

Г.М. Кадисов

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ



Г.М.КАДИСОВ

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Издание второе, исправленное

Рекомендовано учебно-методическим объединением
в качестве учебного пособия для студентов
вузов железнодорожного транспорта



Издательство Ассоциации строительных вузов
Москва 2007

ББК 38.112
УДК 624.04
К 13

Рецензенты:

Кафедра «Строительная механика» Сибирского государственного университета путей сообщения (зав. кафедрой – д-р физ-мат. наук, профессор **В.П. Кутовой**, канд. техн. наук, доцент **А.П. Шабанов**);
Заведующий отделом расчетов мостов ЗАО «Институт Гипростроймост-Санкт-Петербург», д-р техн. наук, профессор **В.И. Сливкер**;
Начальник отдела проектирования больших мостов НПО «Мостовик», к.т.н. **В.М. Курепин**.

Кадисов Г.М.

Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. – 2е изд. испр. – М.: Издательство Ассоциации строительных вузов, 2007. – 272 с.

ISBN 978-5-93093-533-2
ISBN 978-5-93204-041-6

Книга состоит из двух частей, приложения и библиографических указаний. Первая часть содержит традиционный материал по динамике и устойчивости в основном стержневых систем. Во второй части изложены численные методы расчета складчатых систем: определение собственных частот и собственных форм, а также критических нагрузок. Подробно рассматривается задача о воздействии подвижных нагрузок на упругие системы с использованием интегральных уравнений. В приложении приводятся основные сведения по матричным операциям и численному методу решения интегральных уравнений, встречающихся в разнообразных динамических задачах.

Во второе издание (1-е – Омск: Изд-во СибАДИ, 2000 г.) внесен ряд исправлений и обновлен библиографический список.

Для студентов вузов, инженеров и аспирантов.

Табл. 9. Ил. 197. Библиогр.: 170 назв.

ISBN 978-5-93093-533-2
ISBN 978-5-93204-041-6

© Издательство АСВ, 2007
© Кадисов Г.М., 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нормы проектирования рекомендуют производить расчеты уникальных сооружений как единых пространственных систем. Динамические свойства пространственной системы значительно отличаются от динамических свойств отдельных, входящих в нее элементов. Более того, в ряде случаев для выбранной на основе предварительных, казалось бы убедительных, рассуждений плоской расчетной схемы можно получить динамические параметры пространственной системы, совершенно не соответствующие действительным; в других же случаях разбиение пространственной конструкции на плоские схемы приводит к удовлетворительным результатам.

Эти рассуждения можно отнести и к свойствам устойчивости пространственной конструкции. Известно, что составленная из достаточно жестких и устойчивых на местную нагрузку элементов пространственная конструкция может потерять общую устойчивость.

В том, что в настоящее время необходимо овладеть знаниями в области динамики и устойчивости сооружений, можно убедиться, ознакомившись, например, с тематикой трехтомного справочника проектировщика по динамике сооружений [66] – [68], в котором рассматриваются такие вопросы, как динамические расчеты сооружений на действие ветра, на подвижную нагрузку, на взрывные и сейсмические воздействия, вопросы виброизоляции, гашения колебаний, динамические расчеты специальных инженерных сооружений (фундаментов, портовых морских и речных гидротехнических сооружений, железнодорожных и автодорожных мостов, эстакад, радиотелескопов). Современному инженеру, будь он проектировщик, производитель строительных работ или инженер-исследователь, знания и умения пользоваться принципами и методами расчета прочности и устойчивости сооружений при статических и динамических воздействиях не только желательны, но и необходимы.

Динамика и устойчивость сооружений – составные части строительной механики. Обе эти теории используют принципы и методы строительной механики. Объединяет их то, что они опираются на достаточно разработанную к настоящему времени математическую проблему о собственных значениях линейных операторов. В динамике сооружений как науке и учебной дисциплине особую роль играет теория колебаний. Теория устойчивости сооружений базируется на основных положениях общей теории устойчивости движения.

Необходимо заметить, что к настоящему времени создано большое число программных комплексов, позволяющих выполнять статические и динамические расчеты достаточно сложных пространственных сооружений. В связи с этим инженеры, эксплуатирующие такие комплексы, должны уметь правильно составлять исходные данные и правильно анализировать результаты расчета.

Пособие состоит из двух частей и приложений. Первая часть составлена в соответствии с разработанными новыми стандартами и содержит традиционный материал данной учебной дисциплины, который состоит лишь из основных сведений, необходимых для правильной постановки и решения задач динамики и устойчивости сооружений. Во второй части внимание акцентируется на пространственных задачах. В ней рассмотрены задачи динамики и устойчивости складчатых систем, а также рассматривается задача о воздействии подвижных нагрузок на упругие системы. В приложениях приводятся основные сведения по теории матриц, интегральным уравнениям, численному решению интегральных уравнений. Пособие снабжено библиографическими указаниями на имеющиеся учебники, учебные пособия по динамике и устойчивости сооружений, а также на специальную литературу, в которой рассматриваются и решаются практические задачи.

