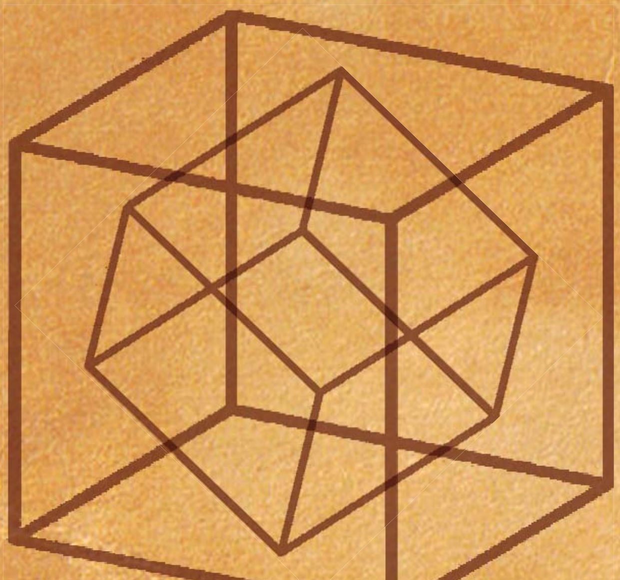
А. С. Кутузов

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА



DirectMEDIA

А. С. Кутузов

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Учебное пособие

DirectMEDIA
Москва-Берлин
2014

УДК 517.987.5
ББК 22.152
К95

Одобрено учебно-методической комиссией Троицкого филиала ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»
Направления подготовки: 010400 – Прикладная математика и информатика, 010300 – Фундаментальная информатика и информационные технологии
Рецензент:
В.Н. Павленко, д.ф.-м.н., профессор кафедры вычислительной математики ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный университет»

Кутузов, А. С.

К95 Метрические пространства : учебное пособие / А. С. Кутузов. – М.-Берлин: Директ-Медиа, 2014. – 106 с.

ISBN 978-5-4475-2322-0

Учебное пособие составлено на основе УМК дисциплины «Функциональный анализ». В пособии изложен теоретический и практический материал по теме «Метрические пространства». Пособие отличает конспективная краткость и простота изложения. Решение наиболее сложных задач дано в качестве примеров, ко многим задачам для самостоятельного решения даны указания.

Учебное пособие предназначено для преподавателей и студентов. Может быть использовано для проведения практических занятий и организации самостоятельной работы студентов.

УДК 517.987.5
ББК 22.152

ISBN 978-5-4475-2322-0

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, одним из важнейших понятий в математическом анализе является понятие предельного перехода, лежащего в основе таких фундаментальных операций, как дифференцирование и интегрирование. Более того, в зависимости от рассматриваемых задач в анализе часто вводят разные (но эквивалентные между собой) понятия предела для последовательности одних и тех же математических объектов (вещественные числа, комплексные числа, n-мерные векторы, функции и т.д.). Однако все они связаны в основном лишь тем, что между исследуемыми объектами можно измерять “расстояние”. Это позволяет ввести и изучить свойства предельного перехода независимо от природы элементов, участвующих в этом построении.

Обобщая известное понятие расстояния между двумя вещественными числами, мы естественно приходим к одному из основных понятий современной математики – понятию метрического пространства (оно было введено впервые французским математиком М. Фреше в 1906 г.). Отметим также фундаментальную важность метрических идей в прикладном отношении: всякий вычислительный процесс должен сходиться к искомому результату.

Настоящее пособие представляет собой первую часть курса “Функциональный анализ”, посвященную изучению общих и основных свойств метрических пространств. Структура этого пособия и всех последующих такова: даются теоретические сведения, примеры решения задач, относящихся к данной теории, а также задачи для самостоятельного решения.

1. Понятия метрики и метрического пространства

Определение: пусть X – произвольное множество. Отображение $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой (расстоянием) в X, если оно удовлетворяет следующим условиям (аксиомам метрики):

1. $\rho(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома неотрицательности);
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x) \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
4. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Замечание: напомним, что прямым или декартовым произведением двух множеств X и Y называется множество $X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$.

Определение: множество X, рассматриваемое вместе с заданной на нем метрикой ρ, называется метрическим пространством, а элементы $x, y, z, ... \in X$ – точками (или векторами) этого метрического пространства.

Замечание: иногда метрическое пространство X вместе с заданной на нем метрикой ρ обозначают (X, ρ).

