(-1)^{i+j} M_{ij}$,

M_{ij} – определитель, полученный из данного вычеркиванием i–ой строки и j–го столбца. Разложение определителя третьего порядка по II столбцу: $\Delta= a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=-a_{12}M_{12}+ a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$.

3. При перестановке двух параллельных рядов (столбцов или строк) знак определителя меняется на противоположный.

4. $\Delta=0$, если все элементы некоторого ряда равны нулю или соответствующие элементы двух параллельных рядов пропорциональны.

5. Общий множитель элементов ряда можно вынести за знак Δ.

6. Δ не изменится, если к элементам его ряда прибавить соответствующие элементы другого параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

Аналогично определителю III порядка вводится определение определителя n–го порядка.

II. Решение систем линейных алгебраических уравнений

Решением системой линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

, где x_j – неизвестные; a_{ij} – коэффициенты при неизвестных, b_i, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ – свободные члены, называется совокупность чисел x_j^*, , которая при подстановке вместо $x_j, j=\overline{1,n}$ в каждое уравнение системы обращает его в тождество.

Решить систему – значит либо найти все ее решения, либо доказать, что решений не существует.

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ –основная матрица системы,

$$(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B})=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ – расширенная матрица системы.

Обозначим i–ю строку матрицы А через $a_i=(a_{i1}\ a_{i2}\ \dots a_{in})$.

Строки $a_1,a_2,\dots a_m$ линейно зависимы, если $\exists$числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_m$, одновременно не равные нулю, что $\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\dots+\alpha_m a_m=0$. В противном случае строки – линейно независимы. ***Рангом матрицы А (rgA)*** называется максимальное число линейно–независимых строк матрицы.

Для решения систем применяется ***метод Гаусса*** – метод последовательных исключений неизвестных из уравнений системы.

Прямой ход метода Гаусса. Преобразования проводятся с матрицей (А\В). Если $a_{11}\neq 0$, то при умножении первой строки последовательно на $-\frac{a_{21}}{a_{11}},\dots,-\frac{a_{m1}}{a_{11}}$ и сложении соответственно со 2,..., m –ой строками получим матрицу (А\В) $\sim\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$

Аналогичные преобразования производим с матрицей $\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{22} & a'_{23} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a'_{m2} & a'_{m3} & \dots & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right)$ и т.д., пока не получим матрицу

ступенчатого вида: (A\B)~
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r-1} & a_{1r} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2r-1} & a'_{2r} & \ldots & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & .. \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a''_{rr} & \ldots & a''_{rn} & b''_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
, причем ***rg(A\B)=r, r – число ненулевых строк в ступенчатой матрице.***

Обратный ход метода Гаусса. Восстанавливаем систему уравнений и находим ее решение. При этом возможны случаи:

1. Получена строка (0 0 ...0| b_k''), $b_k''\neq 0$, что соответствует уравнению $0=b_k''$ – система несовместна (rgA≠ rg(A\B)).
2. **r** < n, система имеет бесчисленное множество решений. Последней ненулевой строке соответствует уравнение $a_{rr}''x_r+\ldots+a_{rn}''x_n=b_r''$, из него находим x_r через n–r свободных неизвестных: x_{r+1}, ..., x_n. Из уравнений, соответствующих другим строкам, находим $x_1,\ldots, x_{r-1}$ через свободные неизвестные.
3. r=n – решение системы единственно. Последней ненулевой строке соответствует уравнение $a_{nn}''x_n = b_n''$, из него находим x_n, а далее последовательно – $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

Если n=m и $\Delta\equiv\det A\neq 0$ – решение системы единственно и может быть найдено по формулам ***Крамера***: $x_j=\dfrac{\Delta_j}{\Delta}, j=\overline{1,n}$. Δ_j – определитель неизвестного x_j получается из Δ заменой j–го столбца столбцом свободных членов.

