В.Н.СИДОРОВ
В.К.АХМЕТОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

$$\frac{d}{dx}F_{y'}\left(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right)=F_y\left(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(c\cdot\rho\cdot T\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\omega$$

$$Э=\int_0^l\left(\frac{1}{2}EJ\frac{d^2v}{dx^2}\cdot\frac{d^2v}{dx^2}-EJ\cdot\Delta v\cdot\delta'''(x-x_{\Delta v})\cdot v-EJ\cdot\Delta\varphi\cdot\delta''(x-x_{\Delta\varphi}\right.$$

В.Н.СИДОРОВ
В.К.АХМЕТОВ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
в строительстве

Рекомендовано Учебно-методическим объединением высших учебных заведений Российской Федерации по образованию в области строительства в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению 270100 «Строительство»

Издательство АСВ

- Москва - 2007 -

Рецензенты:
Заведующий кафедрой механики композитов механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова, доктор физико-математических наук, профессор *Б.Е. Победря*;

Кафедра высшей математики Воронежского государственного архитектурно-строительного университета, заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор *С.М. Алейников*;

Сидоров В.Н., Ахметов В.К.

Математическое моделирование в строительстве. Учебное пособие. – М.: Издательство АСВ, 2007. – 336 с.

ISBN 978-5-93093-535-6

Излагаются подходы в применении математики к решению практических, инженерных задач. Эти подходы в последние десятилетия приобретают явные черты технологии, как правило, ориентированной на использование компьютеров. И в настоящей книге рассматриваются поэтапные действия при математическом моделировании, от постановки практической задачи, до истолкования результатов ее решения, полученных математическим путем. Выбраны традиционные инженерные области математических приложений, наиболее востребованных в строительной практике: задачи теоретической механики и механики деформируемого твердого тела, задачи теплопроводности, механики жидкости и некоторые простые технологические и экономические задачи.

Книга написана для студентов технических ВУЗов как учебное пособие по курсу «Математическое моделирование», а так же для изучения других дисциплин, излагающих применение аналитических и вычислительных математических методов при решении прикладных инженерных задач.

Библиография: 41 название.

ISBN 978-5-93093-535-6

Учебное пособие

СИДОРОВ Владимир Николаевич
АХМЕТОВ Вадим Каюмович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Рисунки: М. Горелова
Компьютерная верстка Д.А. Матвеев
Дизайн обложки Н.С. Романова. Фото В.К. Чепига

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Сдано в набор 14.08.2007.
Подписано к печати 10.10.2007. Формат 70×100/16.
Бумага офс. Гарнитура таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 21. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ), 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, оф. 511 тел/факс: 183-5683, e-mail: iasv@mgsu.ru; Internet: http://www.iasv.ru

Отпечатано в ППП Типография Наука 121099, Москва, Шубинский пер., 6

Книга представляет собой учебное пособие для студентов технических ВУЗов по МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ. Этой теме в последнее время посвящено достаточно много работ. Как и в большинстве из них в рецензируемой работе содержатся четыре основных пункта. Это – формулировка законов, связывающих основные объекты математической модели. Это – исследование математических задач, к которым приводят эти математические модели. Это – разъяснение того, насколько принятая гипотетическая модель удовлетворяет сформулированному критерию практики. Это – описание возможной модернизации предложенной модели для решения более сложных практических задач, требующих введения новых параметров моделирования.

Написана книга прекрасным русским языком. Весь излагаемый материал сопровождается поучительными и полезными примерами. Каждый раздел по стилю отличается от других разделов и снабжен оригинальными эпиграфами, иногда очень остроумными. Я уверен, что книга доставит удовольствие любому студенту, аспиранту и каждому вдумчивому читателю (особенно, если он не очень отрицательно относится к философии).

Б.Е.Победря

Задачей учебного пособия является демонстрация возможностей применения языка и средств фундаментальной и прикладной математики для построения и исследования математических моделей объектов и явлений природы и человеческой деятельности.

