РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА
И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Е. А. Ковалев, Г. А. Медведев

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ БАКАЛАВРИАТА
И МАГИСТРАТУРЫ

Под общей редакцией доктора физико-математических наук,
профессора **Г. А. Медведева**

Рекомендовано Учебно-методическим отделом высшего образования в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по экономическим направлениям и специальностям

Книга доступна в электронной библиотечной системе
biblio-online.ru

Москва ▪ Юрайт ▪ 2016

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73
К56

***Авторы*:**

Ковалев Евгений Аркадьевич — доцент, кандидат физико-математических наук, доцент Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ;

Медведев Геннадий Алексеевич — профессор, доктор физико-математических наук, профессор Белорусского государственного университета.

***Рецензенты*:**

Домбровский В. В. — доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой математических методов и информационных технологий в экономике Национального исследовательского Томского государственного университета;

Рыков В. В. — доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и компьютерного моделирования Российского государственного университета нефти и газа имени И. М. Губкина;

Хацкевич Г. А. — доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой экономической теории и коммерческой деятельности Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Ковалев, Е. А.

К56 Теория вероятностей и математическая статистика для экономистов : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Е. А. Ковалев, Г. А. Медведев ; под общ. ред. Г. А. Медведева. — М. : Издательство Юрайт, 2016. — 284 с. — Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс.

ISBN 978-5-9916-5950-5

В основу учебника положен курс лекций, которые читались авторами многие годы студентам различных нематематических специальностей, включая экономические, изучающих вероятностные и статистические методы. Предлагаемый курс по теории вероятностей и математической статистике не претендует на полноту изложения идей и методов данной теории, а призван оказать помощь студентам экономических направлений в освоении этой достаточно трудной для них математической дисциплины.

Материал учебника представлен как вложенные друг в друга структуры, что делает его универсальным инструментарием для различных уровней высшего образования: прикладного бакалавриата, академического бакалавриата и магистратуры. Материал для прикладного бакалавриата представляет собой ядро, к которому добавляется дополнительный материал для академического бакалавриата, а к нему материал для магистратуры. Для удобства главы и параграфы учебника помечены специальными значками для различных уровней высшего образования.

Учебник снабжен большим числом примеров и задач, позволяющих использовать его как для проведения практических занятий, так и для самостоятельной работы студентов при освоении курса теории вероятностей и математической статистики.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

Для студентов экономических направлений и лиц, использующих вероятностные и статистические методы при решении практических задач.

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.17я73

ISBN 978-5-9916-5950-5

Оглавление

Основные обозначения и сокращения

ГС — генеральная совокупность
ДА — дисперсионный анализ
ЗБЧ — закон больших чисел
ММП — метод максимального правдоподобия
МНК — метод наименьших квадратов
МО — математическое ожидание СВ
ПР — плотность распределения
ПЭИ — пространство элементарных исходов
СВ — случайная величина
СП — случайный процесс
ТФР — теоретическая функция распределения
ФПВ — формула полной вероятности
ФР — функция распределения СВ
ЦПТ — центральная предельная теорема
ЭИ — элементарный исход
ЭФР — эмпирическая функция распределения
$P(A)$ — вероятность случайного события
$F_\xi(x)$, $F(x)$ — функция распределения случайной величины
$p(x)$ — плотность вероятности непрерывной случайной величины
$\Phi(x)$ — функция стандартного нормального распределения
$\xi \sim N(a, \sigma^2)$ — СВ ξ распределена нормально с МО a и дисперсией σ^2
I_A — индикатор события A
$M\xi$ — математическое ожидание СВ ξ
$D\xi$ — дисперсия СВ ξ
$\hat{\theta}_n$ — оценка параметра θ
$\overline{x}$ — выборочное среднее
$\tilde{S}^2$ — выборочная дисперсия
S^2 — исправленная выборочная дисперсия
$F_n(x)$ — эмпирическая функция распределения

Предисловие

Настоящее время характеризуется быстротой сменяемости условий экономической деятельности, что предъявляет высокие требования к принятию решений о выборе оптимальной стратегии по управлению предприятием, компанией, фирмой. Случайный характер экономических процессов и большой объем получаемой информации обусловливают необходимость привлечения к исследованию экономических задач теории вероятностей и математической статистики. Профессиональный уровень экономиста во многом зависит от того, насколько успешно освоил он вероятностные и статистические методы и умеет использовать их при анализе сложных экономических процессов и принятии решений.

Задачи экономики чрезвычайно разнообразны, но в первую очередь к ним относятся методы сбора и обработки статистической информации, оценка состояния и прогнозирование развития экономических процессов. Для этого применяют различные методы современного математического аппарата, включая эконометрику, финансовую математику, статистические методы прогнозирования и др. В основе их лежат вероятностно-статистические методы. Это обусловливает необходимость изучения студентами экономических направлений вузов методов теории вероятностей и математической статистики.

Учебник написан на основе лекций, которые на протяжении многих лет читались авторами студентам различных нематематических специальностей, включая экономические, изучающим вероятностные и статистические методы. Он охватывает основы теории вероятностей и математической статистики, их важнейшие современные методы и приемы, проиллюстрированные на примерах.

Главной задачей, которую ставят перед собой авторы, является рассмотрение теории вероятностей и математической статистики как аппарата для исследования экономических процессов. Это предопределило включение в книгу не только традиционных вопросов, но и таких, как основные сведения из теории случайных процессов и теории массового обслуживания, основы дисперсионного, факторного, кластерного анализа, основы теории принятия решений.

Назначение учебника и его объем предопределили характер изложения материала. Учебник рассчитан на читателя, знающего математику в объеме программы экономических направлений вузов. Поэтому опущены разъяснения более сложных вопросов и доказательства многих теорем, которые требуют знаний, выходящих за пределы этой программы.

Вследствие этого с точки зрения компетентностного подхода в результате освоения дисциплины студент должен:

знать

- основные понятия и инструменты теории вероятностей и математической статистики;
- возможности применения теории вероятностей и математической статистики в экономике;

уметь

- вычислять вероятности случайных событий;
- находить законы распределения и числовые характеристики случайных величин и системы случайных величин;
- решать задачи математической статистики;

владеть

- методами решения вероятностных и статистических задач;
- навыками использования вероятностных и статистических методов при исследовании экономических процессов.