Действия над матрицами. Матричный способ решения систем

Матрицы $A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})$, размерности **m×n** называются ***равными,*** если $a_{ij}=b_{ij}$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$. ***Суммой матриц A и B*** размерности **mxn** называется матрица той же размерности $C=(a_{ij}+b_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Матрица, все элементы которой нули, называется ***нуль–матрицей***, обозначается 0. ***Произведением матрицы A на число μ*** называется матрица $B=\mu A=(\mu\ a_{ij})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Произведением матрицы A размерности m×p на матрицу B размерности p×n (число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B) называется матрица $C=(a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{ip}b_{pj})$, $i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}$.

Свойства: 1) В общем случае $AB\neq BA$.

2) $A(BC)=(AB)C$, $(A+B)C=AC+BC$.

Единичная матрица E – квадратная матрица вида

$$E=\begin{pmatrix} 1\ 0\ 0\ 0\ldots 0 \\ 0\ 1\ 0\ 0\ldots 0 \\ 0\ 0\ 1\ 0\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0\ 0\ 0\ 0\ldots 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица A^{-1} называется ***обратной для квадратной матрицы*** A, если $AA^{-1}=A^{-1}A=E$.

Если квадратная матрица A порядка n – ***невырожденная*** (ее определитель отличен от нуля), то обратная ей матрица будет иметь вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

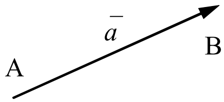
где A_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ –алгебраические дополнения элементов a_{ij} определителя $\Delta=\det A$.

Систему линейных алгебраических уравнений при **m**=**n** можно записать в матричном виде AX=B и решить в матричным способом $X=A^{-1}B$, где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots.a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \; B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Глава 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Вектор **–** направленный отрезок прямой.



Обозначение вектора $\overline{a}$ или $\overline{\mathrm{AB}}$, A – начало, B – конец вектора; длина вектора (модуль) обозначается $|\overline{a}|$ или $|\overline{\mathrm{AB}}|$ (рис. 2.1).

Рис.2.1

Нуль – вектор – точка. ***Вектора коллинеарны***, если лежат на параллельных прямых. ***Вектора компланарны***, если расположены в параллельных плоскостях. ***Вектора равны,*** если они: коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины. ***Суммой*** $\overline{\boldsymbol{a}}+\overline{\boldsymbol{b}}$ ***векторов*** $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если конец вектора $\overline{a}$ совмещен с началом $\overline{b}$, называется вектор $\overline{c}$, соединяющий начало вектора $\overline{a}$ с концом $\overline{b}$. ***Разностью*** $\overline{\boldsymbol{a}}-\overline{\boldsymbol{b}}$ векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, для которого $\overline{b}+\overline{c}=\overline{a}$, то есть вектор $\overline{c}$, соединяющий конец вычитаемого вектора с концом уменьшаемого вектора, если начала векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ совмещены.

Произведением $\lambda\overline{a}$ ***вектора*** $\overline{\boldsymbol{a}}$ ***на число*** $\boldsymbol{\lambda}$ называется вектор $\overline{b}$: $|\overline{b}|=|\lambda|\,|\overline{a}|$, $\overline{b}$ коллинеарен вектору $\overline{a}$ и направлен в ту же сторону при $\lambda>0$ ($\overline{a}\uparrow\uparrow\overline{b}$) и в противоположную сторону – при $\lambda<0$ ($\overline{a}\uparrow\downarrow\overline{b}$).

Линейной комбинацией векторов $\overline{\boldsymbol{a}}_1$, $\overline{\boldsymbol{a}}_2,\ldots,$ $\overline{\boldsymbol{a}}_n$ называется вектор $\overline{c}=\alpha_1\overline{a_1}+\alpha_2\overline{a_2}+\ldots+\alpha_n\overline{a_n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{a_k}$, где $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ – действительные числа.

Векторы $\overline{\boldsymbol{a}}_1$, $\overline{\boldsymbol{a}}_2,\ldots,$ $\overline{\boldsymbol{a}}_n$ ***– линейно зависимы,*** если $\exists\ \alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2\neq 0$, что их линейная комбинация равна нулю, в противном случае – линейно – независимы.

Базис на плоскости (пространстве) – максимальная линейно независимая на плоскости (пространстве) система векторов.

Если $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ – базис в пространстве, то вектор $\overline{a}$ раскладывается единственным образом: $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e}_1 + \alpha_2 \overline{e}_2 + \alpha_3 \overline{e}_3$.