Построение математической модели предполагает знание основополагающих закономерностей той области науки (физики, механики, гидродинамики, экономики, биологии и т.д.) к которой принадлежит изучаемое явление. Этот факт обуславливает разнообразие самих математических моделей и методов их адекватного построения, а также демонстрирует гибкость и мощь средств, находящихся в арсенале современной математики, которая продолжает непрерывно совершенствоваться как под воздействием законов внутреннего развития, так и под влиянием возрастающих потребностей практики.

Таким образом, достаточно полно решить задачу обучения математическому моделированию можно лишь в случае подробного рассмотрения процесса построения математических моделей на примере решения целого ряда важных практических задач. Именно так поступают авторы данной книги. Ими подробно рассмотрена кухня и философия построения математических моделей в таких актуальных областях взаимоотношения человека и природы, как механика и в особенности механика твердого деформируемого тела, теплопроводность, механика жидкости, задачи оптимизации.

Представляется разумной попытка сделать книгу максимально замкнутой в себе и самодостаточной. В связи с этим в ней подробно излагаются как математические средства, так и физические закономерности изучаемых явлений (вплоть до изложения истории и этапов их возникновения). Демонстрируя многообразие подходов, авторы подчеркивают то общее, что характерно для построения различных моделей. Показано, что особое значение в этом вопросе играют вариационные принципы – различные проявления «принципа наименьшего».

Некоторую сложность представляет своеобразие языка первого автора, эрудиция, а также эмоциональность и ассоциативность мышления которого вызывают уважение. Читателю потребуется некоторое время, чтобы приспособиться к особенностям авторского стиля. Однако его старания будут вознаграждены возможностью прикоснуться к истокам современной науки, заложенным великими мыслителями далекого и не очень далекого прошлого. Ясность, четкость и алгоритмичность изложения, характерные для второго автора, также заслуживают самой высокой оценки.

кафедра высшей математики ВГАСУ

Оглавление

Предисловие

Прошедший век ознаменовался стремительной и эффективной реализацией прикладных возможностей математики, и эта удивительная наука приняла на себя неоспоримую доминирующую роль в мировом научно-технического прогрессе.

Цель книги, как и самой вузовской дисциплины «Математическое моделирование», изложить подходы в применении математики к решению практических, инженерных задач. Эти подходы в последние десятилетия приобретают явные черты технологии, как правило, ориентированной на использование компьютеров. И в настоящей книге рассматриваются поэтапные действия при математическом моделировании, от постановки практической задачи, до истолкования результатов ее решения, полученных математическим путем.

Вряд ли возможно в одном учебном издании охватить весь диапазон прикладных технических задач, решаемых с использованием средств математики. Мы в этой книге выбрали традиционные инженерные области математических приложений, наиболее востребованных в строительной практике: задачи теоретической механики и механики деформируемого твердого тела, задачи теплопроводности, механики жидкости и некоторые простые технологические и экономические задачи.

Так, в пятом разделе книги изложены физические и математические основы моделирования движения жидкости. Здесь приведены пути постановки и решения модельных и практических задач механики жидкости, например задачи о моделировании движения смазки в подшипниках. Этот раздел написан В.К.Ахметовым. Параграф: «Решение задачи о брахистохроне» в шестом разделе книги написан В.Н.Сидоровым вместе с Н.П.Осмоловским. Остальные разделы книги написаны В.Н.Сидоровым.

Профессор Б.Е.Победря и профессор С.М.Алейников при рецензировании этой работы высказали важные пожелания и советы по ее содержанию, которыми авторы с благодарностью воспользовались. Мы также благодарим за советы и помощь при подготовке материала книги П.А.Акимова, Е.Г.Кривых, В.Я.Шкадова, а также студентов МГСУ С.В.Колесникова и Ю.В.Сидорова.

Книга написана для студентов строительных, а также других технических ВУЗов как учебное пособие для изучения дисциплины «Математическое моделирование».

В.Н.Сидоров
В.К.Ахметов

История науки рассматривает процесс бесконечного, последовательного приближения картины мира к ее неисчерпаемому оригиналу…

Б.Г.Кузнецов

1. Введение

Что такое математическое моделирование?

