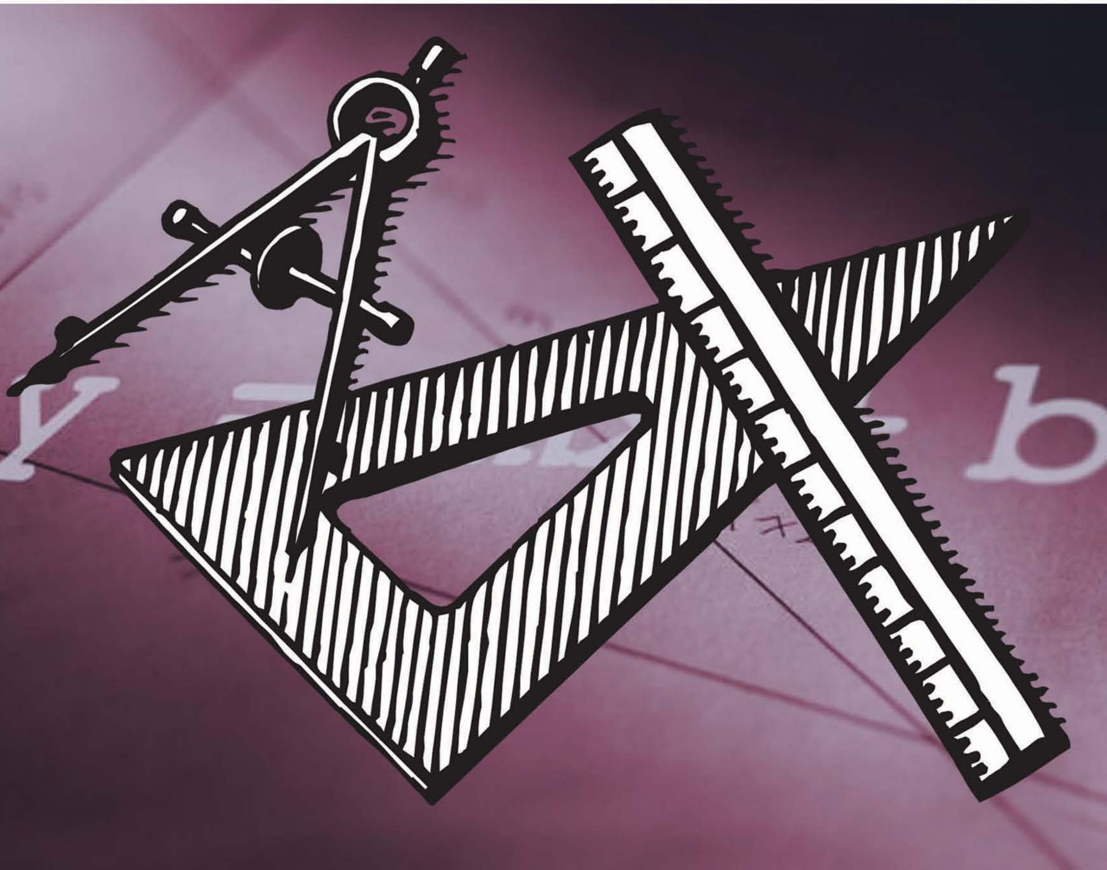
М.Л. Каган   М.В. Самохин

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ИНЖЕНЕРНОМ ВУЗЕ



М. Л. Каган, М. В. Самохин

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ В ИНЖЕНЕРНОМ ВУЗЕ

Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва
2008

УДК 512 , 516

Рецензенты:

Заведующий кафедрой ВМ-1 профессор, доктор физико-математических наук *А.С. Поспелов,*

Профессор кафедры АМЛ МИЭМ доктор физико-математических наук *Ю.Ю. Кочетков.*

Каган М. Л. , Самохин М.В.

Алгебра и геометрия в инженерном вузе.: Учебное пособие. - М.: Издательство АСВ, 2008. - 176 с.

ISBN 978-5-93093-609-4

Предлагаемый учебник полностью соответствует действующей программе по математике и отражает специфику и опыт чтения лекций и проведения практических занятий в МГСУ по разделам ″Векторная алгебра″, ″Аналитическая геометрия″ и ″Линейная алгебра″. Большое внимание уделено связи излагаемых разделов курса высшей математики с приложениями в дисциплинах инженерно - строительного цикла. Книга содержит весь необходимый для ведения учебного процесса материал, включая задачи и упражнения для практических занятий и самостоятельной работы. Может быть использовано студентами технических вузов.

Ил. 96 , библ. список 6.

ISBN 978-5-93093-609-4

ВВЕДЕНИЕ

Среди дисциплин, входящих в программу инженерного вуза, математика занимает особое место. И дело не в том, что это один из самых больших и трудных курсов. Значение математики в инженерном образовании определяется прежде всего тем, что она является универсальным языком всех точных и естественных наук и основанных на них технических дисциплин. Ещё Г. Галилей отмечал, что законы природы написаны на языке математики. Помимо чисто прикладного значения, математика играет определяющую роль в развитии логического мышления, выработке научной методологии, постановке и формализации реальных задач. Наш великий соотечественник М. В. Ломоносов писал ***"математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит"***.