Учебник написан таким образом, чтобы его можно было использовать для различных уровней высшего образования: прикладного и академического бакалавриата и магистратуры. Схематично материал учебника можно разделить следующим образом:

Используемый материал учебника			
Глава	Параграфы главы		
1	1.1—1.5, 1.7, 1.8	—	1.6
2	2.1	2.2, 2.4	2.3
3	3.1—3.3, 3.5, 3.6	3.4	3.7
4	4.1—4.3, 4.6, 4.9	4.4, 4.5, 4.7, 4.8	4.10
5	5.1—5.4	5.5	—
6	—	—	6.1—6.9
7	7.1—7.3	—	—
8	8.1, 8.2.1, 8.3.1, 8.4	8.2.2, 8.3.2	8.2.3
9	9.1, 9.2, 9.3.1, 9.4	9.3.2, 9.3.3	9.5
10	—	10.1—10.3	—
11	11.1, 11.2.1, 11.2.2, 11.3.1, 11.3.2, 11.3.6	11.2.3, 11.3.3—11.3.5, 11.3.7	—
12	—	—	12.1—12.7
13	—	—	13.1—13.5
14	—	—	14.1—14.5
Уровень высшего образования	Прикладной бакалавриат	Академический бакалавриат	Магистратура

При этом следует иметь в виду, что в таблице материал представлен как вложенные друг в друга структуры. Материал для прикладного бакалавриата представляет собой ядро, к которому добавляется дополнительный материал для академического бакалавриата, а к нему — материал для магистратуры. Для удобства главы и параграфы учебника помечены специальными значками для различных уровней высшего образования: ▲ — материал для прикладного и академического бакалавриата и магистратуры, ■ — материал для академического бакалавриата и магистратуры, ● — материал для магистратуры.

При написании настоящего учебника авторы использовали разнообразную литературу по теории вероятностей и математической статистике, а также собственные наработки. В списке литературы указываются как источники приводимых результатов, так и дополнительная литература, относящаяся к рассматриваемому материалу.

Необходимые для решения задач математико-статистические таблицы приведены в приложении. При этом дается лишь минимум таблиц, необходимых для выполнения практических расчетов по излагаемой в учебнике методике.

В конце книги приводится предметный указатель основных понятий курса, а также перечень основных сокращений и обозначений, используемых в данном учебнике.

Авторы

Это учение, объединяющее точность математических доказательств с неопределенностью случая и примиряющее эти, казалось бы, противоречивые элементы, с полным правом может претендовать на титул «математика случайного».

Блез Паскаль

Введение

Теория вероятностей — сравнительно молодая ветвь математики. Ее развитие как самостоятельной науки началось с переписки Б. Паскаля (1623—1662) и П. Ферма (1601—1665) в 1654 г., хотя значительно раньше этих ученых многие математики занимались задачами, относящимся к азартным играм. Так, например, Л. Пачоли (1445—1514) в своей книге «Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalita» («Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях») рассматривал одну задачу о вероятностях, но пришел к ошибочному решению. Однако уже Дж. Кардано (1501—1576) и Г. Галилей (1564—1642) правильно решали отдельные теоретико-вероятностные задачи. Но мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий, впервые возникла у древнегреческих математиков. Ее подробное изложение мы находим в поэме Л. Кара «О природе вещей».

Переписка Паскаля и Ферма оказала большое влияние на дальнейшее развитие теории вероятностей. В 1658 г. появилась книга Х. Гюйгенса (1629—1695) «О расчетах в азартных играх», в которой давалось подробное изложение вопросов, рассмотренных Ферма и Паскалем, но, кроме того, им было выдвинуто и много аналогичных вопросов. Именно в этот период устанавливаются теоремы сложения и умножения вероятностей, вырабатывается важное понятие «математическое ожидание». С работой Гюйгенса непосредственно связана основная работа Я. Бернулли (1654—1705) «Искусство догадок», которая была опубликована лишь после его смерти в 1713 г. В первой части своего труда Бернулли воспроизводит и комментирует книгу Гюйгенса, приводит полные решения тех вопросов, которые Гюйгенс поставил, но не решил. Однако важнейшей частью книги является четвертая, в которой изложен закон больших чисел.

Наряду с задачами азартных игр уже в самом начале возникновения теории вероятностей появились задачи, связанные с составлением таблиц смертности и вопросами страхования. В 1662 г. Дж. Граун (1620—1674) впервые составил таблицы вероятности смерти как функции возраста.

В 1812 г. выходит большой трактат П.-С. Лапласа (1749—1827) «Аналитическая теория вероятностей», в которой он излагает свои собственные результаты в области теории вероятностей, а также результаты своих предшественников. К этому же времени относятся работы по теории вероятностей С. Пуассона (1781—1840) и К. Гаусса (1777—1855). С их именами в современной теории вероятностей связаны понятия распределений и случайных процессов, носящих их имена. Теория вероятностей начала успешно применяться в страховом деле, статистике народонаселения, биологической статистике и теории артиллерийских стрельб.

Наиболее плодотворный период в развитии теории вероятностей связан с именами П. Л. Чебышева (1821—1894) и его учеников А. А. Маркова (1856—1922) и А. М. Ляпунова (1857—1918), усилиями которых она была превращена в стройную математическую науку.

Современный период в развитии теории вероятностей начинается с установления ее аксиом, т.е. того фундамента, на котором основывается любая математическая наука. Первые работы в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну (1880—1968), Р. Мизесу (1883—1953), Э. Борелю (1891—1956).

В 1933 г. вышла книга А. Н. Колмогорова (1903—1987) «Основные понятия теории вероятностей», в которой была предложена аксиоматика, получившая всеобщее признание и позволившая дать строгую основу как классическим разделам теории вероятностей, так и развитию ее новых разделов, таких как теории случайных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и др.

В настоящее время теория вероятностей весьма плодотворно применяется в различных областях науки и практики, включая такие вопросы экономики, как статистика производств, статистический контроль качества продукции, прогнозирование и управление.

Объектом теории вероятностей является измерение степени возможности различных случайных событий и явлений. Знание выявленных с помощью теории вероятностей закономерностей позволяет предвидеть, как эти события и явления будут протекать в дальнейшем.

