ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

В. И. АРНОЛЬД

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ НАБЛЮДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКТОВ

МЦНМО
2006

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2005

В. И. Арнольд

Экспериментальное наблюдение математических фактов

Издание второе, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2012

УДК 512.817.3
ББК 22.144
А84

Арнольд В. И.
А84 Экспериментальное наблюдение математических фактов. — М.: МЦНМО, 2012. — 2-е изд., стереотип. — 120 с.
ISBN 978-5-94057-901-4

Книга содержит записи курсов лекций, прочитаных академиком В. И. Арнольдом в 2005 г. в Дубне, на летней школе «Современная математика». В книге рассказывается о нескольких новых направлениях математических исследований, основанных на численных экспериментах.

Первое издание книги вышло в 2006 году.

ББК 22.144

ISBN 978-5-94057-901-4

Оглавление

ПРЕДИСЛОВИЕ

Не достигнув желаемого, они делали вид,
что желали достигнутого.

М. Монтень

В этом курсе лекций я расскажу о нескольких новых направлениях математических исследований. Все они основаны на численных экспериментах. Рассматривая примеры, вроде $5 \cdot 5 = 25$ и $6 \cdot 6 = 36$, мы догадываемся о гипотезах, вроде $7 \cdot 7 = 47$, а дальнейшие эксперименты либо подтверждают их, либо опровергают.

Например, гипотеза Ферма (о неразрешимости при целом $n > 2$ уравнения в натуральных числах $x^n + y^n = z^n$) была подмечена им при попытках найти решения. Эта гипотеза привела к созданию целой науки, но доказана она была только сотни лет спустя.

Бо́льшая часть гипотез, к которым мы придем, пока не доказана (и не опровергнута). Я решился читать эти лекции именно потому, что надеюсь на участие слушателей в исследовании этих вопросов, хотя бы в проведении численных экспериментов (которые сам я провел без компьютера в ограниченной области чисел первого миллиона).

ЛЕКЦИЯ 1

СТАТИСТИКА ТОПОЛОГИИ И АЛГЕБРЫ

Я никогда не слыхал о таком математике: он ведь физик.

Ландау о Пуанкаре

Главное не Шекспир, а примечания к нему.

А. П. Чехов со слов Б. Л. Пастернака

Крупнейший математик Нового времени Пуанкаре делил все проблемы на два класса: бинарные и интересные. Бинарная проблема — это проблема, допускающая ответ «да» или «нет» (как, например, вопрос Ферма).

А интересные проблемы — это те, в которых ответ «да» или «нет» недостаточен, в них нужно исследовать какой-либо вопрос, двигаясь вперед. Например, Пуанкаре интересовался, как можно изменить условия задачи (скажем, краевые условия для дифференциального уравнения), сохраняя существование и единственность решения, или как меняется число решений при других изменениях. Так он создал теорию бифуркаций.

За три года до проблем Гильберта Пуанкаре сформулировал основные, по его мнению, математические проблемы, которые девятнадцатый век оставляет двадцатому. Это — создание математической базы квантовой и релятивистской физики.

Сегодня некоторые думают, что релятивистской физики тогда, в 1897 году, еще не было, так как Эйнштейн опубликовал свою теорию относительности в 1905 году. Но Пуанкаре сформулировал принцип относительности уже в своей статье 1895 года «Об измерении времени», которую Эйнштейн и использовал (о чем он, впрочем, не писал до 1945 года). Точно так же при создании квантовой механики Шрёдингеру удалось добиться успеха только за счет использования предшествовавших математических работ Германа Вейля, о которых впоследствии никто не упоминает, хотя Шрёдингер на них и сослался (в своей первой книге).

§1. Шестнадцатая проблема Гильберта

Хотя я в основном соглашаюсь с Пуанкаре, сегодня я буду говорить о бинарной (или почти бинарной, почему я о ней и буду говорить) проблеме Гильберта, имеющей в его списке номер 16.

Задача эта гораздо старше Гильберта — это вообще один из основных вопросов всей математической науки (и многих ее приложений).

Вот простейший пример: для алгебраического многочлена f от двух переменных x и y рассмотрим кривую, где он обращается в нуль:

$$\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\colon\, f(x,\,y)=0\}.$$

Вопрос состоит в том, *как может быть устроена топологически эта кривая, если f — многочлен фиксированной степени n.*

Например, если $n=2$, то, согласно древней теории конических сечений, кривая — либо эллипс, либо гипербола, либо парабола, либо пара прямых (быть может, сливающихся), либо вся плоскость (если многочлен — тождественный нуль).

Добавляя к плоскости бесконечно удаленные точки, мы превращаем ее в проективную плоскость, от чего задача становится проще (эллипс, гипербола и парабола на проективной плоскости устроены одинаково, различие — только в расположении этой «окружности» по отношению к бесконечно удаленной прямой, см. рис. 1).