Математическое моделирование – это технология изучения и прогнозирования проявлений интересующих нас объектов с использованием возможностей математики.

Математическое моделирование - это очень эффективный, сравнительно недорогой, и нередко – единственно возможный путь изучения явлений или управления их параметрами.

Естественное желание специалиста-исследователя – найти ответ на интересующий его вопрос о проявлениях изучаемого или проектируемого объекта, выявить наилучшие возможные комбинации параметров этих проявлений (если ими можно управлять) реальным, дешевым, быстрым способом, и при этом гарантирующим устраиваемую его точность.

Можно испытать и изучить сам объект. Если это возможно и не дорого, подконтрольна и устраивает точность получаемых данных, то так и поступают. Но есть два других пути ответа на такой вопрос. Какой из путей выбрать, чтобы проверить, разрушится ли пока имеющийся на чертежах, уникальный по конструкции, автомобильный мост:

построить мост, и при прохождении по нему автотранспорта проследить за ее состоянием;

построить его уменьшенную натурную модель, которую возможно испытать в лабораторных условиях: смоделировать адекватное действие собственного веса моста, автотранспорта, ветра и других возможных существенных воздействий, понаблюдать за состоянием модели;

построить и «испытать» на компьютере *математическую модель* моста.

в науках всегда нужно строить модели
и можно иметь дело только с моделями.

Л.И.Седов

Что же собой представляет ***математическая модель***?

Это приближенное представление закономерности проявления некоторого класса объектов или явлений окружающего мира, выраженное в виде математических конструкций–аналогов и сформулированное в математических терминах и символах.

Все в больших случаях при прогнозировании интересующих проявлений объекта или явления или при оптимизации параметров этих проявлений (при управлении параметрами) привлекают, в том числе и в сочетании с двумя другими отмеченными выше подходами, универсальное и в сравнении с ними экономичное математическое моделирование. И ниже мы будем говорить о том, как осуществляется третий из перечисленных путей.

Этапы математического моделирования

Разнообразие решаемых задач, современный уровень развития математики и освоение компьютерных технологий подвели к построению методологии, последовательности действий в обоснованном ответе на вопросы естествознания с использованием математики, т.е. путем *математического моделирования*.

Инициатор идеологии математического моделирования академик *А.Н.Тихонов* предложил понимать под этими терминами комплекс работ на четырех этапах:

1. *выявление и математическая формализация законов, объясняющих выбранное для исследования проявление изучаемого объекта, построение математической модели объекта, сопоставимой с имеющимися, прогнозируемыми экспериментальными данными об объекте;*

2. *исследование сформулированной на основе построенной модели математической задачи, выбор или разработка методов ее решения и их реализация, в том числе, в компьютерных программах, проведение в рамках принятой модели математического эксперимента (аналитических решений, серии расчетов на ЭВМ), а также последующая обработка и анализ его результатов с обратной связью;*

3. *критический анализ разработанной математической модели, выявление степени ее соответствия, близости к реальным моделируемым проявлениям изучаемого объекта, впрочем, оцененной с точностью, возможной лишь на этом этапе развития науки и техники; корректировка параметров модели, анализ правильности и замена положений, закономерностей, закладываемых в основу формируемой модели;*

4. *возможное совершенствование, принципиальная замена математической модели входящей в конфликт с новыми объективно накопляемыми, уточняемыми знаниями об изучаемом явлении.*

прежде чем решать задачу, подумай, что делать с ее решением

Р.Хемминг

Моделирование и компьютер

Процедуру математического моделирования все чаще неразрывно связывают с использованием компьютеров. Передача информации с использованием компьютерных технологий сопровождается процедурами ее целенаправленной переработки по технологии математического моделирования. В современных информационных технологиях математическое моделирование играет роль «*интеллектуального ядра*» [31] - наукоемкого фильтра, преобразующего «*информационное сырье в готовый продукт, т.е. в точное знание*».