Математика представляет собой значительную часть общей суммы человеческих знаний и находит широчайшее применение в самых разнообразных областях науки, техники и практической деятельности.

Все основные математические понятия возникли и развивались в соответствии с потребностями естествознания и техники. Зародившись в глубокой древности, математика уже в то время стала необходимой для астрономии, геодезии, механики, судовождения и т.д., то есть для тех отраслей знания, без которых было бы невозможно развитие общества. Хорошо понимая это, Наполеон говорил ***"развитие и совершенствование математики тесно связано с процветанием государства"***. С развитием производительных сил эта связь всё более усиливалась.

Бурное развитие математики связано с промышленной революцией и развитием производительных сил общества."Век пара, а затем и электричества" требовал надлежащей теоретической основы. Практика ставила перед наукой более сложные задачи, для решения которых средств и частных методов "Элементарной математики", развитых ещё крупнейшими мыслителями античности Евклидом, Архимедом, Пифагором и другими, оказалось недостаточно. Под давлением практической необходимости в математике разрабатываются новые общие и мощные методы, основанные на понятиях переменной величины и функциональной зависимости. Основы этих методов (обычно под ними и понимается высшая математика) были заложены такими гигантами мысли, как французский философ, физик и математик Рене Декарт (1596 - 1650); гениальный английский физик, астроном и математик Исаак Ньютон (1642 - 1727); немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 - 1715); швейцарец - член Российской Академии наук Леонард Эйлер. Интересно, что советами Лейбница часто пользовался Пётр Великий и именно Лейбниц внушил Петру мысль основать в России Академию. В стенах этой Петербургской Академии прошла большая часть научной деятельности Эйлера, труды которого составляют значительную часть математического знания и лежат в основе многих прикладных дисциплин.

Дальнейшее развитие математики связано с именами многих зарубежных и отечественных учёных. Из российских математиков особенно весомый вклад в её развитие внесли Николай Иванович Лобачевский (1792 -

1856) - основатель неевклидовой геометрии; один из основателей петербургской математической школы Михаил Васильевич Остроградский (1801 - 1862); великий русский математик и механик Пафнутий Львович Чебышов (1821 - 1894), его ученики А. А. Марков, А. М. Ляпунов и многие другие.

Наше время является периодом чрезвычайно бурного развития математики, её роль в развитии естествознания и техники огромна и на наших глазах стремительно возрастает. Более того, математика смело вторгается в отрасли знания, казалось бы, от неё весьма далёкие: биологию, филологию, экономику и многие другие, превращая их из описательных и эмпирических в точные.

Расчёт конструкции самолёта или плотины, купола перекрытия или оболочки градирни, распространения тепла, работы атомного реактора - всё это сейчас невозможно без систематического применения математики. Появление и стремительный прогресс электронной вычислительной техники ещё более расширили сферу применения математики. Целые разделы, ранее имевшие чисто академический интерес, получили новое значение (например, математическая логика, алгоритмические языки). Возникли и быстро развиваются новые разделы (численные методы, эвристическое программирование и т. д.). Всё это позволяет проводить важнейшие расчеты там, где ранее они были невозможны, например, в задачах оптимизации экономической стратегии, в оперативном руководстве технологическими процессами, в создании систем автоматического управления, в конструировании и т. д. Применение математических методов уже сейчас приносит огромный экономический эффект и ещё больше сулит в будущем.

Именно поэтому к математическому образованию современного инженера предъявляются очень высокие требования: он должен твёрдо знать основные положения математики и уметь применять их в своей конкретной деятельности. По меткому выражению нашего замечательного соотечественника - механика, астронома, кораблестроителя и математика А. Н. Крылова, математика для инженера ***"есть инструмент такой же, как штангель, зубило, ручник, напильник для слесаря... Инженер должен по своей специальности уметь владеть своим инструментом, но он вовсе не должен уметь его делать"***. Правда, в истории развития науки есть и примеры, когда инженеры для решения возникших перед ними задач закладывали основы новых математических дисциплин. Так, например, английским инженером-электротехником Хевисайдом было создано "символическое" исчисление, которое затем трудами математиков преобразовалось в операционное исчисление.

Зачастую математику обвиняют в абстрактности и отрыве от действительности. Это в корне неверно. Абстрактность в математике вызвана не тем, что она не связана с практикой, а тем, что она приспособлена к самым разнообразным её проявлениям. В основе математики заложена практика (вспомним аксиомы геометрии), она же является критерием её истинности. Замечательным подтверждением этого является открытие в 1846 г. французским математиком Леверье на "кончике пера" планеты Нептун, обнаруженной затем астрономом Галле; применение Н. Е. Жуковским теории функций комплексного переменного к разработке теоретических основ авиации (в то время находившейся ещё в младенчестве) и т. д.