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$– координаты вектора $\overline{a}$ в базисе $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$:
$\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Если $\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\overline{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$, то

1) $\overline{a} \pm \overline{b} = \{\alpha_1 \pm \beta_1, \alpha_2 \pm \beta_2, \alpha_3 \pm \beta_3\}$;

2) $\lambda \in R$: $\lambda \overline{a} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\}$.

$\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны ($\overline{b} = \lambda \overline{a}$) $\Leftrightarrow$ если $\alpha_1/\beta_1=\alpha_2/\beta_2=\alpha_3/\beta_3$.

Проекцией т. А на ось l называется основание перпендикуляра AA', опущенного из т. А на ***l*** : $пр_l A = A'$.
Составляющая вектора $\overline{AB}$ ***по оси l*** – вектор $\overline{A'B'}$, где $A' = пр_l A$, $B' = пр_l B$ (рис. 2.2 – 2.4).
Проекцией вектора $\overline{AB}$ ***на l*** называется число $пр_l \overline{AB} = \pm|\overline{A'B'}|$.

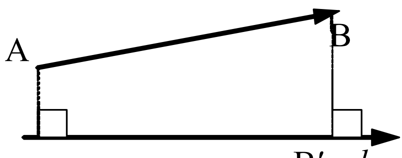


Рис. 2.2

Знак (+) берется , если $\overline{A'B'} \uparrow\uparrow l$, знак (–) – если $\overline{A'B'} \uparrow\downarrow l$. Если $\overline{e}$ – единичный вектор (т.е. $|\overline{e}| = 1$) в направлении l, то
$\overline{A'B'} = пр_l \overline{AB} \cdot \overline{e}$.

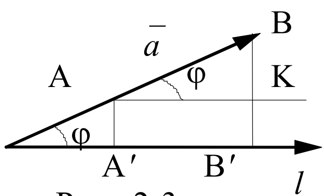


Рис. 2.3

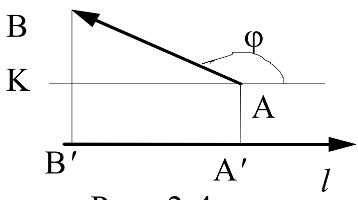


Рис. 2.4

Свойства проекций:

1. $пр_l \bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi$, где $\varphi=(\bar{a} \wedge l)$.
2. Проекция суммы векторов на ось l равна сумме проекций векторов на l.
3. $пр_l k\bar{a} = k\ пр_l \bar{a}$, k = const.

Прямоугольная декартова система координат – совокупность т. О и ортонормированного базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$. Прямые в направлении базисных векторов называются осями координат: абсцисс, ординат, аппликат

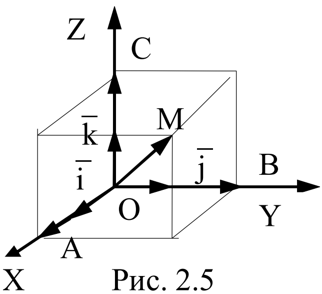


Рис. 2.5

Рассмотрим правую система координат (из конца вектора $\bar{k}$ кратчайший поворот от $\bar{i}$ к $\bar{j}$ виден против часовой стрелки) (рис. 2.5). Координатами т. М называют координаты вектора $\overline{OM}$: $\overline{OM} = x_M \bar{i} + y_M \bar{j} + z_M \bar{k}$, $M(x_M, y_M, z_M)$, где

$x_M = пр_{ox}\overline{OM}$, $y_M = пр_{oy}\overline{OM}$,

$z_M = пр_{oz}\overline{OM}$,

$\left|\overline{OM}\right| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2 + z_M^2}$.