Компьютерное математическое моделирование или *численное моделирование* объектов и явлений - это выбранный вычислительный путь решения задачи, формулировкой которой стала математическая модель изучаемого объекта или явления. Этот путь включает разработку алгоритма решения задачи, как правило, реализующего математические численные методы, запись алгоритма на алгоритмическом языке, т.е. составление компьютерной программы, и решение задачи (испытание математической модели) компьютерными средствами. Использование компьютерных средств дает определяющий эффект при решении реальных практических задач, а нередко оказывается единственно возможным путем в математическом моделировании.

Однако, при явно кажущемся всемогуществе современной вычислительной техники, использование компьютеров при решении практических задач авантюрно без ясного понимания границ их возможностей. Так, с технической точки зрения здесь наиболее коварны ограничения не по быстродействию или объему памяти, а по размеру разрядной сетки. Они приводят к плохо улавливаемым и понимаемым ошибкам округления, дальше, в лучшем случае – к остановке машины, а в более частом - к подмене возможного математически корректного решения бессмысленным набором чисел. Успех в решении задачи на компьютере в большой степени определяется вычислительным опытом, «чувством числа», уровнем профессионального знакомства с сутью решаемой проблемы и, безусловно, наличием вычислительных математических знаний, причем здесь имеющих во многом интуитивную поддержку.

Философия написана в грандиозной книге, которая открыта всегда для всех и каждого, - я говорю о природе. Но понять ее может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она написана. Написана же она на математическом языке, а знаки ее – математические формулы

Галилео Галилей

Свести практическую задачу к математической – это сложно?

Проблема, прежде всего в том, что нелегко четко поставить саму практическую, инженерную задачу, поставить так, чтобы предопределить возможность ее решения любым из путей, в том числе и математическим. Ну а наличие сформулированной практической задачи, ставящей целью исследование параметров или управление параметрами выбранного для изучения объекта или явления, в свою очередь тоже не означает существование или возможность построения соответствующей ей математической задачи. Впрочем, как и наоборот.

Действительно, корректная постановка самой практической задачи в каждой области естествознания – это важная и кропотливая стадия ее разрешения. Она начинается, как правило, с осознания и анализа предварительно накопленных знаний об интересующем нас проявлении изучаемого класса объектов с привлечением имеющегося опыта, интуиции, догадок и квалификации. Такой анализ приводит к выработке определенных технических предположений, рабочих моделей изучаемых закономерностей. Критерием ревизии имеющихся знаний является естественный вопрос: что мы, в конце концов, хотим в результате решения этой задачи узнать? В свою очередь, он определяет круг необходимой для решения задачи информации.

В задачах, ставящих целью объяснить, спрогнозировать конкретное проявление изучаемого объекта (*задачах анализа*[1]), мы должны ясно отдавать себе отчет, что мы об объекте считаем известным, а что хотим узнать о том его проявлении, которое нас интересует. Корректность постановки практической задачи здесь часто зависит от того, достаточно ли у нас имеющейся информации об объекте, чтобы получить однозначный ответ на поставленный в ней вопрос. Или наоборот, не слишком ли много мы привлекаем к

---

[1] см. ссылку на странице 35

постановке задачи исходных данных об объекте: пусть одни окажутся дублирующими друг друга или в итоге невостребованными, зато другие, при своей противоречивости, обязательно исключат однозначное решение задачи.

При постановке задач управления, проектирования объекта (*задач синтеза*) мы должны себе уяснить, какую его характеристику, параметр (или несколько характеристик, параметров объекта) нужно в результате решения задачи сделать наилучшими из всех возможных вариантов (оптимальными), что значит наилучшими, и с какой точки зрения наилучшими.

Правила этой игры нельзя выучить иначе, чем обычным предписанным путем, на который уходят годы, да ведь никто из посвященных и не заинтересован в том, чтобы правила эти можно было выучить с большей легкостью.

Герман Гессе

Итогом перехода от практической задачи к математической становится созданная математическая модель изучаемого явления.