Применяя математику к решению конкретных задач, не следует её абсолютизировать, придавать не свойственную ей роль верховного судьи. Математика для инженера инструмент, очень мощный и продуктивный, но результат его применения во многом зависит от постановки и формализации реальной задачи, то есть от грамотного построения математической модели реального явления. По образному сравнению Т. Г. Гексли - английского натуралиста и философа, ***"математика, подобно жернову, перемалывает то, что под него засыпают"***.

В дальнейшем по мере возможности мы будем иллюстрировать применение математических методов к решению задач из различных областей знания, в основном из механики, понимаемой в широком смысле, ибо, по словам Леонардо да Винчи, ***"механика - это рай математической науки, поскольку мы получаем в ней плоды математики"***. Кроме того механика является основой большинства дисциплин, изучаемых в технических вузах, и ещё не так давно она называлась прикладной математикой, а во времена И. Ньютона и Г. Лейбница обе они назывались натуральной философией.

В предлагаемом книге излагаются три раздела втузовского курса математики: векторная алгебра, аналитическая геометрия и линейная алгебра. Векторная алгебра является основным математическим аппаратом в курсах теоретической механики, физики, сопротивления материалов и ряда других технических дисциплин. Аналитическая геометрия связана с курсом начертательной геометрии и черчения, способствует выработке пространственного мышления, является основой для построения алгоритмов машинной (компьютерной) графики. Линейная алгебра в наше время стала одним из основных средств как теоретической, так и вычислительной математики и широко применяется в теории упругости, строительной механике, экономике и многих других технических дисциплинах.

Для облегчения работы с книгой в ней используется двойная нумерация, где первый индекс определяет номер главы, второй - номер соответствующей формулы в этой главе. Все основные понятия, определения, формулировки, результаты выделены в тексте курсивом.

Глава I. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

При изучении различных разделов естествознания и технических дисциплин встречаются ***величины, которые полностью определяются заданием их числовых значений. Такие величины называются скалярными***. Примерами могут служить: время, температура, масса, площадь и т. д. Однако развитие науки, особенно физики, потребовало введения ***величин, которые, кроме численного значения, характеризуются также направлением в пространстве. Такие величины будем называть векторными***. Примерами служат силы, скорости и ускорения точек движущегося тела и т. д. Основы векторного исчисления были заложены в середине XIX века У.Р.Гамильтоном, а настоящий свой вид оно приобрело благодаря работам Д.У.Гиббса - американского физика и математика.

Векторную величину (в дальнейшем для краткости будем говорить вектор) принято изображать в пространстве отрезком, если условиться о единице масштаба, у которого одна точка, например А, принимается за начало (рис.1.1), а вторая - В - за конец. Такой отрезок будем называть ориентированным, или направленным, и обозначать $\overline{AB}$ или $\overline{a}$.

Длина вектора $\overline{a} = \overline{AB}$ называется его модулем и обозначается $|\overline{a}| = |\overline{AB}|$.

Если начало и конец вектора совпадают, то он называется нулевым и обозначается $\overline{0}$. Модуль нулевого вектора равен 0, то есть $|\overline{0}| = 0$, а его направление не определено. Последним мы иногда будем пользоваться, считая, что $\overline{0}$ имеет любое (нужное нам в данном случае) направление.

Два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на одной или параллельных прямых (рис. 1.2). В этом случае будем использовать запись $\overline{a} \parallel \overline{b}$.

Следствие: ***нулевой вектор $\overline{0}$ коллинеарен любому вектору $\overline{a}$.***
Перейдём к определению операций над векторами.

Два вектора называются равными, если они имеют равные модули, коллинеарны и направлены в одну сторону $(\overline{a} = \overline{b})$.

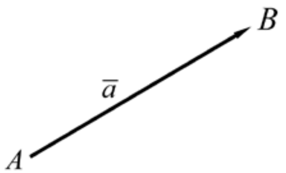


Рис. 1.1

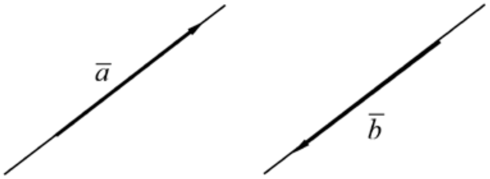


Рис. 1.2

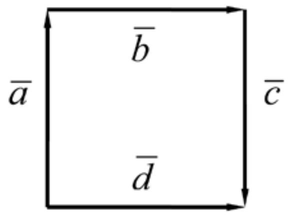


Рис. 1.3

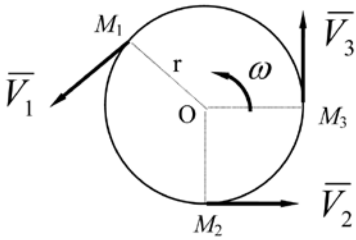


Рис. 1.4

Из этого определения следует, что вектор $\overline{a}$ можно переносить параллельно самому себе, помещая его начало в любую точку пространства. Такие векторы принято называть свободными. В курсе теоретической механики показано, что свободным вектором является момент пары сил, действующих на абсолютно твёрдое тело.