При изложении теоретического материала и в конкретных числовых примерах широко использованы матричная запись основных уравнений и матричные операции. Автор считает необходимым освоение каждым студентом матричного аппарата. Матрицы, во-первых, позволяют лаконично записывать многомерные объекты, системы уравнений большой размерности. Во-вторых, в инженерном и научном мире к настоящему моменту разработано большое число прикладных программ по матричным операциям и решению матричных уравнений. Овладение основами матричного исчисления позволит студенту, инженеру, исследователю осмысленно применять те или иные алгоритмы и программы в своей практической работе при решении сложных задач динамики и устойчивости пространственных сооружений.

В данном пособии впервые в учебной литературе подробно рассматривается численное решение пространственных задач о воздействии подвижных нагрузок на несущие конструкции типа пролетных строений мостов. При этом подвижная нагрузка представляется механическими подвижными объектами, моделирующими реальные автомобили. Несмотря на сложность представленного во второй части пособия математического материала, рекомендуем при ее первом чтении просмотреть и проанализировать рисунки, иллюстрирующие в большом количестве результаты сложных расчетов.

В пособии нет числовых таблиц специальных функций. Надо отметить, что в век бурно развивающейся компьютерной техники и карманных калькуляторов былое величие таблиц утрачено. Таблицы если и нужны, то только для проверки контрольных расчетов, выполненных по вновь созданной программе при ее отладке. Наконец, при необходимости значения специальных математических функций можно найти в справочных изданиях или в ранее выпущенной учебной литературе.

Данное пособие предназначено студентам строительных специальностей, а также аспирантам и инженерам.

ЧАСТЬ 1

1. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Динамика сооружений разрабатывает принципы и методы расчета сооружений на действие динамических нагрузок. К динамическим нагрузкам относят такие, у которых величина, направление и (или) место их приложения изменяются во времени таким образом, что возникают при этом большие ускорения точек конструкции, вследствие чего инерционные силы оказываются значительными, сравнимыми по величине с постоянными нагрузками. Задачами динамики сооружений являются: проверка прочности, выносливости, жесткости и колебаний при динамических воздействиях.

Приведем характеристики некоторых динамических нагрузок. Периодические нагрузки возникают от производственного оборудования с неуравновешенными вращающимися частями. Импульсивные нагрузки (падающие грузы или части силовых установок, молоты, копры) характеризуются небольшой продолжительностью и зависят от упругих и инерционных свойств конструкции. Подвижные нагрузки – нагрузки, положение которых на сооружении меняется с течением времени. Случайные нагрузки содержат элементы неопределенности относительно величины и момента воздействия (воздействие ветра на высокие сооружения, волновые воздействия на прибрежные сооружения).

Колебания – процесс поочередного возрастания и убывания во времени какой-либо величины. Механические колебания характеризуются колебаниями одной или нескольких обобщенных координат или их скоростей. При вибрации механическая система совершает колебания с относительно небольшой амплитудой и с неслишком низкой частотой.

Примеры: Колебания струны музыкального инструмента, груза, поднятого краном, фундаментов под машины с неуравновешенными вращающимися частями, поезда во время движения по железнодорожному пути, моста при движении автотранспорта; сейсмические колебания земной поверхности, колебания частицы воды при волнении моря; вибрации стекла в оконной раме.

1.1.1. Гармонические колебания

Если колебания совершаются по закону синуса или косинуса, то такие колебания называются гармоническими. Пусть, например, параметр y изменяется во времени по гармоническому закону (рис.1):

$$y = A \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

где ω – круговая частота; A – амплитуда колебаний; φ_0 – начальная фаза.

Зная круговую частоту ω , можно определить период колебаний

$$T = 2\pi / \omega \quad (2)$$

и частоту (число колебаний в единицу времени)

$$f = \omega / 2\pi. \quad (3)$$

Скорость v изменения параметра y :

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

Ускорение

$$w = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 y. \quad (5)$$

Из равенства (5) следует, что при гармонических колебаниях ускорение пропорционально квадрату частоты и смещению y , взятому со знаком минус. Из равенства (5) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0. \quad (6)$$

Это линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет общее решение в виде (1) или

$$y = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t. \quad (7)$$

Постоянные C_1, C_2 в формуле (7) или A, φ_0 в формуле (1) определяют по смещению y_0 и скорости v_0 в начальный момент времени:

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = v_0 / \omega \quad \text{или} \quad A = \sqrt{y_0^2 + (v_0 / \omega)^2}, \quad \varphi_0 = \arctg(\omega y_0 / v_0). \quad (8)$$

1.1.2. Фазовый портрет и фазовая диаграмма

Пусть фаза колебаний $\varphi = \omega t + \varphi_0$, смещение

$$x = A \cos \varphi \quad (9)$$

и скорость

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \varphi. \quad (10)$$

Тогда из равенства $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ можно получить уравнение

$$x^2 + \left(\frac{\dot{x}}{\omega}\right)^2 = A^2. \quad (11)$$

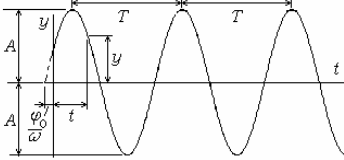


Рис.1

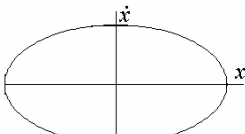


Рис.2

Это уравнение эллипса (рис. 2) на плоскости параметров (x, \dot{x}) , которую называют фазовой плоскостью. В уравнении (11) время t исключено. Кривая, изображенная на рис.2, называется **фазовой траекторией**. Точка этой траектории, зафиксированная в момент времени t и имеющая координаты (x, \dot{x}) , к следующему моменту времени $t+dt$ переместится вдоль этой траектории по ходу часовой стрелки. Так, например, все точки фазовой траектории, находящиеся в первом квадранте фазовой плоскости, имеют положительную скорость и в следующий момент их смещения должны получить положительные приращения. Совокупность фазовых кривых с различными амплитудами составляет фазовый портрет динамической системы (рис.3).