Раздел I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В результате изучения данного раздела студент должен:

знать

- основные понятия теории вероятностей;
- основные формулы для вероятностей случайных событий;
- основные вероятностные распределения и их числовые характеристики;
- предельные теоремы теории вероятностей;
- основы теории случайных процессов;
- возможности применения теории вероятностей в экономике;

уметь

- вычислять вероятности случайных событий;
- находить законы распределения и числовые характеристики случайных величин и систем случайных величин;
- применять предельные теоремы для решения вероятностных задач;
- решать задачи теории массового обслуживания;
- находить характеристики случайных процессов;

владеть

- методами вычисления характеристик случайных величин;
- навыками решения вероятностных задач;
- методами исследования случайных процессов и систем массового обслуживания;
- навыками использования вероятностных методов при исследовании экономических процессов.

Глава 1
ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

В своей практической деятельности человеку часто приходится сталкиваться с явлениями, результат которых нельзя предсказать заранее (например, месячная прибыль компании, которую заранее нельзя точно предугадать). Точно так же нельзя сказать заранее, сколько изделий забракует ОТК. Такие явления называются *случайными*.

Таким образом, ***случайное явление*** — это такое явление, которое при повторении эксперимента с сохранением основных условий его проведения в зависимости от случайных обстоятельств заканчивается различными исходами. События, связанные с такими явлениями, также называются ***случайными***. Случайным событием является, например, выпадение «герба» при бросании монеты, длительность телефонного разговора и т.д.

Мы будем изучать ***массовые случайные события***, т.е. события, которые можно наблюдать многократно. Предметом исследования теории вероятностей являются закономерности, свойственные массовым случайным событиям.

▲1.1. Относительная частота и вероятность

Говоря о массовых случайных событиях, мы можем отметить, что одни из них наблюдаются часто, другие — менее часто или совсем редко. Однако такая характеристика случайных событий весьма неопределенная. Более объективной экспериментальной характеристикой случайного события является *относительная частота*.

Пусть мы провели N опытов, заключающихся, например, в подбрасывании монеты и наблюдении случайного события — появлении «герба» (Г). Предположим, что «герб» наблюдался $N_Г$ раз. Отношение числа опытов, в которых событие появилось, к общему числу опытов называется ***относительной частотой*** данного события и обозначается $W(Г)=\dfrac{N_Г}{N}$. Экспериментально установлено, что с увеличением числа опытов ($N \to \infty$) относительная частота становится практически постоянной. Это свойство называется ***свойством статистической устойчивости относительных частот***.

Следовательно, можно попытаться с каждым случайным событием A связать некоторое число $P(A)$, к которому сходится его относительная частота $W(A)$ при возрастании числа опытов, и считать это число вероятностью данного события, т.е. $W(A) \underset{N\to\infty}{\to} P(A)$. Такое определение вероятности случайного события называют ***статистическим***. Очевидно, что приведенные соображения нельзя считать удовлетворительным математическим определением вероятности случайного события. Попытки выбирать в качестве вероятности число по разным сериям опытов будут приводить обычно к разным, хотя и близким значениям.

В простейших случаях интуитивные представления о вероятности часто приводят к однозначному ответу. Так, например, никто не сомневается в том, что вероятность выпадения «герба» равна 1/2. Объяснения обычно приводят достаточно убедительные: возможны два исхода — выпал «герб» или выпала «решка», причем ни одному из них нельзя отдать предпочтения, так как монета симметричная; при многократном повторении опыта относительная частота близка к 1/2. Первая часть этого объяснения является попыткой построить модель случайного явления; вторая часть — экспериментальная проверка соответствия модели реальному явлению. Однако при незначительном усложнении опыта здравый смысл может подвести.

Представим себе, что при каждом из 10 подбрасываний монеты выпадал «герб». Предлагается угадать, с какой вероятностью «герб» выпадет в следующий раз. Довольно распространено мнение, что выпадение «решки» более вероятно. Ответ 1/2 в этом более сложном опыте свидетельствует о более развитой интуиции. Поэтому требуется четкое определение понятий, связанных со случайными явлениями.

▲ 1.2. Пространство элементарных исходов. Случайные события и операции над ними

Теория вероятностей изучает математические модели, описывающие случайные эксперименты и наблюдения за их результатами. Предметом наблюдения могут быть какой-либо экономический процесс, его часть или действующая экономическая система. Для построения и изучения математических моделей случайных явлений необходимо ввести ряд основных понятий.

Определение 1.1. Под ***случайным экспериментом S***, или ***опытом***, будем понимать осуществление (при определенных условиях) некоторого действия, результат которого нельзя предсказать заранее.

Определение 1.2. Всякий возможный результат случайного эксперимента S (опыта) будем называть ***элементарным исходом*** или ***элементарным событием*** и обозначать ω.

Элементарными исходами могут быть:

• выпадение «герба» (Г) или «решки» (P) при бросании монеты;

• время ожидания нужного трамвая при приходе на трамвайную остановку в случайный момент времени;

• моменты поступления телефонных вызовов на автоматическую телефонную станцию (АТС) в течение времени T.

Определение 1.3. Множество всевозможных взаимоисключающих друг друга элементарных исходов ω данного эксперимента называется его ***пространством элементарных исходов*** и обозначается Ω.

Пространство элементарных исходов (ПЭИ) будем считать заданным, если указаны все его элементы. Структура ПЭИ зависит от характера случайного эксперимента S. По числу элементов различают ПЭИ с конечным, счетным и бесконечным[1] множеством элементов.

Пространство элементарных исходов Ω с конечным или счетным множеством элементов будем обозначать соответственно $\Omega = \{\omega_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ или $\Omega = \{\omega_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$, а с бесконечным — $\Omega = \{\omega \mid \omega \in (0; t)\}$.

Замечание 1.1. ПЭИ представляет собой математическую модель случайного эксперимента и является первым шагом в формировании понятия вероятностной модели случайного явления.

Определение 1.4. ПЭИ с конечным или счетным числом элементарных исходов называется ***дискретным***.

Рассмотрим примеры.

Пример 1.1. Эксперимент состоит в подбрасывании монеты. Возможные результаты эксперимента (элементарные исходы): ω_1 = {выпал Г}, ω_2 = {выпала P}. Таким образом, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\} = \{\text{Г}, \text{Р}\}$.

Пример 1.2. Эксперимент состоит в одновременном подбрасывании 10 монет. Результат эксперимента $\omega_i = (x_1, x_2, ..., x_{10})$, где $x_i = \{\text{Г}\}$ или $\{P\}$. Общее число элементарных исходов равно 2^{10}. ПЭИ имеет вид $\Omega = \{\omega_i \mid \omega_i = (x_1, ..., x_{10}), x_i - \{\Gamma\}$ или $\{P\}\}$.