Если два вектора имеют равные модули, коллинеарны, но направлены в разные стороны, то они называются противоположными. Вектор, противоположный $\overline{a}$, обозначим $-\overline{a}$.

***Пример* 1.1**. Рассмотрим квадрат (рис. 1.3), стороны которого - векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$. Согласно введённым определениям $\overline{a} = -\overline{c}$, $\overline{b} = \overline{d}$.

***Пример* 1.2**. Рассмотрим диск радиусом r, вращающийся с угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку О. Скорости точек M_1, M_2, M_3 (рис. 1.4) $\overline{V}_1 \neq \overline{V}_2 \neq \overline{V}_3$, хотя модули этих векторов равны $\omega \cdot r$.

Если несколько векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$,..., $\overline{c}$ параллельны некоторой плоскости, они называются компланарными. Очевидно, любые два вектора компланарны, поскольку всегда найдётся плоскость Q, параллельная прямым, на которых расположены рассматриваемые векторы (рис. 1.5).

Рассмотрим два произвольных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и из произвольной точки пространства О, как из начала, построим вектор $\overline{OA} = \overline{a}$, а затем из точки А, как из начала, построим вектор $\overline{AB} = \overline{b}$ (рис. 1.6).

Вектор $\overline{OB}$, соединяющий начало первого слагаемого вектора с концом второго, называется суммой этих векторов и обозначается $\overline{a} + \overline{b}$.

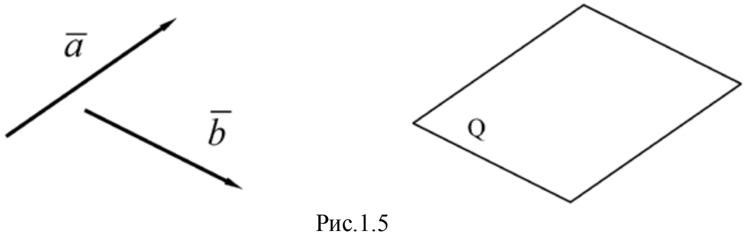


Рис.1.5

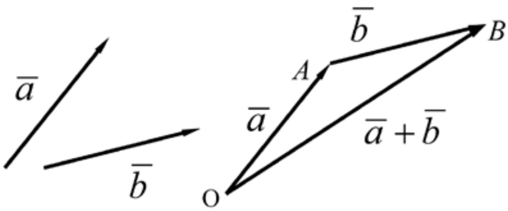


Рис. 1.6

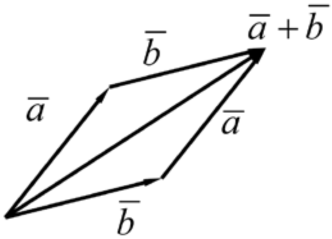


Рис. 1.7

Нетрудно заметить, что вектор $\overline{a}+\overline{b}$ можно построить другим способом, воспользовавшись правилом параллелограмма (рис. 1.7). Отсюда, в частности, следует, что сумма двух векторов обладает переместительным свойством: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$.

Определение суммы можно обобщить на любое число слагаемых. Найдём, например, сумму трёх векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ (рис. 1.8).

Из очевидных построений вытекает справедливость сочетательного свойства для операции сложения векторов: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$.

Построенная фигура ОАВС называется векторным многоугольником. Если начало первого слагаемого вектора совпадает с концом последнего, то векторный многоугольник называется замкнутым. Сумма векторов в этом случае равна нуль-вектору.

Рассмотрим два произвольных вектора $\overline{a}$, $\overline{b}$ и из некоторой точки О построим векторы $\overline{OA}=\overline{a}$ и $\overline{OB}=\overline{b}$ (рис. 1.9). Соединив концы векторов $\overline{b}$ и $\overline{a}$, получим вектор $\overline{BA}$. Очевидно, что $\overline{OB}+\overline{BA}=\overline{OA}$. ***Естественно назвать вектор*** $\overline{BA}$ ***разностью векторов*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***. Итак, разностью векторов*** $\overline{a}$ ***и*** $\overline{b}$ ***называется вектор*** $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ ***, сумма которого с вектором*** $\overline{b}$ ***даёт вектор*** $\overline{a}$ ***.***

Нетрудно заметить, что если из общей точки построить параллелограмм на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$ как на сторонах, то одна из диагоналей равна сумме векторов, а вторая - их разности (рис. 1.10).