Замечание: всякое подмножество Y метрического пространства X, рассматриваемое с тем же расстоянием между элементами, также является метрическим пространством и называется подпространством пространства X.

Определение: расстоянием между двумя множествами M и N метрического пространства X называется число $\rho(M, N) = \inf\limits_{\substack{x \in M \\ y \in N}} \rho(x, y)$.

Замечание: в частности, расстоянием от точки $a \in X$ до множества $M \subset X$ называется число $\rho(a, M) = \inf\limits_{x \in M} \rho(a, x)$.

Определение: две метрики $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$, введенные на одном и том же метрическом пространстве X, называются эквивалентными, если для произвольной последовательности $\{x_n\} \subset X$ и для элемента $x \in X$ из того, что при $n \to \infty$ $\rho_1(x_n, x) \to 0$ следует, что $\rho_2(x_n, x) \to 0$ и наоборот.

Теорема (достаточное условие эквивалентности метрик): пусть X – метрическое пространство, $\rho_1(x, y)$ и $\rho_2(x, y)$ – две метрики в нем. Пусть существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $\forall x, y \in X$ справедливо неравенство $c_1\rho_1(x, y) \le \rho_2(x, y) \le c_2\rho_1(x, y)$. Тогда метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны.

Замечание: метрики, удовлетворяющие этому условию, называются еще топологически эквивалентными.

Доказательство теоремы предлагается проделать самостоятельно (см. задачу 1).

Примеры решения задач

1. Пусть $X = [1, +\infty)$, $\rho(x, y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x + y}, & \text{при } x \ne y \\ 0, & \text{при } x = y \end{cases}$. Доказать, что ρ – метрика.

Решение: проверим аксиомы метрики.

а) $\rho(x, y) \ge 0$ – очевидно;

б) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ – очевидно;

в) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ – очевидно;

г) проверим, что $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Ясно, что $\rho(x, z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x + z}, & \text{при } x \ne z \\ 0, & \text{при } x = z \end{cases}$, $\rho(y, z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{y + z}, & \text{при } y \ne z \\ 0, & \text{при } y = z \end{cases}$ и

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{x + y}, & \text{при } x \ne y \\ 0, & \text{при } x = y \end{cases} + \begin{cases} 1 + \dfrac{1}{y + z}, & \text{при } y \ne z \\ 0, & \text{при } y = z \end{cases} =$$

$$=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}, & \text{при } x\neq y, y=z \\ 1+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } y\neq z, x=y \\ 2+\dfrac{1}{x+y}+\dfrac{1}{y+z}, & \text{при } x\neq y, y\neq z \\ 0, & \text{при } x=y, y=z \end{cases}$$

Таким образом, надо рассмотреть отдельно четыре случая.

Случай 1: $x\neq y, y=z$, тогда $x\neq z$ и

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=1+\frac{1}{x+y}=1+\frac{1}{x+z}=\rho(x,z).$$

Случай 2: $y\neq z, x=y$, тогда $x\neq z$

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)=1+\frac{1}{y+z}=1+\frac{1}{x+z}=\rho(x,z).$$

Случай 3: $x\neq y, y\neq z$. Здесь возможно два варианта:

Случай 3-а: $x\neq z$ и надо проверить, что $2+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\geq 1+\frac{1}{x+z}$, т.е., что $1+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+z}\geq 0$.

Поскольку по условию $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$, то $x+z\geq 2$, откуда $\frac{1}{x+z}\leq\frac{1}{2}$, т.е. $-\frac{1}{x+z}\geq -\frac{1}{2}$, откуда $1-\frac{1}{x+z}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ и, значит

$$1+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}-\frac{1}{x+z}\geq\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{2}>0.$$

Случай 3-б: $x=z$ и надо проверить, что $2+\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}\geq 0$, но это очевидно, поскольку $x\geq 1$, $y\geq 1$, $z\geq 1$.

Случай 4: $x=y, y=z$, тогда $x=z$ и $\rho(x,y)+\rho(y,z)=0=\rho(x,z)$.

Итак, в любом случае, $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,z)$, т.е. аксиома треугольника доказана.

Таким образом, функция ρ определяет метрику.

2. Пусть X – произвольное множество, а отображение $\rho_1 : X \times X \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

а) $\rho_1(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \ \ \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);

б) $\rho_1(x, y) \le \rho_1(x, z) + \rho_1(y, z) \ \ \forall x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Доказать, что функция ρ_1 определяет метрику в X.