Для вектора $\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$, $|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

$\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{OB}\right| - \left|\overline{OA}\right| = \{x_B - x_A,\ y_B - y_A,\ z_B - z_A\}$,

$\left|\overline{AB}\right| = = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Направляющие косинусы $\bar{\boldsymbol{a}}$ (косинусы углов, образуемых $\bar{\boldsymbol{a}}$ с координатными осями): $\cos\alpha = \cos(\bar{a}, \wedge \bar{i}) = a_x/|\bar{a}|$,
$\cos\beta = \cos(\bar{a}, \wedge \bar{j}) = a_y/|\bar{a}|$, $\cos\gamma = \cos(\bar{a}, \wedge \bar{k}) = a_z/|\bar{a}|$,
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

$\bar{a}^0 = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$ – единичный вектор.

Скалярное произведением двух векторов – число, равное произведению длин векторов на косинус угла между ними.

Обозначение $(\bar{a}, \bar{b})$ или $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos\varphi$, $\varphi = (\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$. $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\ \text{пр}_{\bar{a}} \bar{b} = |\bar{b}|\ \text{пр}_{\bar{b}} \bar{a}$ (рис. 2.6).

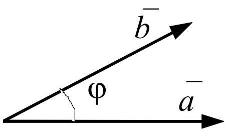


Рис. 2.6

Свойства скалярного произведения:

1. Переместительный закон : $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$.
2. Сочетательный закон : $(\lambda \bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$.
3. Распределительный закон :
$\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$.
4. Скалярный квадрат $\bar{a}^2$ вектора $\bar{a}$ равен квадрату его длины: $|\bar{a}|^2 = \bar{a}^2$.
5. $\bar{a} \perp \bar{b}$ ($\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые) $\Leftrightarrow$ если их скалярное произведение равно нулю.

Если $\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$, тогда
$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Приложения скалярного произведения:

– вычисление работы E силы $\bar{F}$ на пути $\bar{S}$: $E = \bar{F} \cdot \bar{S}$;

– вычисление угла между векторами: $\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$;

– вычисление проекции вектора на другой: пр$_{\bar a}\ \bar b = \dfrac{\bar a \cdot \bar b}{|\bar a|}$.

Векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{a}}$ ***и*** $\bar{\mathbf{b}}$ – вектор $\bar c = \bar a \times \bar b = [\bar a, \bar b]$, со свойствами : 1) $\bar c \perp \bar a$, $\bar c \perp \bar b$;
2) $|\bar c| = |\bar a|\,|\bar b|\,\sin\varphi$, $\varphi = (\bar a, \bar b)$;
3) векторы $\bar a$, $\bar b$, $\bar c$ образуют правую тройку (рис. 2.7).

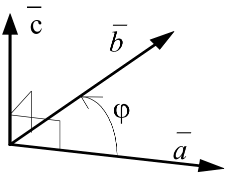


Рис. 2.7

Свойства векторного произведения:

1. *Антипереместительный закон:*

$$\bar a \times \bar b = -\bar b \times \bar a.$$

2. *Сочетательный закон:*

$$\lambda(\bar a) \times \bar b = \lambda(\bar a \times \bar b).$$

3. *Распределительный закон:*

$$\bar a \times (\bar b + \bar c) = \bar a \times \bar b + \bar a \times \bar c$$

4. *Площадь параллелограмма, построенного на векторах* $\bar a$ *и* $\bar b$ *:* $S_{▱} = |\bar a \times \bar b|$, площадь треугольника $S_{\Delta} = |\bar a \times \bar b|/2$.

5. *Ненулевые вектора* $\bar a$ *и* $\bar b$ *коллинеарны* ⇔ если $\bar a \times \bar b = 0$.

6. $\bar a \times \bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$

Смешанным произведением векторов $\bar{\mathbf{a}}$***,*** $\bar{\mathbf{b}}$***,*** $\bar{\mathbf{c}}$ называется $(\bar a \times \bar b) \cdot \bar c = \pm V$.
V – объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar a, \bar b, \bar c$.

Произведение имеет знак (+), если тройка $\bar a, \bar b, \bar c$ – правая, (–) – если левая.

Свойства смешанного произведения:

1. $(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot(\overline{b}\times\overline{c}) = \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

2. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = -\,\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}$.

3. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \overline{b}\,\overline{c}\,\overline{a} = \overline{c}\,\overline{a}\,\overline{b}$.

4. Объем параллелепипеда, построенного на $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$:
$V_{пар.} = |\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|$, объем треугольной пирамиды $V_{пир.} = |\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}|/6$.