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{a}$ и любое число $\lambda\in R$. ***Произведе-***

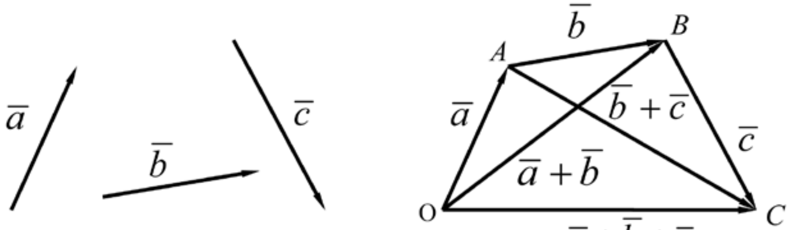


Рис. 1.8

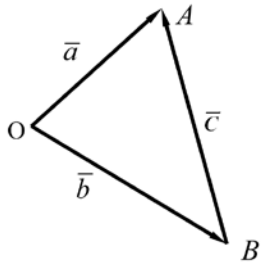


Рис. 1.9

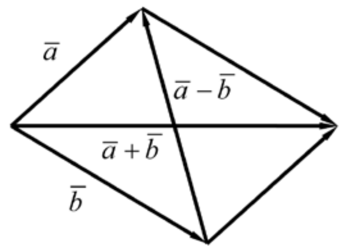


Рис. 1.10

нием вектора $\overline{a}$ ***на число*** λ ***называется вектор*** $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$***, коллинеарный*** $\overline{a}$***, равный по модулю*** $\left|\overline{b}\right|=|\lambda|\cdot|\overline{a}|$ ***и направленный в ту же сторону, что и вектор*** $\overline{a}$***, если*** $\lambda>0$***, и в противоположную, если*** $\lambda<0$***.***

Пример **1.3**. На рис 1.11 изображены векторы $\overline{a}$, $0{,}5\cdot\overline{a}$ и $-\overline{a}$. Вектор $0{,}5\cdot\overline{a}$ направлен в ту же сторону, что и $\overline{a}$, а по модулю в два раза меньше. Вектор $-\overline{a}$, противоположный $\overline{a}$, можно рассматривать как результат умножения $\overline{a}$ на -1 : $-\overline{a}=-1\cdot\overline{a}$.

Из определения операции умножения вектора на число следует, что, если $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$, то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны. Верно и обратное: из коллинеарности векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ следует, что $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$, где λ - число, равное отношению модулей векторов $\overline{b}$ к $\overline{a}$ (если $\overline{a}\neq\overline{0}$), $\lambda\geq 0$, если векторы направлены в одну сторону, и $\lambda\leq 0$ - в противоположном случае. Таким образом, ***для коллинеарности двух векторов*** $\overline{a}$ ($\overline{a}\neq\overline{0}$) ***и*** $\overline{b}$ ***необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*** $\overline{b}=\lambda\cdot\overline{a}$***.***

Легко убедиться, что операция умножения вектора на число обладает распределительным свойством по отношению к векторному и скалярному множителям, а также сочетательным свойством по отношению к скалярному множителю:

$$
\begin{aligned}
&\lambda\cdot\left(\overline{a}+\overline{b}\right)=\lambda\cdot\overline{a}+\lambda\cdot\overline{b},\\
&(\lambda_1+\lambda_2)\cdot\overline{a}=\lambda_1\cdot\overline{a}+\lambda_2\cdot\overline{a},\\
&(\lambda_1\cdot\lambda_2)\cdot\overline{a}=\lambda_1\cdot(\lambda_2\cdot\overline{a}).
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

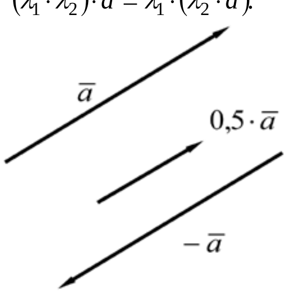


Рис. 1.11

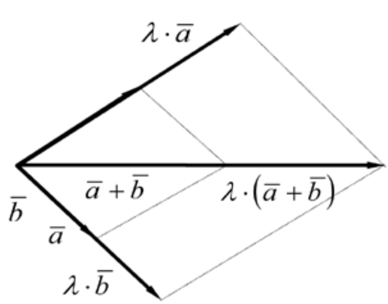


Рис. 1.12

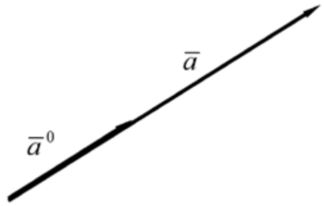


Рис. 1.13

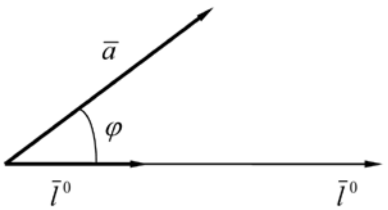


Рис. 1.14

Так, например, первое свойство (1.1) для $\lambda > 0$ следует из того, что при изменении сторон параллелограмма в λ раз его диагональ также меняется в λ раз (рис. 1.12).

Введём несколько необходимых в дальнейшем понятий.

Единичным назовём вектор, модуль которого равен единице, и обозначим его индексом ^{0} вверху (рис. 1.13). Если дан ненулевой вектор $\bar{a}$, то единичный вектор того же направления равен

$$\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a}. \qquad (1.2)$$

Действительно, вектор $\bar{a}^0$ коллинеарен вектору $\bar{a}$, направлен в ту же сторону, поскольку $\lambda = \frac{1}{|\bar{a}|} > 0$, и по модулю равен $\left| \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} \right| = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot |\bar{a}| = 1$.