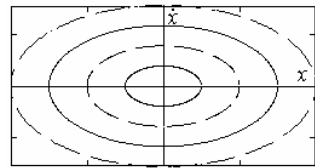


Рис.3

Различают периодические, в частности гармонические, колебания, нарастающие колебания и затухающие колебания. Графики таких колебаний и их фазовые траектории приведены на рис.4 – 6 соответственно.

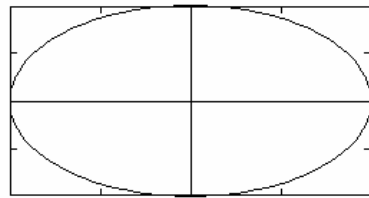
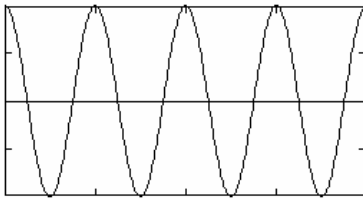


Рис. 4

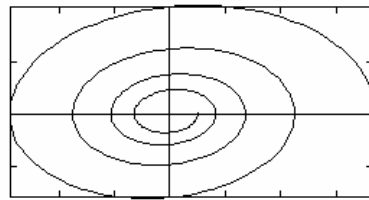
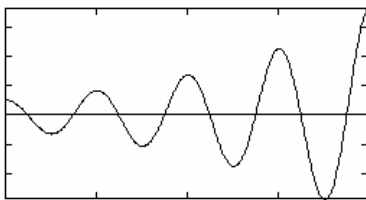


Рис.5

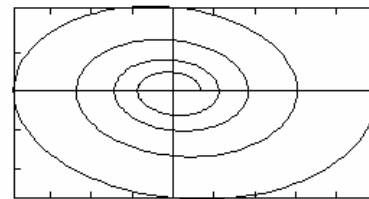
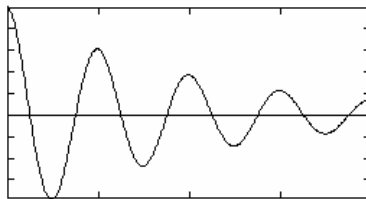


Рис.6

1.1.3. Число степеней свободы динамической системы

Число степеней свободы динамической системы равно числу независимых параметров, определяющих положения всех масс при любых возможных перемещениях системы в любой момент времени.

Динамическая система, состоящая из упругой (деформируемой) системы, несущей ограниченное число сосредоточенных масс, называется системой с конечным числом степеней свободы. Если же масса распределена вдоль стержней, по поверхности пластин, то такая система называется системой с бесконечно большим числом степеней свободы или системой с распределенными параметрами. На рис.7 приведены схемы динамических систем с конечным числом степеней свободы при условии, что стержни не растягиваются и не сжимаются. Стрелками показаны возможные положительные направления перемещений масс.

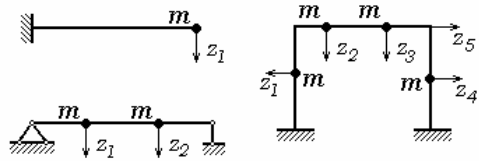


Рис.7

1.1.4. Принцип Даламбера

Уравнения динамики механической системы (упругой системы, деформируемой системы) формально совпадают с уравнениями равновесия, если к действующим внешним силам, внутренним силам и реакциям связей добавить даламберовы силы инерции:

$$I_j = -m_j w_j, \quad (12)$$

где m_j , w_j – масса и ускорение j -й точки.

1.2. КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

1.2.1. Дифференциальное уравнение

Пусть на консольную балку с одной сосредоточенной массой m действует внешняя сила $F(t)$, изменяющаяся во времени t по произвольному закону (рис.8 а). Массу балки не учитываем. Перемещение массы обозначим $z(t)$. Для составления уравнения колебаний воспользуемся принципом Даламбера. Отделим массу от балки. На массу, кроме внешней силы $F(t)$, действует со стороны балки сила P (рис.8 б). В общем случае эти две силы не уравновешены, поэтому их равнодействующая $F - P$ вызывает ускорение массы. Согласно второму закону Ньютона можно записать $m\ddot{z} = F - P$.