Пример 1.3. Эксперимент: бросается игральная кость. Результат эксперимента w_i = {выпало i очков}, $i = 1, ..., 6$. Следовательно, $\Omega = \{\omega_i \mid \omega_i =$ {выпало i очков}, $i = 1, ..., 6\}$.

Пример 1.4. Эксперимент заключается в регистрации вызовов на АТС большого города в течение времени T. Так как верхнюю границу числа зарегистрированных вызовов на АТС установить практически невозможно, то принято считать, что ω_i = {зарегистрировано i вызовов на АТС в течение времени T}, $i = 0, 1, 2, \ldots$. В этом случае ПЭИ

$\Omega = \{\omega_i \mid \omega_i =$ {зарегистрировано i вызовов в течение времени T}, $i = 0, 1, 2, ...\}$

счетно.

Пример 1.5. Эксперимент: длительность горения электрических ламп t. Результат эксперимента — $\omega = t$. Таким образом, ПЭИ имеет вид $\Omega = \{\omega = t \mid t \in [0; T]\}$. В этом случае пространство элементарных событий состоит из бесконечного числа исходов.

Пример 1.6. Эксперимент: подбрасывание трех монет. Результат $\omega_i = (x_1, x_2, x_3)$, где x_1, x_2, x_3 — {Г} или {Р}. Тогда $\Omega = \{\omega_i \mid \omega_i = (x_1, x_2, x_3), x_i \in \{\text{Г}\} \cup \{\text{Р}\}, i = 1, 2, 3\}$, $|\Omega| = 2^3 = 8$.

Иначе можно записать

$$\Omega = \{(\text{Г, Г, Г}), (\text{Г, Г, Р}), (\text{Г, Р, Г}), (\text{Г, Р, Р}), (\text{Р, Г, Г}), (\text{Р, Г, Р}), (\text{Р, Р, Г}), (\text{Р, Р, Р})\}.$$

Множество A = {(ГГГ), (ГГР), (ГРГ), (РГГ)} является случайным событием, состоящим в том, что выпадет не менее двух гербов. Событие A происходит, если осуществляется одна из этих четырех комбинаций.

[1] Счетное множество формально тоже содержит бесконечное число элементов, но мы будем использовать понятие «бесконечное множество» только применительно к непрерывному случаю.

Таким образом, A является подмножеством Ω. Следовательно, можно дать следующее определение.

Определение 1.5. ***Случайным событием*** называется *любое* подмножество ПЭИ.

Для обозначения случайного события используются буквы $A, B, C, D, E, \ldots$.

Тогда ясно, что событие A произошло, если произошел какой-то один элементарный исход, принадлежащий A, т.е. всякое событие состоит из тех элементарных исходов, с появлением одного из которых оно происходит.

Так как под случайным событием мы понимаем *любое* подмножество Ω, то и само Ω является случайным событием и называется *достоверным.* Таким образом, ***достоверное событие*** — это событие, которое всегда происходит.

Пример 1.7. Эксперимент: бросание кости. Событие, заключающееся в выпадении не более 6 очков — достоверное событие.

Определение 1.6. Событие, не содержащее ни одного элементарного исхода ПЭИ Ω, называется ***невозможным*** и обозначается $\varnothing$.

Ясно, что такое событие никогда не происходит. Например, выпадение числа очков больше 6 при бросании кости — невозможное событие.

Так как случайные события мы отождествили с подмножествами ПЭИ, то операции над множествами позволяют ввести аналогичные соотношения между событиями.

Определение 1.7. ***Объединением***, или ***суммой***, двух событий A и B называется событие, состоящее из элементарных исходов, входящих или в A, или в B, или в A и B одновременно (обозначение $A \cup B$):

$$A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}.$$

Таким образом, событие $A \cup B$ происходит тогда, когда происходит либо событие A, либо событие B, либо оба события A и B.

Определение 1.8. ***Произведением***, или ***пересечением***, событий называется событие, состоящее из элементарных исходов, принадлежащих как событию A, так и событию B одновременно (обозначение — $A \cap B$ или AB):

$$A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}.$$

Таким образом, событие $A \cap B$ происходит тогда, когда происходят события и A, и B одновременно.

Определение 1.9. Говорят, что события A и B ***несовместны***, если $A \cap B = \varnothing$.

Замечание 1.2. Операции объединения и пересечения можно определить для любого числа событий $A_1, \ldots, A_n$.

Определение 1.10. ***Разностью*** двух событий A и B называют событие, состоящее из элементарных исходов, которые входят в A, но не входят в B:

$$A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A, \text{ но } \omega \notin B\}.$$

Определение 1.11. Событие $\overline{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если оно является дополнением A до Ω, т.е. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \mid \omega \notin A\}$.

Можно дать другое определение.

Определение 1.11′. Событие $\overline{A}$ называется ***противоположным*** событию A, если $A \cup \overline{A} = \Omega$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

Если при каждом элементарном исходе, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что событие A влечет за собой событие B (обозначение $A \subset B$).

Определение 1.12. События A и B ***равносильны***, если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 1.13. События $A_1, ..., A_n$ образуют ***полную группу*** событий (или ***разбиение*** пространства элементарных исходов Ω), если

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \quad i \neq j, \quad \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$$

Пример 1.8. Эксперимент — бросание двух монет. Пусть A = {ГГ, ГР, РГ}, B = = {РР, ГР, РГ}, тогда $A \cup B = \Omega$, $A \cap B$ = {ГР, РГ}, $\overline{A}$ = {РР}, $\overline{B}$ = {ГГ}, $A \setminus B$ = {ГГ}.

▲ 1.3. Вероятность случайного события. Классическое определение вероятности

Рассмотрим дискретное ПЭИ $\Omega = \{\omega_i, i = 1, 2, ...\}$.

Каждому элементарному исходу $\omega_i \in \Omega$ поставим в соответствие неотрицательное число $p(\omega_i) \geq 0$, назвав его вероятностью элементарного исхода, такое что $\sum\limits_{\omega_i \in \Omega} p(\omega_i) = 1$.

Пусть A — произвольное случайное событие из Ω.