Из (1.2) следует, что любой вектор $\bar{a}$ равен произведению единичного вектора того же направления на модуль рассматриваемого вектора $\bar{a} = \bar{a}^0 \cdot |\bar{a}|$.

Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется наименьший угол φ, на который надо повернуть один из векторов до его совпадения по направлению со вторым. Очевидно, $0 \le \varphi \le \pi$.

Под углом между вектором $\bar{a}$ и осью l будем понимать угол между вектором $\bar{a}$ и единичным вектором $\bar{l}^0$ (его назовём ортом оси), совпадающим по направлению с осью l (рис. 1.14).

1.2. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. СОСТАВЛЯЮЩАЯ ВЕКТОРА ПО ОСИ.

Пусть Ох - некоторая ось l, $\bar{a} = \overline{AB}$ - произвольно расположенный в пространстве вектор. Обозначим A_1 и B_1 соответственно проекции точек A и B на ось Ох и пусть x_1 и x_2 - их координаты (рис. 1.15).

Проекцией вектора $\bar{a}$ на ось Ох называется разность координат конца и начала вектора $\overline{AB}$ на эту ось:

$$\text{пр}_l\, \bar{a} = x_2 - x_1.$$

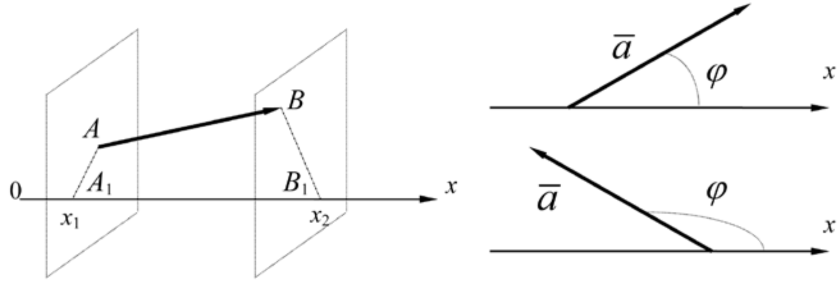


Рис. 1.15

Если вектор $\bar a$ образует с осью острый угол, то $x_2 > x_1$ и, следовательно, проекция положительна, если угол тупой - отрицательна. Если вектор перпендикулярен оси Ох, то $x_2 = x_1$ и его проекция на ось равна нулю .

СВОЙСТВА ПРОЕКЦИЙ

1. ***Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью***. Действительно, $(x_2 - x_1)$ - проекция вектора $\bar a$ на ось не изменится при его параллельном переносе, поэтому можно считать, что начало вектора совпадает с точкой отсчёта 0. Тогда $x_1 = 0$, а $x_2 = x$ и $\text{пр}_l\,\bar a = x_2 - x_1 = x - 0 = x$, где x - координата проекции конца вектора $\bar a$ на ось l (рис. 1.16). Так как $x = |\bar a| \cdot \cos\varphi$, то

$$\text{пр}_l\,\bar a = |\bar a| \cdot \cos\varphi. \tag{1.3}$$

2. ***Проекция суммы двух векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось***. Пусть $\bar c = \bar a + \bar b$, где $\overline{AB} = \bar a$, $\overline{BC} = \bar b$ и $\overline{AC} = \bar c$, а A_1 , B_1 , C_1 - проекции точек A , B , C на ось l и x_1, x_2 , x_3 - их координаты (рис. 1.17). Тогда

$$\text{пр}_l\,\overline{AC} = x_3 - x_1 = x_3 - x_2 + x_2 - x_1 = \text{пр}_l\,\overline{AB} + \text{пр}_l\,\overline{BC},$$

то есть

$$\text{пр}_l(\bar a + \bar b) = \text{пр}_l\,\bar a + \text{пр}_l\,\bar b. \tag{1.4}$$

Это свойство проекций легко обобщить на любое конечное число слагаемых: $\text{пр}_l \sum_{i=1}^{n} \bar a_i = \sum_{i=1}^{n} \text{пр}_l\,\bar a_i$.

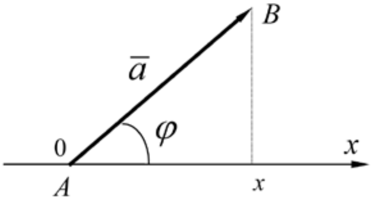


Рис. 1.16

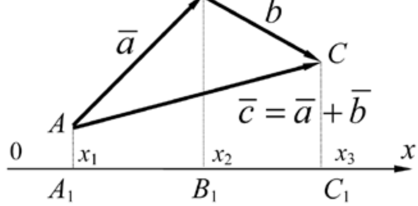


Рис. 1.17

3. ***При умножении вектора $\overline{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число***:

$$n\text{p}_l(\lambda\cdot\overline{a})=\lambda\cdot n\text{p}_l\,\overline{a}. \qquad (1.5)$$

Действительно, если вектор $\overline{a}$ составляет с осью l угол φ и $\lambda>0$, то вектор $\lambda\cdot\overline{a}$ имеет то же направление, что и $\overline{a}$, и составляет с осью такой же угол φ, поэтому

$$n\text{p}_l(\lambda\cdot\overline{a})=\left|\lambda\cdot\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=\lambda\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos\varphi=\lambda\cdot n\text{p}_l\,\overline{a}.$$