Отсюда найдем силу P взаимодействия массы и балки: $P = F - m\ddot{z}$. Второе слагаемое вместе со знаком минус и представляет собой инерционную силу, $I = -m\ddot{z}$. В результате получаем, что на невесомую балку действует сила $P = F + I$, равная сумме сил, внешней и инерционной (рис.8, в). В этом и заключается принцип Даламбера: вместо динамической задачи (рис.8, а) мы рассматриваем статическую (рис.8, в), добавляя к внешней силе даламберову силу инерции. Чтобы учесть рассеяние энергии при колебаниях, нужно к определенным ранее силам F и I добавить диссипативную силу T , величину которой в простейшем случае можно принять пропорциональной скорости движения с направлением, обратным движению, $T = -b\dot{z}$ (b – коэффициент вязкого сопротивления). Теперь результирующая будет $P = F + I + T$. Известно, что прогиб балки пропорционален силе, и наоборот, сила пропорциональна прогибу с коэффициентом пропорциональности c . Чем больше прогиб балки, тем большую по величине силу надо приложить к ней. Тогда можно записать, что $P = cz$. Заменяя в этом равенстве силу P суммой трех сил и выражая инерционную через ускорение, а диссипативную через скорость, после простых перестановок слагаемых, изменения знаков и переноса внешней силы в правую часть получим уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

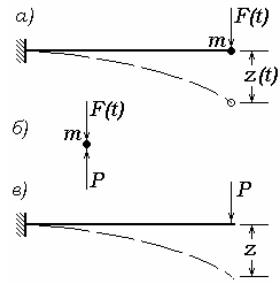


Рис.8

Теперь результирующая будет $P = F + I + T$. Известно, что прогиб балки пропорционален силе, и наоборот, сила пропорциональна прогибу с коэффициентом пропорциональности c . Чем больше прогиб балки, тем большую по величине силу надо приложить к ней. Тогда можно записать, что $P = cz$. Заменяя в этом равенстве силу P суммой трех сил и выражая инерционную через ускорение, а диссипативную через скорость, после простых перестановок слагаемых, изменения знаков и переноса внешней силы в правую часть получим уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы.

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = F. \quad (13)$$

Коэффициент c при прогибе в левой части уравнения (13) называется жесткостью и представляет собой единичную реакцию системы на единичное смещение. В нашем частном случае $c = 3EI/l^3$ – сила, которой соответствует единичный прогиб конца консоли балки пролетом l .

Приведем уравнение (13) к стандартной форме, поделив обе его части на m :

$$\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + \omega_1^2 z = F/m, \quad (14)$$

где введены обозначения собственной частоты

$$\omega_1 = \sqrt{c/m} \quad (15)$$

и коэффициента затухания

$$\varepsilon = b/(2m). \quad (16)$$

Уравнение (14) называют неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Решение этого уравнения представляет собой сумму решений однородного уравнения

$$\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + \omega_1^2 z = 0 \quad (17)$$

и частного решения. Решение однородного уравнения описывает закон изменения во времени смещения системы при свободных колебаниях, частное решение неоднородного уравнения – при чисто вынужденных, которые устанавливаются под действием внешней силы по прошествии длительного времени, когда свободные практически затухли.

1.2.2. Свободные колебания

Свободные колебания происходят при отсутствии внешней силы, $F(t) \equiv 0$. Перемещения при свободных колебаниях получим как решение однородного уравнения (17):

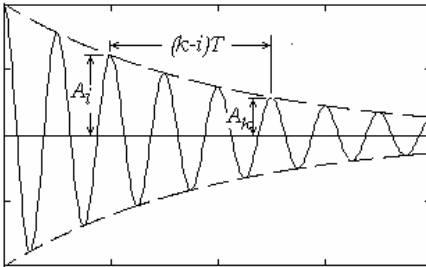


Рис.9

где, т.е. $\sin(\bar{\omega}t_i + \varphi) = 1$ и $\sin(\bar{\omega}t_k + \varphi) = 1$, тогда соответствующие этим моментам времени смещения равны

$$z_i = Ae^{-\varepsilon t_i}; \quad z_k = Ae^{-\varepsilon t_k} \quad (t_k = t_i + nT).$$

Поделим эти равенства друг на друга, прологарифмируем результат, тогда получим *логарифмический декремент колебаний*

$$\Delta = \frac{\ln(z_i/z_k)}{n} = \varepsilon T. \quad (20)$$

Равенство (20) используется для экспериментального определения логарифмического декремента колебаний и коэффициента затухания.

Амплитуду A и начальную фазу φ определяем из начальных условий по известным смещению z_0 и скорости \dot{z}_0 при $t = 0$:

$$A = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{\dot{z}_0 + \varepsilon z_0}{\bar{\omega}}\right)^2}; \quad \varphi = \arctg\left(\frac{\bar{\omega}z_0}{\dot{z}_0 + \varepsilon z_0}\right). \quad (21)$$

В частном случае, когда не учитывается диссипация, коэффициент $b = 0$, тогда, исключив из уравнения (17) диссипативное слагаемое, получим уравнение (6) свободных гармонических колебаний.

1.2.3. Вынужденные установившиеся гармонические колебания

Пусть внешняя сила изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω :

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (22)$$

Введем замену $\omega t = \omega \tau + \varphi$, тогда уравнение (14) примет вид

$$\ddot{z} + 2\varepsilon \dot{z} + \omega_1^2 z = (F_0/m) \cos(\omega \tau + \varphi), \quad (23)$$

где ω_1 – собственная частота (15) и производные взяты по новой переменной τ .