Определение 1.14. ***Вероятностью случайного события*** A в случае дискретного ПЭИ называется число $P(A)$, определяемое формулой

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i). \tag{1.1}$$

Если $A = \varnothing$, то по определению $P(A) = 0$.

Таким образом, вероятность случайного события A в случае дискретного ПЭИ равна сумме вероятностей тех элементарных исходов, которые входят в A. Введенная с помощью формулы (1.1) вероятность случайного события не позволяет непосредственно вычислять вероятности, так как непонятно какое числовое значение назначить элементарным исходам. Поэтому рассмотрим случай, когда Ω состоит из конечного числа элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$, при этом предположим, что все элементарные исходы равновероятны, т.е. $p(\omega_1) = p(\omega_2) = ... = p(\omega_n)$. Так как $\sum\limits_{i=1}^{n} p(\omega_i) = 1$, то $p(\omega_i) = \dfrac{1}{n}, i = 1, 2, ..., n.$

Пусть событие A состоит из m элементарных исходов $A = \{\omega_{j_1}, ..., \omega_{j_m}\}$. Тогда согласно формуле (1.1) имеем

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) = \sum_{k=1}^{m} p(\omega_{j_k}) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}.$$

Такое определение вероятности случайного события носит название ***классического определения вероятности***.

Определение 1.15. Если ПЭИ Ω — конечно, и все элементарные исходы равновероятны, то ***вероятностью случайного события*** A называется число, равное отношению числа элементарных исходов, входящих в A, к общему числу элементарных исходов ПЭИ.

Пример 1.9. Из партии в 100 деталей, среди которых 5 бракованных, наудачу выбирается 1 деталь. Определим вероятность того, что эта деталь годная. Обозначим A = {выбрана годная деталь}. Тогда $P(A) = 95/100$.

Пример 1.10. Бросается игральная кость. Найдем вероятность того, что выпадет четное число очков:

$$\Omega = \{\omega_1 = \{1\}, \omega_2 = \{2\}, ..., \omega_6 = \{6\}\};$$

$$A = \{\omega_2 = \{2\}, \omega_4 = \{4\}, \omega_6 = \{6\}\};$$

$$P(A) = 3/6 = 1/2.$$

Таким образом, при классическом определении вероятности вычисление вероятности некоторого события A сводится к подсчету числа элементарных исходов. Задача подсчета облегчается, если воспользоваться комбинаторными методами, которые мы рассмотрим ниже. А сейчас остановимся на *свойствах вероятностей*, непосредственно следующих из определения вероятности.

1. $P(\varnothing) = 0$; $P(\Omega) = 1$.

2. Для $\forall A \subset \Omega$ $0 \le P(A) \leqslant 1$.

Эти свойства непосредственно следуют из определения вероятности (1.1).

3. Если $A \cap B = \varnothing$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Действительно,

$$P(A \cup B) = \sum_{\omega_i \in A \cup B} p(\omega_i) = \sum_{\omega_i \in A} p(\omega_i) + \sum_{\omega_i \in B} p(\omega_i) = P(A) + P(B).$$

4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Так как $A \cup \overline{A} = \Omega$ и $A \cap \overline{A} = \varnothing$, то согласно свойствам 1 и 3

$$P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) \Rightarrow P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

5. Если $A \subset B$, то $P(A) \le P(B)$.

Действительно,

$$B = A \cup (B \setminus A) \Rightarrow P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \ge P(A).$$

6. Если A, B — любые события из Ω, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Так как $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$, то $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A)$. Аналогично $B = (B \setminus A) \cup (AB)$, откуда $P(B) = P(B \setminus A) + P(AB)$. Следовательно, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

Замечание 1.3. Свойство 6 называют ***формулой сложения вероятностей***.

7. Если $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий (разбиение Ω), то

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} H_j) = \sum_{j=1}^{n} P(H_j) = 1.$$

Так как $H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n = \Omega$, то $p(H_1 \cup \ldots \cup H_n) = P(\Omega) = 1$. Так как $H_i \cap H_j = \varnothing, i \neq j$, то $P(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

▲ 1.4. Основные понятия комбинаторики

Для решения задач с использованием классического определения вероятности остановимся вкратце на основных правилах и понятиях комбинаторики.

Правило суммы. Если некоторый элемент a может быть выбран из совокупности элементов m способами, а другой элемент b может быть выбран n способами, то выбрать либо a, либо b можно $m + n$ способами.

Пример 1.11. В автосалон «Антилопа Гну» поступило 100 автомобилей одной марки «Форд», среди которых 30 автомобилей с автоматической коробкой передач и кондиционером и 20 с механической коробкой передач, но с климат-контролем. Остальные автомобили имеют другую комплектацию. Сколько существует способов извлечь случайно из этой партии автомобилей автомобиль с автоматической коробкой передач и кондиционером или автомобиль с механической коробкой передач, но с климат-контролем?

Решение. Автомобиль с автоматической коробкой передач и кондиционером может быть извлечен $m = 30$ способами, а с механической коробкой передач, но с климат-контролем — $n = 20$ способами. По правилу суммы существует $m + n = 30 + 20 = 50$ способов извлечения одной автомашины первого или второго вида.

Лемма 1.1. Из m различных элементов одной группы $(a_1, \ldots, a_m)$ и n различных элементов другой группы $(b_1, \ldots, b_n)$ можно составить ровно $m \cdot n$ различных пар вида (a_i, b_j), содержащих по одному элементу из каждой группы.

Доказательство

Составим из этих пар матрицу, содержащую m строк и n столбцов, так, чтобы пара (a_i, b_j) стояла на пересечении i-й строки и j-го столбца, тогда каждая пара встретится только один раз.

Замечание 1.4. Лемма 1.1 определяет так называемое ***правило произведения*** комбинаторики.

Пример 1.12. В колоде карты имеем: мастей — 4, значений — 9 или 13, следовательно, всего различных карт $4 \cdot 9 = 36$ или $4 \cdot 13 = 52$.

Пример 1.13. Из пункта A в пункт B ведет 5 дорог, а из пункта B в пункт C — 3 дороги. Тогда число возможных путей из A в C будет $5 \cdot 3 = 15$.

Обобщим лемму 1.1 на k групп различных элементов.