5. Ненулевые вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ компланарны $\Leftrightarrow$ если $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ =0.

6. $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$.

Глава 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

I. Прямая на плоскости

Пусть прямая L не параллельна OY. $\varphi = (\widehat{OX, L})$ – наименьший неотрицательный угол между прямой L и OX, b отрезок, отсекаемый L на оси OY. $M_0(x_0,y_0) \in L$.

Виды уравнения прямой на плоскости:

$y = kx + b$, где к= tgφ – ***уравнение прямой с угловым коэффициентом k.***

$y - y_0 = k(x - x_0)$ – ***уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$.***

Общий вид уравнения прямой $Ax+By+C=0$,
где $\overline{N} = (A,B,C)$ – вектор нормали к прямой.

$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – ***уравнение прямой, проходящей через т. $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$.***

Угол Θ между прямыми L_1 и L_2 на плоскости – наименьший угол, на который нужно повернуть L_1 в положительном направлении так, чтобы она совпала с L_2 (рис. 3.1).

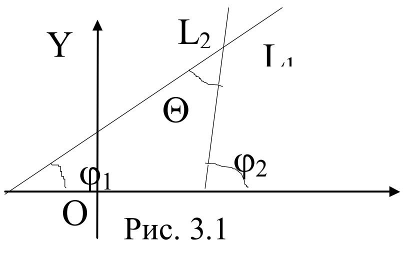


Рис. 3.1

Если L_1: $y=k_1x+b_1$, $k_1 = tg\varphi_1$,

L_2: $y=k_2x+b_2$, $k_2 = tg\varphi_2$, то $tg\Theta = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \times k_2}$.

$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow k_1=k_2$. $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0,y_0)$ до прямой ***L***: $Ax+By+C=0$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

II. Плоскость в пространстве. Сфера

Сферой называется гмт, равноудаленных от т. $C(x_0,y_0,z_0)$ – центра сферы, на расстояние R.

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-{}_0)^2 = R^2$ – **уравнение сферы**.

Пусть $\overline{N} = \{A,B,C\}$ – вектор, перпендикулярный к плоскости (***нормальный вектор***), т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$, лежащая на плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + Cz - z_0) = 0$$

$Ax + By + Cz + D = 0$, $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ – ***общее уравнение плоскости.***

Частные случаи общего уравнения плоскости:

а) $D=0 \Rightarrow \Omega$: $Ax+By+Cz=0 \Rightarrow$ т.$O(0,0,0) \in \Omega$;

б) $A=0 \Rightarrow \Omega$: $By+Cz+D=0 \Rightarrow \Omega \,|\,|\, OX$;

в) $A=B=0 \Rightarrow \Omega$: $Cz+D=0 \Rightarrow \Omega \,|\,|\, XOY$;

г) $A=D=0 \Rightarrow \Omega$: $By+Cz=0 \Rightarrow OX \subset \Omega$.

Угол Θ между двумя плоскостями – это один из двух смежных двугранных углов между этими плоскостями.

Если $\overline{N_1} = \{A_1,B_1,C_1\}$ и $\overline{N_2} = \{A_2,B_2,C_2\}$ – нормальные векторы плоскостей Ω_1 и Ω_2, тогда $\cos\Theta = \dfrac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|}$.

$$\Omega_1 \,||\, \Omega_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \,||\, \overline{N_2} \Leftrightarrow \overline{N_1} \times \overline{N_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

$$\Omega_1 \perp \Omega_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Leftrightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Расстояние d от т. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости Ω: Ax+By+Cz+D=0 равно $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

III. Прямая в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости

Линию в пространстве можно определить как линию пересечения поверхностей, заданных уравнениями $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$. $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$ – уравнения линии пересечения поверхностей. Положение прямой L в пространстве определяется заданием ***опорной точки*** $M_0(x_0,y_0,z_0) \in L$ и ***направляющего вектора*** $\overline{S} = \{m,n,p\}$ ($\overline{S}$ параллелен прямой). Пусть M(x,y,z) точка с текущими координатами на L (рис. 3.2).