Решение уравнения (23) будем искать в виде

$$z = A \cos \omega \tau. \quad (24)$$

После подстановки (24) в (23) и приведения подобных получим

$$-2\varepsilon A \omega \sin \omega \tau + (\omega_1^2 - \omega^2) A \cos \omega \tau = (F_0/m) \cos(\omega \tau + \varphi).$$

Раскрыв в правой части косинус суммы двух углов, после несложных выкладок и приведения подобных получим систему двух уравнений относительно неизвестных амплитуды A и сдвига фаз φ :

$$\begin{aligned} 2\varepsilon A \omega &= \frac{F_0}{m} \sin \varphi; \\ (\omega_1^2 - \omega^2) A &= (F_0/m) \cos \varphi. \end{aligned} \quad (25)$$

Возведем в квадрат обе части каждого из уравнений (25) и результаты почленно сложим. После несложных преобразований найдем амплитуду вынужденных колебаний:

$$A = \frac{F_0}{m\omega_1^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (\frac{\Delta}{\pi}\eta)^2}}. \quad (26)$$

Исключив из уравнений амплитуду, найдем сдвиг фаз:

$$\varphi = \arctg \frac{2\varepsilon\eta}{\omega_1(1-\eta^2)}. \quad (27)$$

Возвращаясь к старой переменной t , напомним окончательную формулу для смещения при вынужденных гармонических колебаниях:

$$z = z_{\text{стат}} \cdot \kappa \cdot \cos(\omega t - \varphi), \quad (28)$$

где $z_{\text{стат}}$ – статический прогиб от силы F_0 , κ – коэффициент динамичности, η – относительная частота, определяемые по формулам

$$z_{\text{стат}} = F_0 / (m\omega_1^2); \quad \kappa = \left[(1-\eta^2)^2 + \left(\frac{\Delta}{\pi}\eta\right)^2 \right]^{-0.5}; \quad \eta = \omega / \omega_1. \quad (29)$$

Коэффициент динамичности, как следует из формулы (28), равен отношению максимального динамического перемещения к статическому:

$$\kappa = z_{\text{max}} / z_{\text{стат}}.$$

На рис.10 показаны графики коэффициента динамичности в зависимости от относительной частоты η , на рис.11 – графики сдвига фазы.

Как видно из рис.10, наибольшие значения коэффициент динамичности имеет при $\eta \approx 1$, когда частота внешнего воздействия и собственная частота примерно равны, при этом вынужденные колебания становятся ин-

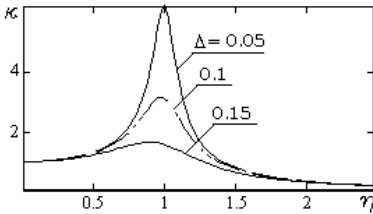


Рис.10

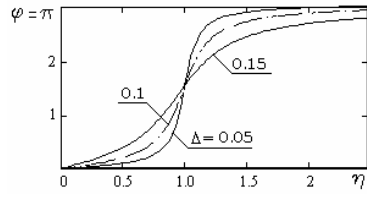


Рис.11

тенсивными, амплитуда во много раз превышает статический прогиб. Это явление называется *резонансом*. В случае, когда $\omega = \omega_1$, из формулы (29) можно получить коэффициент динамичности

$$\kappa = \frac{\pi}{\Delta}.$$

Сдвиг фазы при $\omega = \omega_1$ согласно формуле (27) равен $\varphi = \pi/2$.

Интересно отметить, что при низкой частоте внешнего воздействия, намного меньшей собственной, амплитуда колебаний почти не отличается от статического прогиба, а сдвиг фаз практически отсутствует. В случае, когда частота возбуждения велика по сравнению с собственной частотой, амплитуда колебаний незначительна, сдвиг фаз равен 180° . Это означает, что высокочастотные колебания системы совершаются с малой амплитудой и в противофазе с колебаниями внешней силы. Таким образом, на высокочастотные воздействия система почти не реагирует. Поэтому желательно, чтобы ее собственная частота была во много раз меньше частоты внешней силы.

1.2.4. Вынужденные колебания при кинематическом воздействии

Если основание системы совершает колебания, то такое возбуждение называется *кинематическим*. Это возможно в тех случаях, когда деформируемая система (прибор, устройство) находится на вибрирующей платформе или здании, сооружение испытывает сейсмическое воздействие, вызванное интенсивными колебаниями земной коры. В данном разделе рассмотрим случай гармонического кинематического воздействия на систему с одной степенью свободы (рис.12). Основание совершает горизонтальные гармонические колебания $z_0 = B \cos \omega t$. Абсолютное перемещение сосредоточенной массы m равно сумме перемещения основания и упругого прогиба $z_0 + z$. Тогда инерционная сила $I = -m(\ddot{z}_0 + \ddot{z})$, сила упругого сопротивления $R = -cz$, сила вязкого сопротивления, связанная со скоростью деформирования, $R_v = -b\dot{z}$. Приравняв сумму этих сил нулю, получим

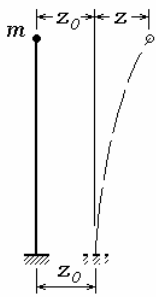


Рис.12

дифференциальное уравнение колебаний при кинематическом возбуждении:

$$m\ddot{z} + b\dot{z} + cz = -m\ddot{z}_0. \quad (30)$$

Поделим обе части уравнения (30) на m и, учитывая гармонический закон изменения z_0 , запишем уравнение в стандартной форме:

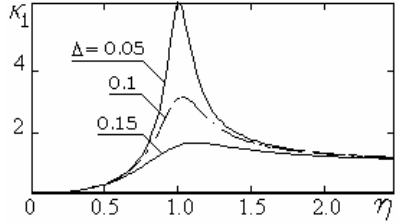
$$\ddot{z} + 2\varepsilon\dot{z} + \omega_1^2 z = B\omega^2 \cos \omega t. \quad (31)$$