При $\lambda<0$ вектор $\lambda\cdot\overline{a}$ направлен в сторону, противоположную $\overline{a}$, и образует с осью l угол $(\pi-\varphi)$, поэтому

$$n\text{p}_l(\lambda\cdot\overline{a})=\left|\lambda\cdot\overline{a}\right|\cdot\cos(\pi-\varphi)=\left|\lambda\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos(\pi-\varphi)=$$

$$=-\lambda\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot(-\cos\varphi)=\lambda\cdot n\text{p}_l\,\overline{a}.$$

СЛЕДСТВИЯ

1. Проекция разности векторов на ось равна разности проекций

$$n\text{p}_l(\overline{a}-\overline{b})=n\text{p}_l\,\overline{a}-n\text{p}_l\,\overline{b}.$$

2. Проекция линейной комбинации векторов на ось равна линейной комбинации проекций на эту же ось

$$n\text{p}_l\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot\overline{a}_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\cdot n\text{p}_l\,\overline{a}_i.$$

Составляющей вектора $\overline{a}$ по оси l назовём вектор, равный произведению проекции вектора $\overline{a}$ на ось l и единичного вектора $\overline{l}^o$ оси :

$$Cocm_l\overline{a}=\Pi\text{p}_l\overline{a}\cdot\overline{l}^o\ . \qquad (1.6)$$

Легко заметить (рис. 1.18), что составляющая вектора $\overline{a}$ по оси l есть вектор, соединяющий проекцию начала вектора $\overline{a}$ с проекцией его конца на эту ось.

Рассмотрим теперь два неколлинеарных вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ и произвольный вектор $\overline{c}$, причём будем считать, что эти три вектора компланарны. Из произвольной точки 0 как из начала построим векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$. Проведём оси l_1 и l_2, направления которых определяются векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и построим параллелограмм OABC так, чтобы его диагональю служил вектор

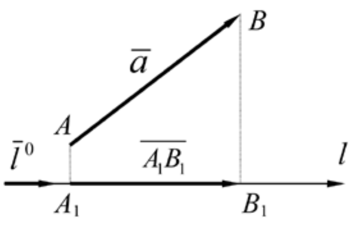


Рис. 1.18

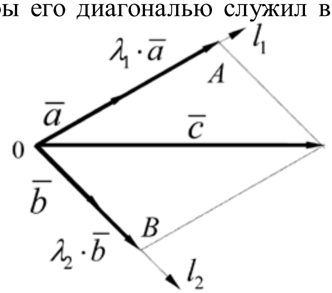


Рис. 1.19

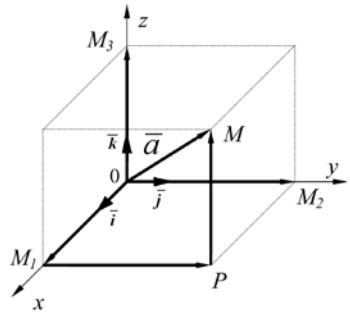


Рис.1.20

$\overline{c}$ (рис.1.19). Это возможно, поскольку векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ неколлинеарны. Так как векторы $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ коллинеарны соответственно векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$, то $\overline{OA} = \lambda_1 \cdot \overline{a}$ и $\overline{OB} = \lambda_2 \cdot \overline{b}$, отсюда $\overline{c} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b}$. Полученное соотношение будем называть разложением вектора $\overline{c}$ по двум неколлинеарным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$. Покажем, что это разложение единственно. Для этого предположим противное: $\overline{c} = \lambda_1' \cdot \overline{a} + \lambda_2' \cdot \overline{b}$, где λ_1' и λ_2' одновременно не равны λ_1 и λ_2 соответственно. В результате получим $\lambda_1' \cdot \overline{a} + \lambda_2' \cdot \overline{b} = \lambda_1 \cdot \overline{a} + \lambda_2 \cdot \overline{b}$ или $\left(\lambda_1' - \lambda_1\right) \cdot \overline{a} = \left(\lambda_2 - \lambda_2'\right) \cdot \overline{b}$, где хотя бы один из скалярных множителей не равен нулю, например $\left(\lambda_2 - \lambda_2'\right) \neq 0$.

Отсюда следует, что $\overline{b} = \dfrac{\lambda_1' - \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_2'} \cdot \overline{a} = \mu \cdot \overline{a}$, но это означает коллинеарность векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, что противоречит условию. Полученное противоречие и доказывает единственность разложения.

Аналогичный факт имеет место и в пространственном случае: ***любой вектор можно разложить по трём некомпланарным векторам и такое разложение единственно.*** Нетрудно догадаться, что в этом случае вместо параллелограмма строится параллелепипед.

Рассмотрим частный, но важный для дальнейшего случай разложения произвольного вектора по трём некомпланарным векторам. Пусть $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ - единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями координатных осей декартовой системы координат OXYZ. Эти три взаимно перпендикулярных вектора называют ортами координатных осей.