Лемма 1.2. Пусть дано k групп различных элементов: 1-я группа — $a_{11}, ..., a_{1n_1}$, 2-я группа — $a_{21}, ..., a_{2n_2}$, ..., k-я группа — $a_{k1}, ..., a_{kn_k}$. Тогда можно образовать ровно $N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ различных комбинаций вида $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{kj_k})$, содержащих по одному элементу из каждой группы.

Доказательство. Доказательство проводится методом математической индукции. При $k = 2$ эта лемма превращается в предыдущую. Предположим, что утверждение выполняется при $k = l$, т.е. можно образовать $M = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_l$ различных комбинаций $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{lj_l})$. Докажем, что для $k = l + 1$ существует $N = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{l+1}$ различных комбинаций вида $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{lj_l}, a_{l+1, j_{l+1}})$. Каждую такую комбинацию можно представить как пару $(a_{1j_1}, a_{2j_2}, ..., a_{lj_l})$ и $a_{l+1, j_{l+1}}$.

Число элементов первой из этих двух групп $M = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_l$, и по лемме 1.1 имеем

$$N = M \cdot n_{l+1} = n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_{l+1}.$$

Рассмотрим конечное множество, состоящее из различных элементов, например шаров, занумерованных от 1 до n. Из элементов данного множества можно образовать различные комбинации по k ($k \le n$) элементов, выбирая элементы определенным образом. Различают два способа выбора: ***выбор с возвращением*** и ***выбор без возвращения***. При выборе с возвращением эксперимент заключается в том, что на каждом шаге выбранный шар возвращается обратно, т.е. один и тот же шар может быть выбран более одного раза. В случае выбора без возвращения выбранный шар обратно не возвращается, так что каждый шар может быть выбран только один раз, т.е. комбинация не содержит повторяющихся номеров шаров.

Если в комбинации существенен порядок следования элементов (номеров шаров), то набор называют ***упорядоченным***, в противном случае — ***неупорядоченным***.

Определение 1.16. Упорядоченные наборы без возвращения назовем ***размещениями***. Число различных размещений, которые можно образовать, выбирая k элементов из n, будем обозначать A_n^k.

Определение 1.17. Размещения из n элементов по n называются ***перестановками***. Число различных перестановок обозначается P_n.

Определение 1.18. Неупорядоченные наборы без возвращения называются ***сочетаниями***. Число различных сочетаний, которое можно образовать из n элементов по k, обозначается C_n^k или $\binom{n}{k}$.

Определим число комбинаций, которое можно получить, выбирая k элементов из n различными способами. При выборе с возвращением каждый из k элементов комбинации может быть выбран n различными способами, поэтому по лемме 1.2 при $n_1 = n_2 = ... = n_k = n$ получаем, что число возможных комбинаций равно $N = n^k$. При этом существенен порядок элементов в наборе.

Пример 1.14. Бросание двух костей — выбор из m = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Учитываем порядок — 1-й элемент — число очков на первой кости, 2-й элемент — число очков на второй кости. Тогда $N = 6 \cdot 6 = 36$.

В случае выбора без возвращения первый элемент может быть выбран n способами, 2-й — $(n-1)$, ..., k-й — $(n-k+1)$ способами. Тогда по лемме 1.2 число комбинаций равно $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$. При этом существенен порядок элементов в наборе, т.е. число возможных размещений:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Отметим частный случай, когда $k = n$. В этом случае

$$P_n = A_n^n = n!,$$

т.е. число возможных перестановок из n различных элементов равно $n!$. Используя этот факт, мы можем получить число возможных неупорядоченных наборов без возвращения. Действительно, каждому набору из k различных элементов $(x_1, ..., x_k)$ отвечает $k!$ различных упорядоченных наборов, т.е. число неупорядоченных наборов в $k!$ раз меньше числа упорядоченных наборов без возвращения, т.е. число различных сочетаний

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Неупорядоченные наборы с возвращением подсчитываются сложнее, и мы приведем их число без вывода.

Таким образом, можно составить следующую итоговую таблицу:

Набор / Выбор	Упорядочен	Неупорядочен
С возвращением	n^k	C_{n+k-1}^k
Без возвращения	A_k^k	C_n^k

Остановимся на некоторых *свойствах сочетаний*, которые могут понадобиться в дальнейшем:

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$;

2) $C_n^1 = C_n^{n-1} = 1$;

3) $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Эти свойства следуют непосредственно из формулы числа различных сочетаний, приведенной выше.

Пример 1.15. На оптовой базе имеется 100 телевизоров, из которых 5 неисправны. В магазин случайным образом отбирается 10 телевизоров. Найдем вероятность того, что 2 из отобранных телевизоров неисправны.

Решение. Эксперимент заключается в выборе 10 телевизоров из 100. Результат эксперимента — $\omega_i = (x_1, x_2, ..., x_{10})$, где $x_1, x_2, ..., x_{10}$ — любые из 100 телевизоров. Очевидно, в данном случае осуществляется выбор без возвращения, и поскольку нас не интересует, в какой последовательности выбираются телевизоры, то наборы неупорядочены. Таким образом, общее число исходов определяется числом сочетаний из 100 по 10, т.е. $|\Omega| = C_{100}^{10}$.

Обозначим через A событие {среди 10 отобранных 2 неисправных}. Благоприятствующими событию A являются исходы, когда из общего числа 5 неисправных телевизоров взято 2 (это можно сделать C_5^2способами), а остальные 8 телевизоров исправны, т.е. они взяты из общего числа 95 исправных (количество способов C_{95}^8). Поэтому число благоприятствующих событию A исходов по лемме 1.1 $|A| = C_5^2 \cdot C_{95}^8$. Искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_{95}^8}{C_{100}^{10}} = \frac{\dfrac{5!}{2!3!}\,\dfrac{95!}{8!87!}}{\dfrac{100!}{10!90!}} = \frac{10\dfrac{95 \cdot 94 \cdot \ldots \cdot 88}{8!}}{\dfrac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 91}{10!}} \approx 0{,}07.$$

Пример 1.16. Найдем вероятность того, что у 25 студентов группы дни рождения приходятся на разные дни.

Решение. Очевидно, элементарные исходы данного случайного эксперимента представляют собой упорядоченные наборы с возвращением, а элементарные исходы, благоприятствующие событию A, представляют собой упорядоченные наборы без возвращения, следовательно,

$$|\Omega| = 365^{25};\ |A| = A_{365}^{25};\ \ P(A) = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}}.$$

Пример 1.17. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найдем вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз.