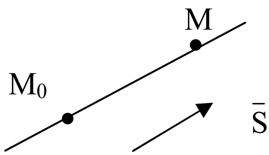


Рис. 3.2

Тогда $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – ***канонические уравнения прямой в пространстве***.

Если приравнять отношения к параметру t и выразить x, y, z, то получим ***параметрические уравнения прямой:***

$x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + pt$.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – ***уравнения прямой, проходящей через точки*** $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ – ***общие уравнения прямой в пространстве***.

$\overline{S}=\overline{N_1}\times\overline{N_2}$, где $\overline{N_1}$, $\overline{N_2}$ – нормальные векторы плоскостей.

Угол Θ между двумя прямыми в пространстве – угол между их направляющими векторами $\overline{S_1}$ и $\overline{S_2}$, т.е. $\cos\Theta=\cos(\widehat{\overline{S_1},\ \overline{S_2}})=\frac{\overline{S_1}\cdot\overline{S_2}}{\lvert\overline{S_1}\rvert\lvert\overline{S_2}\rvert}$

$L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \overline{S_1}\times\overline{S_2}=0$, $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{S_1}\cdot\overline{S_2}=0$.

Угол Θ между прямой и плоскостью – любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость .

Пусть $\overline{S}\{m,\ n,\ p\}$ – направляющий вектор прямой, $\overline{N}=\{A,B,C\}$– нормальный вектор плоскости.

Тогда (рис. 3.3) $\sin\Theta = |\cos(\overline{N}, \overline{S})| = \dfrac{|\overline{N} \cdot \overline{S}|}{|\overline{N}| \cdot |\overline{S}|}$.

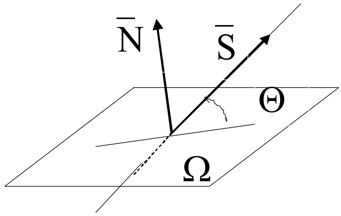


Рис. 3.3

$L \,||\, \Omega \Leftrightarrow \overline{S} \perp \overline{N} \Leftrightarrow \overline{S} \cdot \overline{N} = 0 \Leftrightarrow Am+Bn+Cp=0$,

$L \perp \Omega \Leftrightarrow \overline{S} \,||\, \overline{N} \Leftrightarrow \overline{S} \times \overline{N} = 0 \Leftrightarrow A/m = B/n = C/p$.

Для ***нахождения точки пересечения*** прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}. \end{cases}$$

Приравняв каждое из отношений канонических уравнений прямой параметру t и подставив найденные x, y, z в уравнение плоскости, находим t : $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Am + Bn + Cp}$, подставив его в параметрические уравнения прямой , получим координаты точки пересечения.

IV. Кривые II порядка

Общее уравнение кривой II порядка – уравнение вида:
$Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\ A^2+B^2+C^2 \neq 0,\ (A,B,C,D,E,F)\in R$

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, – ***уравнение окружности с центром в точке (x_0,y_0) радиуса R***.

Эллипс – гмт, сумма расстояний, от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, величина постоянная и равная 2a. Если фокальное расстояние $|F_1F_2| = 2c$, то $2c<2a$.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

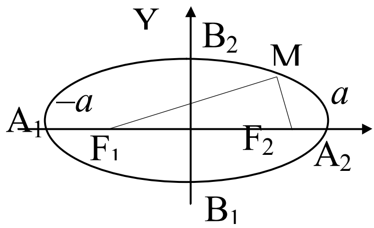


Рис. 3.4

Фокальная ось – ось, на которой расположены фокусы. Числа a и b называются ***большой и малой полуосями*** эллипса, $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$ – ***вершины эллипса*** (рис. 3.4).

Гипербола – гмт, абсолютная величина разности расстояний от которых до двух заданных точек F_1 и F_2, называемых фокусами, есть величина постоянная и равная $2a$.

$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – ***каноническое уравнение гиперболы,***

$y = \pm\dfrac{b}{a}x$ – ***асимптоты гиперболы.***

Числа a и b – ***действительная и мнимая полуосями*** гиперболы, $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ – ***вершинами гиперболы*** (рис. 3.5).