Рассмотрим произвольный вектор $\overline{a}$ и поместим его начало в точку O, а конец обозначим точкой M. В результате построен вектор $\overline{OM} = \overline{a}$. Проведя через точку M плоскости, параллельные координатным плоскостям, получим прямоугольный параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overline{OM}$. Очевидно,

$\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{M_1P} + \overline{PM}$.

Заменив $\overline{M_1P}$ и $\overline{PM}$ равными им $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$, получим

$$\overline{a} = \overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \overline{OM_3},$$

где $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$ и $\overline{OM_3}$ являются составляющими вектора $\overline{a}$ по координатным осям OX, OY и OZ. На основании (1.6)

$$\overline{OM_1} = a_x \cdot \overline{i}, \qquad \overline{OM_2} = a_y \cdot \overline{j}, \qquad \overline{OM_3} = a_z \cdot \overline{k},$$

где для краткости проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси (рис. 1.20) обозначены a_x, a_y и a_z. В результате получена важная формула, дающая разложение вектора $\overline{a}$ на составляющие по координатным осям:

$$\overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}.$$

Рассмотрим точку М с координатами x, y, z. ***Вектор $\overline{OM}$, соединяющий начало координат с данной точкой М, называется радиусом-вектором точки М***. Очевидно,

$$\overline{OM} = x \cdot \overline{i} + y \cdot \overline{j} + z \cdot \overline{k}.$$

Пусть проекции вектора $\overline{a}$ на координатные оси равны a_x, a_y и a_z. Назовём числа a_x, a_y и a_z координатами вектора и будем использовать запись $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Например, запись $\overline{a} = (1,2,3)$ означает, что $\overline{a} = 1 \cdot \overline{i} + 2 \cdot \overline{j} + 3 \cdot \overline{k}$.

Если векторы заданы в координатной форме, то операции над векторами приводят согласно доказанным свойствам проекций к соответствующим операциям над их координатами.

***Пример* 1.4**. Даны векторы $\overline{a} = (1,2,3)$, $\overline{b} = (2,-2,1)$ и $\lambda = 3$. Найти $\overline{a} + \overline{b}$, $\overline{a} - \overline{b}$ и $\lambda \cdot \overline{a}$.

Решение. Пользуясь свойствами суммы, разности векторов и произведения вектора на число, получаем:

$$\overline{a} + \overline{b} = (1+2) \cdot \overline{i} + (2-2) \cdot \overline{j} + (3+1) \cdot \overline{k} = 3 \cdot \overline{i} + 4 \cdot \overline{k},$$

$$\overline{a} - \overline{b} = (1-2) \cdot \overline{i} + (2+2) \cdot \overline{j} + (3-1) \cdot \overline{k} = -\overline{i} + 4 \cdot \overline{j} + 2 \cdot \overline{k},$$

$$\lambda \cdot \overline{a} = 3 \cdot 1 \cdot \overline{i} + 3 \cdot 2 \cdot \overline{j} + 3 \cdot 3 \cdot \overline{k} = 3 \cdot \overline{i} + 6 \cdot \overline{j} + 9 \cdot \overline{k}.$$

1.3. ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ

Модуль вектора. Пусть вектор $\overline{a}$ задан в координатной форме $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Так как $\overline{a}$ является диагональю прямоугольного параллелепипеда (рис. 1.20), то, как известно, $\left|\overline{OM}\right|^2 = \left|\overline{OM_1}\right|^2 + \left|\overline{OM_2}\right|^2 + \left|\overline{OM_3}\right|^2$.

Учитывая, что $\left|\overline{OM_1}\right| = |a_x|, \left|\overline{OM_2}\right| = |a_y|, \left|\overline{OM_3}\right| = |a_z|$, получаем:

Библиографический список

Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. М. : Наука, 1969.
Мышкис А.Д. Математика для втузов. М. : Наука, 1969.
Воеводин В.В. Линейная алгебра. М. : Наука, 1980.
Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.Воеводин В.В., Кузнецов Ю.К.
Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. : Наука, 1965.
Алгебра и геометрия в инженерном вузе. М.: МГСУ. 2000. Каган М.Л., Самохин М.В.
Линейная алгебра. М. : Наука, 1978. Ильин В.А., Позняк Э.Г.
Ржаницын А.Р. Строительная механика. М. : Высш. школа. 1982.
Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. Варданян Г.С., Андреев В. И., Атаров И.В. и др. М.: Изд. АСВ, 1995.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Учебное пособие

Каган Михаил **Лазаревич**

Самохин Михаил **Васильевич**

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ
В ИНЖЕНЕРНОМ ВУЗЕ

Компьютерная верстка: *А.А.Астапов*
Дизайн обложки: *Н.С.Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Подписано к печати 08.07.08.
Формат 60x90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
Усл. 11 п.л. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, отдел реализации – оф. 511
тел., факс: (495)183-56-83, e-mail: iasv@mgsu.ru, http://www.iasv.ru