Решение. Эксперимент — извлечение случайным образом трех карт из 52. Результат эксперимента $\omega_i = (x_1, x_2, x_3)$ — комбинация из трех любых карт из 52. Очевидно, эксперимент определяет неупорядоченный выбор без возвращения. Тогда общее число элементарных исходов — это число сочетаний из 52 по 3, т.е. $|\Omega| = C_{52}^3$.

Пусть событие A = {выбраны тройка, семерка и туз}. Благоприятствующими событию A исходами являются только комбинации из тройки, семерки и туза. Поскольку в колоде содержится по 4 тройки, семерки и туза различных мастей, то каждую из указанных карт можно выбрать 4 способами. По лемме 1.2 $|A| = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^3$.

Следовательно, искомая вероятность

$$P(A) = \frac{4^3}{C_{52}^3} = \frac{4^3}{\dfrac{52!}{3!49!}} = \frac{4^3}{\dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50}{6}} \approx 0{,}0029.$$

Пример 1.18. Слово «СТАТИСТИКА» составлено из карточек, на каждой из которых написана одна буква. Затем карточки перемешивают и наудачу раскладывают в ряд. Найдем вероятность того, что вновь получится слово «СТАТИСТИКА».

Решение. Эксперимент заключается в случайном расположении 10 букв в ряд. Результат эксперимента (элементарный исход) — последовательность из 10 букв. Очевидно, множество элементарных исходов ПЭИ определяется числом перестановок из 10 букв. т.е. $|\Omega| = 10!$.

Пусть событие A = {получится слово «СТАТИСТИКА»}. Благоприятствующими событию A будут исходы, когда получится нужное нам слово. Некоторые буквы в слове «СТАТИСТИКА» повторяются (С — 2 раза, Т — 3 раза, А — 2 раза, И — 2 раза), поэтому возможны перестановки из данных букв, при которых слово не изменится. Число таких перестановок определяет число благоприятствующих событию A исходов и равно $|A| = 2!3!2!2! = 48$.

Таким образом, $P(A) = \dfrac{48}{10!} = \dfrac{1}{75\,600}$.

▲1.5. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности нельзя применять к опыту с бесконечным числом равновероятных исходов. Однако если результат опыта определяется случайным положением точек в некоторой области, при этом любые положения точек в этой области считаются равновероятными, то используют ***геометрическое определение вероятности***. Суть его в следующем. Пусть результат эксперимента определяется случайным положением точки в некоторой области G, причем любые положения точки в данной области равновероятны. Тогда множество точек области G будет представлять собой пространство элементарных исходов, а случайное событие A — некоторое подмножество $g \subset G$. Таким образом, множество элементарных исходов ПЭИ есть множество точек G, а элементарные исходы, благоприятствующие событию A, есть множество точек g. Назовем ***мерой области*** ее длину, площадь и объем в одно-, двух- и трехмерном случае соответственно; при этом меру области G обозначим mes$G$, а g — mes$g$. Тогда по аналогии с классическим определением вероятности вероятность события A определяется равенством

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, g}{\text{mes}\, G}.$$

Вероятности случайных событий, определенные таким образом, получили название *геометрических*.

Замечание 1.5. Обычно элементарные исходы ω будем трактовать как координаты точки в пространствах $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ПЭИ Ω — как ограниченное множество точек пространств $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, а событие A — как некоторую область ПЭИ Ω.

Пример 1.19. Поезда метро идут в данном направлении с интервалом 1 мин. Пассажир в случайный момент времени приходит на станцию метро. Определим вероятность того, что пассажиру придется ждать поезда не более 10 с.

Решение. Эксперимент заключается в случайном приходе пассажира в пределах интервала 1 мин. Таким образом, ПЭИ рассматриваемого эксперимента состоит из точек интервала длительностью 1 мин, так как в данном случае нет никаких оснований считать какой-нибудь один момент прихода пассажира в интервале между поездами более вероятным, чем любой другой. Событие A, состоящее в том, что пассажир ожидает поезда меньше 10 с, состоит из точек интервала длительностью 1 мин, отстоящих от его конца меньше чем на 10 с. Поэтому исходя из геометрического определения вероятности получим

$$P(A) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}.$$

Пример 1.20 (*задача о встрече*). Предположим, что два студента условились встретиться в определенном месте между 19 и 20 часами. Студент, пришедший первым, ждет второго в течение 15 мин, после чего уходит. Найдем вероятность того, что встреча состоится, если каждый из студентов выбирает момент своего прихода случайно в пределах этого часа и независимо от другого.

Решение. Пусть x — момент прихода студента A, а y — момент прихода студента B. Тогда множество возможных исходов данного эксперимента представляет собой $\Omega = \{\omega \mid \omega = (x, y),\ 19 \leqslant x \leqslant 20,\ 19 \leqslant y \leqslant 20\}$ (рис. 1.1). Встреча состоится, если $|x - y| \le 1/4$, т.е. $A = \{\omega \mid \omega = (x, y),\ |x - y| \le 1/4\}$. Если теперь x и y мы будем считать координатами точки на плоскости, то множество всех возможных исходов есть множество точек квадрата, а заштрихованная область представляет собой множество благоприятных событию A исходов. Поэтому вероятность события A можно определить следующим образом:

$$P(A) = \frac{S_{\text{заштр}}}{S_{\text{кв}}} = \frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2}{1} = \frac{7}{16}.$$

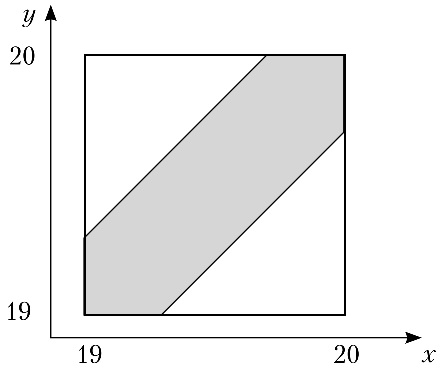

Рис. 1.1. **Задача о встрече**

Пример 1.21. На конвейере происходит сборка изделий из двух комплектующих, поступающих независимыми потоками из двух цехов. Поступления комплектующих равновозможны в любые промежутки времени длиной 30 мин. Конвейер будет остановлен, если разность между моментами поступлений комплектующих будет более 5 мин. Определим вероятность того, что конвейер не будет остановлен.