Таким образом, кинематическое гармоническое воздействие равносильно динамическому при условии, что амплитуда гармонической силы пропорциональна квадрату частоты. Решение уравнения (31), следовательно, можно получить из выражений (28) и (29), если в них подставить $F_0 = Bm\omega^2$:

$$z = B \cdot \kappa_1 \cdot \cos(\omega t - \varphi);$$

$$\kappa_1 = \eta^2 \left[(1 - \eta^2)^2 + \left(\frac{\Delta}{\pi} \eta \right)^2 \right]^{-0.5}.$$

Графики коэффициента динамичности κ_1 приведены на рис.13. Сдвиг фазы φ определяется по формуле (27). Малым частотам кинематического воздействия соответствует незначительная упругая составляющая полного смещения сосредоточенной массы, абсолютное перемещение массы примерно одинаково с перемещением основания. Наоборот, при больших частотах упругая составляющая численно почти равна перемещению основания, но из-за сдвига фазы, равного почти полупериоду, абсолютное перемещение массы незначительно, сосредоточенная масса как бы не реагирует на колебания основания.



1.2.5. Вынужденные неустановившиеся колебания при динамическом воздействии

Решение дифференциального уравнения (14) с силой (22) найдем как сумму свободных колебаний (18) и частного решения:

$$z = Ce^{-\varepsilon t} \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) + z_{\text{стат}} \kappa \cos(\omega t - \varphi), \quad (32)$$

где первое слагаемое представляет свободные колебания. Произвольные постоянные C , $\bar{\varphi}$ необходимо определить из начальных условий $z(0) = z_0$; $\dot{z}(0) = \dot{z}_0$. Если принять нулевые начальные условия ($z_0 = 0$; $\dot{z}_0 = 0$), то можно получить следующее решение:

$$z = \kappa z_{\text{стат}} [ae^{-\varepsilon t} \sin(\bar{\omega}t - \bar{\varphi}) + \cos(\omega t - \varphi)], \quad (33)$$

где

$$a = \sqrt{\cos^2 \varphi + (\varepsilon \cos \varphi + \omega \sin \varphi)^2 / \bar{\omega}^2}; \quad \text{tg } \bar{\varphi} = \frac{-\bar{\omega} \cos \varphi}{\varepsilon \cos \varphi + \omega \sin \varphi}. \quad (34)$$

На рис.14 приведен пример нестационарных колебаний при гармоническом воздействии и нулевых начальных условиях. Параметр вынужденной частоты $\eta=0.9$, статический прогиб $z_{\text{стат}}=1.0$. При этом логарифмический декремент $\Delta=0.5$. Согласно рис.14 неустановившийся режим длится недолго, и после шести циклов практически устанавливаются чисто вынужденные колебания с достаточно высокой амплитудой, раза в четыре

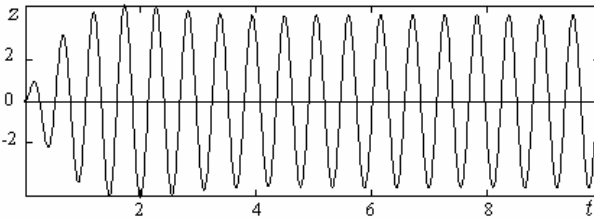


Рис.14

четыре превышающей статический прогиб. Однако динамическое смещение в неустановившемся режиме оказывается больше установившейся амплитуды.

В случае отличных от нуля начальных условий и гармонического внешнего воздействия решение уравнения (14) можно получить, суммируя решение (18) с параметрами (21), описывающее свободное колебание с известными начальными условиями, и нестационарное решение (33), соответствующее нулевым начальным условиям.

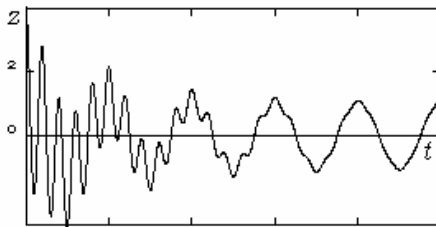


Рис.15

На рис.15 показан процесс установления вынужденных колебаний при начальной амплитуде $A_0=4$, нулевой начальной скорости и относительной частоте $\eta=0.5$, при этом частота свободных колебаний с учетом затухания $\bar{\omega}=15.7$ рад/с, логарифмический декремент $\Delta=0.5$.