Решение: по определению метрики, достаточно проверить выполнение для функции ρ_1 аксиом неотрицательности и симметрии.

Пусть в условии б) $y = x$, тогда $\rho_1(x, x) \le \rho_1(x, z) + \rho_1(x, z) = 2\rho_1(x, z)$ и, в силу условия а) $2\rho_1(x, z) \ge 0$, откуда $\rho_1(x, z) \ge 0 \ \ \forall x, z \in X$. Условие неотрицательности проверено.

Пусть в условии б) $z = x$, тогда $\rho_1(x, y) \le \rho_1(x, x) + \rho_1(y, x)$ и, в силу условия а) $\rho_1(x, y) \le \rho_1(y, x) \ \ \forall x, y \in X$. Поскольку это неравенство верно для любой пары элементов $x, y \in X$, то справедливо и неравенство $\rho_1(x, y) \ge \rho_1(y, x)$. Откуда $\forall x, y \in X \ \ \rho_1(x, y) = \rho_1(y, x)$ и условие симметрии проверено.

3. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \ge 0 \right\}$ функция, удовлетворяющая условиям:

а) $f(0) = 0$ и $f(x) > 0$ при $x > 0$;

б) $f(x)$ не убывает при $x \ge 0$;

в) $\dfrac{f(x)}{x}$ не возрастает при $x > 0$.

Доказать, что формулой $\rho(x, y) = f\left(\left|x - y\right|\right)$ определяется метрика в $\mathbb{R}$.

Решение: очевидно, что аксиомы неотрицательности, тождества и симметрии выполняются.

Для проверки аксиомы треугольника достаточно показать, что для произвольных $a \ge b > 0$ выполняется неравенство $f(a + b) \le f(a) + f(b)$.

Действительно, поскольку $|x-y| \le |x-z|+|z-y|$ и справедливо условие б), то получаем, что $f\left(|x-y|\right) \le f\left(|x-z|+|z-y|\right)$ и поэтому для доказательства аксиомы треугольника $f\left(|x-y|\right) \le f\left(|x-z|\right)+f\left(|z-y|\right)$ достаточно доказать, что $f\left(|x-z|+|z-y|\right) \le f\left(|x-z|\right)+f\left(|z-y|\right)$.

Ясно, что точки x, y, z можно обозначить таким образом, чтобы $x \ge z \ge y$, тогда если $x-z=a$, $z-y=b$, то $x-y=a+b$. Наконец, осталось переобозначить a и b таким образом, чтобы $a \ge b > 0$ (случай $b=0$ является тривиальным).

Рассмотрим функцию $\varphi(a,b)=f(a)+f(b)-f(a+b)$. Надо доказать, что $\varphi(a,b) \ge 0$. По теореме Лагранжа $\forall \xi \in \left(a, a+b\right)$ справедливо равенство $f(a+b)-f(a)=f'(\xi)(a+b-a)=f'(\xi)b$, откуда

$$\varphi(a,b)=f(a)+f(b)-f(a+b)=f(b)-\left[f(a+b)-f(a)\right]=f(b)-f'(\xi)b.$$

Из условия в) следует, что при $x>0$ $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' \le 0$, т.е. $\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2} \le 0$, откуда $f'(x)x-f(x) \le 0$, т.е., $f'(x) \le \dfrac{f(x)}{x}$, значит, $-f'(\xi) \ge -\dfrac{f(\xi)}{\xi}$ и получаем, что $\varphi(a,b) \ge f(b)-\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot b$.

Поскольку $a<\xi$, то из условия в) следует, что $\dfrac{f(a)}{a} \ge \dfrac{f(\xi)}{\xi}$, значит, $-\dfrac{f(\xi)}{\xi} \ge -\dfrac{f(a)}{a}$ и $\varphi(a,b) \ge f(b)-\dfrac{f(a)}{a}\cdot b=\dfrac{a\cdot f(b)-b\cdot f(a)}{a}$.

Поскольку $a \ge b$, то из условия в) получаем, что $\dfrac{f(a)}{a} \le \dfrac{f(b)}{b}$, откуда $a\cdot f(b)-b\cdot f(a) \ge 0$, значит, $\varphi(a,b) \ge 0$.

4. Пусть X – множество всех алгебраических многочленов степени n на отрезке $\left[0,1\right]$, и если $P(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$, а $Q(t)=\sum\limits_{k=0}^{n} b_k t^k$, то