Центральной частью математической модели в задачах синтеза является математически формализованный параметр проектируемого объекта, который мы должны сделать с определенной практической точки зрения оптимальным. Оптимизация этого параметра – есть цель решения задачи. Мы ясно знаем, что хотим от управляемого объекта, эта цель задачи исходит от нас, и мы ее ставим сами. В математической модели участвуют и те количественные характеристики объекта, корректировка которых определенно влияет на достижение цели. При этом конечно, выявляются и фиксируются реальные границы изменения значений этих характеристик, что важно для решения будущей математической задачи. Сама же математическая модель здесь строится по правилам формулировки задач вариационного исчисления или задач математического программирования.

В задачах анализа переход от практической задачи к математической начинается с поиска идейной основы математической модели объекта, выявления, формализации и математической записи закономерностей, которым с нашей точки зрения следует изучаемое нами проявление этого объекта.

Особенность и сложность этого этапа состоит в том, что здесь «*необходимо знать цель, которую* уже не мы (как в задачах управления), а ***природа*** *полагает в своих действиях*»[2]. Тут объектом управляет она.

Как подбирать математические модели?

Стремление сначала понять все до самого конца, а потом уже работать – очень частая причина неудач

А.Б.Мигдал

Формирование математической модели физического явления – во многом дело интуиции. Очевидно, при этом модель будет построена не выше того уровня нашего восприятия этого явления, чем тот, который поддерживается известными, имеющими к нему отношение законами природы. Схематизировать формирование математической модели и обучать ее построению по схеме невозможно, наверно пока не открыт «*универсальный закон природы*» («*окончательная теория*»), или не решена «*шестая проблема Д.Гильберта*» - а именно, проблема аксиоматизации физики. Решением этой проблемы становится наличие конечного количества базовых аксиом. Отталкиваясь от универсального закона или от ансамбля базовых аксиом, можно выстраивать физические конструкции, моделирующие изучаемые явления, и искать их математические аналоги. А наличие полного математического описания универсального закона или терминологически увязанных базовых аксиом сделает построение математических моделей явлений результатом исключительно математических преобразований. Возможно, тогда можно пытаться эту работу программировать. Заслуживают внимания, как те, кто в это верит, так и те - кто в это не верит.

Не ставится целью создать исследовательскую модель, в частности, математическую модель, объекта или явления в целом. Строится модель одного из проявлений объекта. И она ложится в основу формулировки исследовательской задачи или узкого класса исследовательских задач об этом конкретном проявлении объекта.

[2] Леонард Эйлер

Формирование математической модели заключается в фиксации характера взаимодействия исследуемого проявления объекта с его параметрами в математических терминах, в виде математических соотношений. Причем среди многих параметров реального объекта для участия в математической модели выбирают те, которые существенно влияют на его изучаемое проявление.

Исследовательская задача, как правило, заключается либо в прогнозировании проявления некоторых качеств объекта, либо в предсказании условий состояния объекта, в которых его проявления наилучшим образом устроят человека (это т.н. управление параметрами объекта, поиск условий его оптимального состояния).

Классический путь математического моделирования в задачах прогнозирования физических явлений подразумевает привлечение в качестве *идеи* (постулата) математической модели фундаментального закона (законов) природы. К ним относятся принцип наименьшего действия (наименьшего пути, наименьшего времени, наименьшего импульса, наименьшей энергии…) и принцип сохранения (сохранение энергии, сохранение материи, сохранение импульса, сохранения движения, теплового баланса, сохранение момента …).

Конечно, ключевым является вопрос, какой закон (законы) при моделировании конкретной практической задачи следует применить и как это сделать. При этом вряд ли исследователю следует ограничивать поиск базовой идеи математической модели из фундаментальных законов природы. В качестве идеи математической модели проявления объекта могут быть выбраны разные наблюдаемые факты, представления о нем, аналогии его проявления с проявлениями уже изученного явления. Но возможность выбора при математическом моделировании классического пути, а именно, с использованием фундаментальных законов, обоснованно придает исследователю комфортность, уверенность в выборе неошибочного, гармоничного, лаконичного пути решения поставленной задачи.