Решение. Пусть x и y — моменты поступления комплектующих из первого и второго цехов соответственно. По условию задачи $0 \le x \le 30$ и $0 \le y \le 30$. Таким образом, множество всех возможных исходов данного эксперимента — множество точек квадрата площадью $S = 30 \cdot 30 = 900$. Пусть событие A = {конвейер не будет остановлен}. Конвейер будет работать нормально, если разность между моментами поступления комплектующих не будет превышать 5 мин, т.е. событие A состоит из точек (x, y) квадрата, для которых $|x - y| < 5$. Данная область лежит между прямыми $x - y = 5$ и $y - x = 5$. Ее площадь $s = S - (30 - 5)^2 = 900 - 25^2 = 900 - 625 = 275$. Поэтому

$$P(A) = \frac{275}{900} = \frac{11}{36}.$$

■ 1.6. Аксиоматическое определение вероятности

В качестве общего определения вероятности в современной теории вероятностей формулируется ряд аксиом, которым должна удовлетворять вероятность. Эта система аксиом носит название ***аксиомы А. Н. Колмогорова***.

Пусть дано ПЭИ Ω и на нем определена система событий F, причем такая, что $\varnothing \in F$, $\Omega \in F$; если $A, B \in F$, то и $A \cup B \in F$, $A \cap B \in F$, $A \setminus B \in F$.

Определение 1.19. Числовая функция $P(A)$, определенная на системе событий F, называется ***вероятностью***, если выполнены следующие аксиомы:

1) *аксиома неотрицательности*: для $\forall A \in F$ выполнено $P(A) \geq 0$;

2) *аксиома нормированности*: $P(\Omega) = 1$;

3) *аксиома аддитивности:* для $\forall A, B \in F$, таких что $A \cap B = \varnothing$, имеет место равенство $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$;

4) *аксиома счетной аддитивности*: если $A_i \cap A_j = \varnothing$ для $i \neq j$, тогда

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

В этом случае говорят, что тройка (Ω, F, P) задает ***вероятностное пространство***.

▲ 1.7. Условная вероятность. Независимость событий

Определение 1.20. Вероятность события A, вычисленная при условии, что событие B уже произошло, называется ***условной вероятностью*** события A в классической схеме (обозначение $P(A/B)$).

В общем случае эта вероятность определяется равенством

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ P(B) > 0. \tag{1.2}$$

Нетрудно убедиться, что условная вероятность, определяемая равенством (1.2), удовлетворяет аксиомам А. Н. Колмогорова (докажите это самостоятельно).

Обоснуем формулу (1.2) в случае пространства событий с конечным числом исходов, т.е. в случае классической схемы.

Пусть общее число исходов равно n, событию A благоприятствует m_A исходов, событию B — m_B исходов, а совместному событию $A \cap B$ — m_{AB} исходов. Тогда $P(B) = \frac{m_B}{n}$, $P(AB) = \frac{m_{AB}}{n}$. Условная вероятность $P(A/B)$ наступления события A при условии, что событие B произошло, должна вычисляться не по всем n исходам, а только по тем m_B исходам, в результате которых наступит B, т.е.

$$P(A/B) = \frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Аналогично для условной вероятности $P(B/A)$ имеем

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)},\ P(A) > 0. \tag{1.3}$$

Из равенств (1.2) и (1.3) получаем ***формулу умножения вероятностей***:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = P(B) \cdot P(A / B). \tag{1.4}$$

Пример 1.22. Из урны, в которой 10 белых и 5 черных шаров, наудачу извлекаются один за другим два шара. Найдем вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Пусть события A = {первый шар белый}, а B = {второй шар белый}. Тогда $P(A) = 10/15 = 2/3$; $P(B/A) = 9/14$.

По формуле (1.4) получаем

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B / A) = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{14} = \frac{3}{7}.$$

Пример 1.23. Имеется две партии изделий, брак среди которых составляет 3 и 5% соответственно. Из обоих партий наудачу извлекают по одному изделию. Найдем вероятность того, что оба изделия будут бракованные или оба годные.

Решение. Пусть A = {оба изделия бракованные или годные}, B = {оба изделия годные}, C = {оба изделия бракованные}. Тогда $A = B \cup C$ и, так как события B и C несовместные, $P(A) = P(B) + P(C) = 0{,}97 \cdot 0{,}95 + 0{,}03 \cdot 0{,}05 = 0{,}9215 + 0{,}0015 = 0{,}923$.

Пример 1.24. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называются валет, дама или король)?

Решение. Пусть A = {фигура любой масти или карта пиковой масти}, B = {фигура любой масти}, C = {карта пиковой масти}. Тогда $A = B \cup C$. Но события B и C совместны, так как в колоде имеются фигуры пиковой масти.

Следовательно, $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC)$.

Поскольку в колоде из 52 карт имеется 12 фигур, 13 карт пиковой масти и 3 фигуры пиковой масти, то

$$P(B) = \frac{12}{52};\ P(C) = \frac{13}{52}; P(BC) = \frac{3}{52}.$$

Таким образом, $P(A) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} - \frac{3}{52} = \frac{11}{26}$.

Обобщением формулы (1.4) является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для произвольных событий* $A_1, A_2, ..., A_n$ справедлива ***обобщенная формула умножения***:

$$P(A_1, A_2, ..., A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot ... \cdot P(A_n / A_1, A_2, ..., A_{n-1}).$$

Доказательство

Рассмотрим два события B = $B = A_1 \cdot A_2 \cdot ... \cdot A_{n-1}$ и A_n. Последовательно применим формулу (1.4):

$$P(\underbrace{A_1 A_2 ... A_{n-1}}_{B} \cap \underbrace{A_n}_{A}) = P(A_1 A_2 ... A_{n-1}) \cdot P(A_n / A_1 ... A_{n-1}) =$$

$$= P(A_1 ... A_{n-2}) \cdot P(A_{n-1} / A_1 ... A_{n-2}) \cdot P(A_n / A_1 ... A_{n-1}) = ... =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot ... \cdot P(A_{n-1} / A_1 ... A_{n-2}) \cdot P(A_n / A_1 ... A_{n-1}).$$

Пример 1.25. Предположим, что студент знает 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задает ему три вопроса. Определим, какова вероятность, что он ответит на все три вопроса.

Решение. 1 способ. Введем следующие обозначения:

A = {студент ответит на все 3 вопроса};