1.2.6. Колебания при воздействии, изменяющемся по произвольному закону

Если сила воздействует на систему с одной степенью свободы и изменяется во времени по произвольному закону, можно для уравнения (14) воспользоваться решением в интегральной форме с применением *интеграла Дюамеля*:

$$z = \int_0^t \frac{e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \bar{\omega}(t-\tau)}{m\bar{\omega}} F(\tau) d\tau. \quad (35)$$

Интеграл Дюамеля можно получить из следующих соображений. Пусть на систему, начиная с некоторого момента $\tau < t$, в течение короткого интервала $d\tau$ действует сила $F(\tau)$, которая затем в момент $\tau + dt$ исчезает.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
ЧАСТЬ 1	5
1. ДИНАМИКА СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	5
1.1. Основные понятия	5
1.1.1. Гармонические колебания	6
1.1.2. Фазовый портрет и фазовая диаграмма	6
1.1.3. Число степеней свободы динамической системы	8
1.1.4. Принцип Даламбера.....	8
1.2. Колебания системы с одной степенью свободы	8
1.2.1. Дифференциальное уравнение.....	8
1.2.2. Свободные колебания.....	10
1.2.3. Вынужденные установившиеся гармонические колебания.....	11
1.2.4. Вынужденные колебания при кинематическом воздействии.....	12
1.2.5. Вынужденные неустановившиеся колебания при динамическом воздействии.....	13
1.2.6. Колебания при воздействии, изменяющемся по произвольному закону.....	14
1.3. Колебания систем с конечным числом степеней свободы.....	16
1.3.1. Дифференциальные уравнения	16
1.3.2. Свободные колебания без учета диссипации энергии.....	18
1.3.3. Вынужденные колебания при гармоническом внешнем воздействии	21
1.3.4. Метод разложения по собственным формам	22
1.3.5. Пример расчета рамы с сосредоточенными массами	23
1.4. Колебания стержней	35
1.4.1. Определения	35
1.4.2. Дифференциальные уравнения изгибных колебаний стержня.....	35
1.4.3. Граничные условия	36
1.4.4. Свободные колебания стержней.....	36
1.4.5. Ортогональность собственных форм	38
1.4.6. Собственные частоты и собственные формы прямых стержней	39
1.4.7. Вынужденные установившиеся колебания	40
1.4.8. Пример	41
1.5. Метод начальных параметров.....	42
1.5.1. Функции Крылова	42
1.5.2. Пример	44
1.5.3. Вынужденные гармонические колебания балки	45
1.6. Колебания стержневых систем	48
1.6.1. Метод перемещений в расчетах колебаний рам	48

1.6.2. Вариационные методы.....	50
1.6.3. Метод конечных элементов.....	52
1.7. Элементы расчета на сейсмические воздействия.....	56
1.7.1 Введение.....	56
1.7.2 Инженерный метод расчета высоких сооружений.....	57
1.7.3 Расчет эстакадного моста на горизонтальное сейсмическое воздействие.....	60
1.8. Колебания упругих систем при подвижных нагрузках.....	64
1.8.1. Введение.....	64
1.8.2. Задача Крылова.....	64
1.8.3. Коэффициент динамичности.....	67
2. УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ.....	68
2.1. Определения.....	68
2.2. Методы исследования устойчивости упругих систем.....	69
2.2.1. Статический метод.....	69
2.2.2. Энергетический метод.....	69
2.2.3. Динамический метод.....	70
2.2.4. Исследование полной потенциальной энергии системы.....	70
2.3. Устойчивость систем с конечным числом степеней свободы.....	71
2.3.1. Исследование статическим методом.....	71
2.3.2. Применение энергетического метода.....	72
2.3.3. Динамический метод.....	72
2.4. Устойчивость прямых однопролетных стержней.....	73
2.4.1. Дифференциальное уравнение продольного изгиба.....	73
2.4.2. Критические силы для однопролетных прямых стержней.....	74
2.4.3. Условия применимости формулы Эйлера.....	74
2.4.4. Метод начальных параметров в матричной форме.....	75
2.4.5. Устойчивость стержней со ступенчатым изменением жесткости.....	78
2.5. Устойчивость рам.....	80
2.5.1. Расчет устойчивости рам методом перемещений.....	80
2.5.2. Численный пример расчета четырехэтажной рамы.....	83
2.6. Приближенные методы расчета рам на устойчивость.....	85
2.6.1. Вводные замечания.....	85
2.6.2. Приближенные формулы реакций однопролетных стержней.....	85
2.6.3. Расчет устойчивости рамы методом конечных элементов.....	87
2.7. Устойчивость круговой арки.....	89
2.8. Устойчивость плоской формы изгиба.....	91
2.9. Устойчивость сжатых прямоугольных пластин.....	94
2.10. Устойчивость упругопластических систем.....	97
2.11. Понятие о динамической устойчивости.....	98

2.11.1. Параметрические колебания системы с одной степенью свободы	98
2.11.2. Параметрические колебания в системах с конечным числом степеней свободы	101
2.11.3. Параметрические колебания в распределенных системах	104
ЧАСТЬ 2	106
3. СКЛАДЧАТЫЕ СИСТЕМЫ	106
3.1. Статика складчатых систем	106
3.1.1. Метод перемещений	106
3.1.2. Метод расширения заданной системы	112
3.1.3. Функции прогибов при изгибе пластинки	116
3.1.4. Смешанный метод расчета складок с диафрагмами	119
3.1.5. Метод компенсирующих нагрузок для консольных складок	123
3.2. Свободные колебания складчатых систем	125
3.2.1. Матрица масс при колебаниях в плоскости пластинки	125
3.2.2. Матрица масс при изгибных колебаниях	128
3.2.3. Применение базисных функций	129
3.2.4. Матрица масс прямоугольной пластинки	131
3.2.5. Глобальная матрица масс складчатой системы	132
3.2.6. Собственные частоты и собственные формы однопролетной складки	133
3.2.7. Свободные колебания складок с промежуточными опорами	135
3.2.8. Преобразование уравнений	135
3.2.9. Уравнение частот	137
3.2.10. Собственные частоты и собственные формы складки с промежуточными опорами	138
3.3. Устойчивость цилиндрических складчатых систем	141
3.3.1. Введение	141
3.3.2. Матрица геометрической жесткости прямоугольной пластинки	143
3.3.3. Глобальная матрица геометрической жесткости	146
3.3.4. Устойчивость свободно опертой прямоугольной пластинки, равномерно сжатой в одном направлении	146
3.3.5. Устойчивость плоской формы изгиба двутавровой балки	147
3.3.6. Выпучивание тонкой стенки двутавровой балки в приопорных участках	148
3.3.7. Устойчивость свободно опертой прямоугольной пластинки, сжатой двумя равными и противоположными сосредоточенными силами	150
4. ВОЗДЕЙСТВИЕ ПОДВИЖНЫХ НАГРУЗОК НА УПРУГИЕ СИСТЕМЫ ...	153
4.1. Колебания однопролетных складок под воздействием одиночного автомобиля	153
4.1.1. Уравнения совместных колебаний складчатой системы и подвижного механического объекта	153