Один закон ложится в идейную основу математической модели изучаемого проявления объекта, определяет ее физический смысл, другой, исполняющий роль т.н. *закона состояния*, в этой же математической модели устанавливает правила, взаимосвязи, которым следует это проявление или его отдельные характеристики.

Корректно построенная математическая модель становится формулировкой исследовательской математической задачи. Часто обнаруженная «математическая» некорректность получающейся математической задачи помогает найти некорректность в постановке изначально приведшей к ней практической задачи. Итак:

Рассмотрим пример. Проследим за построением математической модели траектории полета брошенного камня и за решением нескольких простых практических задач, использующих в своей формулировке эту модель.

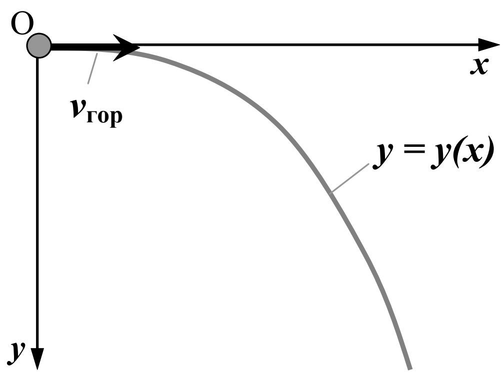
Задача о траектории брошенного камня

Сложность освоения каждого раздела науки главным образом в том, что часто нелегко понять смысл *количественных характеристик*, введенных там для описания поведения изучаемых объектов. В этой задаче механики такими характеристиками являются *скорость, время, траектория, ускорение, масса, энергия*.

Пусть камень массой $\boldsymbol{m}$, брошен в гравитационном поле с высоты в горизонтальном направлении (т.е. в направлении, перпендикулярном действию гравитационной силы) со стартовой скоростью $\boldsymbol{v}_{\textbf{гор}}$. В этой задаче будем полагать, что силы сопротивления воздуха отсутствуют.

Построим математическую модель траектории полета брошенного камня.

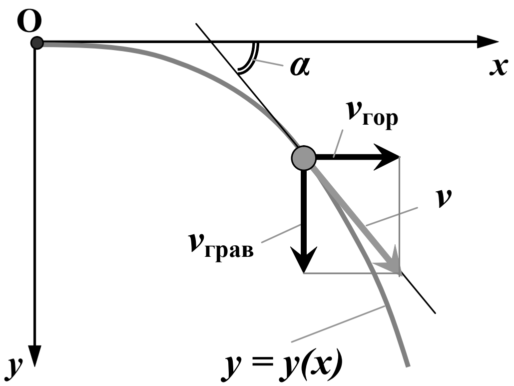
Сформулируем цель задачи в математических терминах. Нам предстоит найти вид функции $\boldsymbol{y(x)}$, чей график с учетом условий задачи, а также принимаемых по ходу ее постановки и решения



гипотез и допущений, совпадет с траекторией брошенного камня. Будем строить траекторию в покоящейся декартовой системе координат. Пусть она имеет начало в точке О, с координатами (0,0) (см. первый рисунок).

Сделаем предположение, что в каждый момент своего полета камень двигается в направлении касательной к траектории движения. Обозначим скорость его движения в любой точке траектории за $\boldsymbol{v}$.

В полете скорость камня $\boldsymbol{v}$ будет возрастать и менять направление из-за увеличения ее вертикальной составляющей - скорости свободного гравитационного падения $\boldsymbol{v}_{\text{грав}}$ (см. нижний рисунок).



Попробуем построить математическую модель траектории брошенного камня в виде уравнения относительно искомой функции $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$.

Основной идеей нашей математической модели траектории брошенного камня станет сохранение направления движения камня в любой точке траектории его полета, всегда по касательной к траектории падения камня. А тангенс наклона касательной в каждой точке траектории мы вправе вычислять из соотношения:

$$\boldsymbol{tg\alpha} = \frac{\boldsymbol{v}_{\text{грав}}}{\boldsymbol{v}_{\text{гор}}}.$$

Можем перейти к дифференциальной зависимости двух ортогональных составляющих вектора скорости. Воспользовавшись геометрическим толкованием понятия первой производной, запишем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{\text{грав}}}{v_{\text{гор}}}; \qquad (1.1)$$

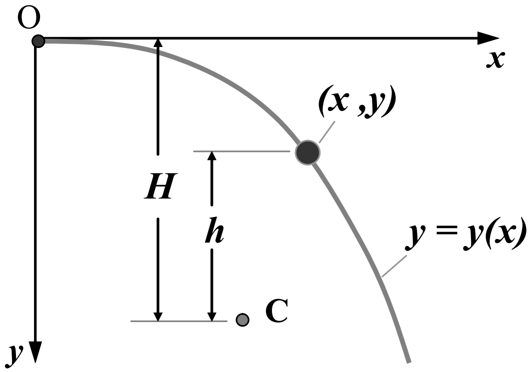
Горизонтальная составляющая скорости летящего камня $v_{\text{гор}}$ - это константа, заданная в условии нашей задачи. Величина вертикальной составляющей скорости летящего камня $v_{\text{грав}}$ увеличивается с потерей камнем высоты, а значит, безусловно зависит от пройденного им расстояния y. Чтобы получить формулу для определения $v_{\text{грав}}$ в любой точке полета, нужно сформулировать полезное в этом случае правило, которому следует обладающее массой падающее тело. Это правило, устанавливающее взаимосвязь между используемыми в задаче количественными характеристиками падающего тела (его *закон состояния*), может быть установлено из проведенных с камнем экспериментальных наблюдений или аргументировано неким заранее изученным и проверенным законом природы. Таким законом состояния падающего тела в этой задаче станет ***закон сохранения энергии***: *В любой точке траектории в принятой неподвижной (инерциальной) системе координат* xOy *энергия тела массой* m *сохраняется постоянной*:

$$Э = Э_{\text{потенц.}} + Э_{\text{кинетич.}} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v_{\text{грав}}^{2}}{2} = const;$$

Здесь g - ускорение свободного падения тела, $v_{\text{грав}}$ – гравитационная составляющая скорости тела, набранной в принятой системе координат, h - высота положения камня относительно некоторой зафиксированной в системе xOy точки (например, **С** см. рисунок). При этом, очевидно, $h = H - y$, где H – ордината (по оси Oy) выбранной фиксированной точки **С**.

Падая и набирая скорость в поле постоянных гравитационных сил, тело теряет потенциальную энергию, приобретая в таком же количестве кинетическую, т.е. к любому моменту его положения:

$$\textit{изменение}(Э) = \textit{изменение}(m \cdot g \cdot (H - y)) + \textit{изменение}(\frac{m \cdot v_{\text{грав}}^{2}}{2}) = 0. \qquad (1.2)$$



Поскольку в нашей задаче $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{H}$ – константы: ***изменение*** $(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{H})=0$, и мы можем написать:

$$\textit{\textbf{изменение}}\ (\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y})=\textit{\textbf{изменение}}\ \left(\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{v}_{\text{грав}}^{\ 2}}{2}\right). \qquad (1.2а)$$

Далее, из (1.2а) следует, что в любом положении тела в координатах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, при начальной скорости падения тела (скорости $\boldsymbol{v}_{\textbf{грав}}$ в точке О) равной нулю:

$$\frac{\boldsymbol{v}_{\text{грав}}^{\ 2}}{2}=\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}. \qquad (1.2б)$$

Формула для вычисления гравитационной составляющей скорости полета камня теперь установлена:

$$\boldsymbol{v}_{\text{грав}}=\sqrt{2\cdot\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{y}}, \qquad (1.3)$$

а выстраивая нами зависимость (1.1) приобретает вид дифференциального уравнения:

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}}=\frac{\sqrt{2\cdot\boldsymbol{g}}}{\boldsymbol{v}_{\text{гор}}}\sqrt{\boldsymbol{y}}; \qquad (1.1а)$$