4.1.2. Применение кусочно-линейной интерполяции для решения системы интегральных уравнений типа Вольтерры первого рода	157
4.1.3. Определение статических перемещений экипажа, рессор и шин от собственного веса	159
4.1.4. Преобразование рекуррентной системы алгебраических уравнений	160
4.1.5. Вычисление амплитуд узловых перемещений и напряжений в складке	161
4.1.6. О количестве учитываемых в расчетах гармоник и собственных форм складки	162
4.1.7. Скачки контактных сил в точках перелома профиля дороги	164
4.1.8. Моделирование колебаний складки при движении одиночного автомобиля	165
4.2. Колебания упругих систем при движении колонны механических объектов	175
4.2.1. Разрешающие уравнения колебаний однопролетных складок	175
4.2.2. Моделирование колебаний складки при движении колонны механических объектов	177
4.2.3. О резонансах	182
4.2.4. Совместные колебания неразрезной складки и подвижных объектов	190
4.2.5. Вероятностные оценки динамического воздействия подвижной нагрузки на пролетные строения мостов	194
4.3. Устойчивость колебаний упругой системы под воздействием колонны подвижных механических объектов	201
4.3.1. Предварительные сведения	201
4.3.2. Основные уравнения с учетом начальных условий для подвижных объектов	203
4.3.3. Матрица перехода	205
4.3.4. Пример	208

ПРИЛОЖЕНИЯ 210

1. Некоторые сведения из теории матриц	210
1.1. Определения	210
1.2. Сложение и умножение матриц	210
1.3. Квадратичные формы	211
1.4. Примеры	211
1.5. Единичная матрица	211
1.6. Обратная матрица	212
1.7. Решение системы алгебраических уравнений	212
1.8. Блочные матрицы	213
1.9. Основные задачи	213
1.10. Задача на собственные значения	214
1.11. Решения с помощью собственных векторов	215

1.12. Минимизация квадратичного функционала	216
1.13. Пример задачи минимизации	217
1.14. Теорема Гамильтона–Кэли	219
1.15. Спектральное разложение квадратной матрицы	219
2. Интегральные уравнения элементарных задач динамики	220
2.1. Прямолинейное движение материальной точки	220
2.2. Движение материальной точки в вязкой среде	222
2.3. Система с одной степенью свободы без учета затухания	223
2.4. Система с одной степенью свободы с учетом сил вязкого сопротивления	224
2.5. Вязкоупругий элемент	224
2.6. Деформирование вязкого элемента	225
3. Временная кусочно-линейная интерполяция	226
3.1. Общий случай	226
3.2. Движение точечной массы без учета рассеяния энергии	228
3.3. Движение массы в вязкой среде	230
3.4. Система с одной степенью свободы без учета затухания	231
3.5. Система с одной степенью свободы с учетом сил вязкого сопротивления	233
3.6. Специальный случай внешнего воздействия на систему с одной степенью свободы	236
3.7. Деформирование вязкоупругого элемента	238
3.8. Вязкий элемент	239
4. Численное решение элементарных задач динамики	240
4.1. Метод декомпозиции	240
4.2. Вынужденные колебания линейного осциллятора	241
4.3. Вынужденные колебания системы с конечным числом степеней свободы	244
4.4. Вынужденные колебания распределенной системы при подвижной переменной во времени нагрузке	246
4.5. Свободные колебания линейной системы с одной степенью свободы без учета диссипации энергии	249
4.6. Колебания нелинейной системы с одной степенью свободы	250
Библиографические указания	252
Библиографический список	257

Учебное пособие

Григорий Михайлович Кадисов

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

Редакторы: *И.Г. Кузнецова, Р.В. Рыбак*
Компьютерная верстка: *Г.М. Кадисов*
Дизайн обложки *Н.С. Романова*

Лицензия ЛР № 0716188 от 01.04.98. Сдано в набор 16.04.2007
Подписано к печати 04.06.07. Формат 60×84/16.
Бумага офс. Гарнитура таймс. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 17. Тираж 1000 экз. Заказ

Издательство Ассоциации строительных вузов (АСВ)
129337, Москва, Ярославское шоссе, 26, оф. 511
тел/факс: 183-56-83
e-mail: iasv@mgsu.ru; www.iasv.ru