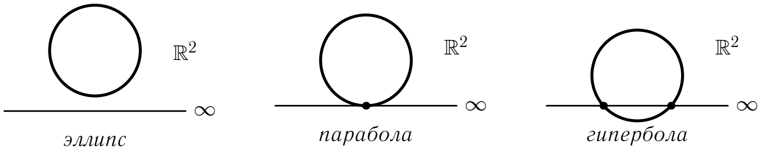

Рис. 1. Конические сечения на проективной плоскости

Для $n>2$ вопрос более труден, но Декарт и Ньютон разобрали случаи $n=3$ и $n=4$. Гильберт утверждал, что он исследовал кривые степени $n=6$, но его результат (доказательство которого он никогда не опубликовал) был ошибочным.

Кривая степени n состоит, согласно теореме Харнака, из не более чем $g+1=\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ связных компонент (где g — род соответствующей римановой поверхности, образованной комплексными решениями уравнения кривой в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$). Всякая замкнутая связная ориентируемая поверхность (согласно основной теореме топологии) представляет собой поверхность рода g, где g — число ручек, которые надо добавить к сфере, чтобы получить эту поверхность (см. рис. 2).

При $n=6$ мы находим род римановой поверхности $g=10$, так что вещественная кривая степени 6 имеет не более 11 компонент (называемых «овалами» и похожих на окружности, во всяком случае диффеоморфных окружности S^1).

Гильберт утверждает, что эти 11 овалов могут быть расположены на (проективной) плоскости $\mathbb{R}P^2$ *только двумя способами.*

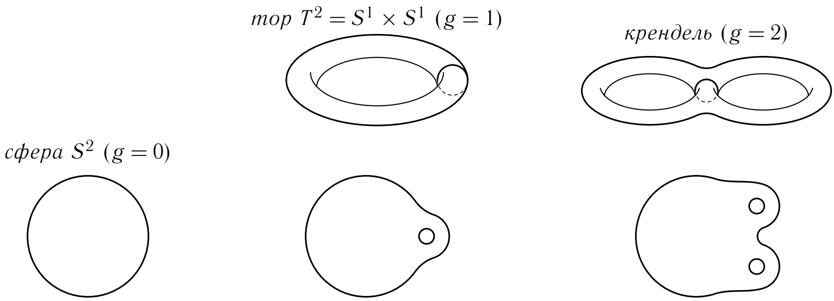

Рис. 2. Поверхности рода 0, рода 1 и рода 2

Каждый овал ограничивает «диск», диффеоморфный кругу (дополнение в $\mathbb{R}P^2$ к этому диску составляет лист Мёбиуса, из-за этого Мёбиусом и открытый).

И вот, Гильберт утверждал, что только один из этих дисков содержит внутри себя другие овалы и что число этих внутренних овалов может принимать *только два значения*: 1 и 9 (рис. 3).

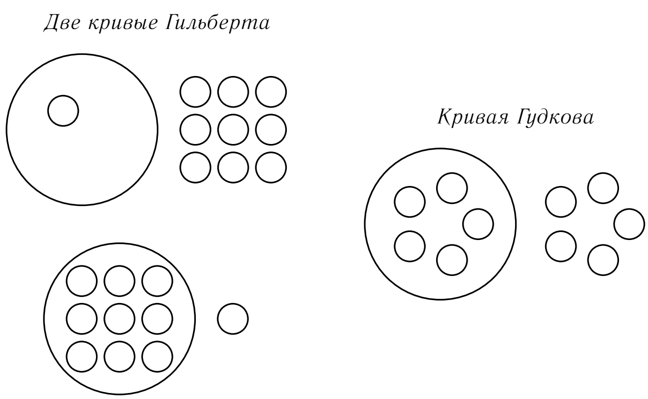

Рис. 3. Алгебраические кривые степени 6 с 11 овалами

Ошибка Гильберта состояла в том, что число внутренних овалов может равняться еще и пяти (это открыл нижегородский математик Дмитрий Андреевич Гудков около 1970 года).

Для кривых степени 8 вопрос Гильберта не решен и сегодня: 22 овала кривой 8 степени могли бы располагаться на плоскости миллиардами различных способов, но найденные сегодня ограничения уменьшают число топологически разных расположений кривых, этих случаев остается менее 90. Число же построенных примеров, хотя и превосходит 70, пока еще не столь велико, как число допускаемых наукой возможностей.

Интересно, что, хотя вопрос и кажется относящимся к вычислительной математике, компьютеры до сих пор не внесли почти никакого вклада в его решение.

Если коэффициенты многочлена известны, то компьютер способен нарисовать расположение овалов соответствующей кривой. Но перечисление *всех* встречающихся возможностей (при всевозможных значениях коэффициентов) — гораздо более трудная задача.

Она тоже алгоритмически разрешима (в смысле математической логики), можно даже, в принципе, найти число связных областей, на которые делит пространство многочленов степени n бифуркационная диаграмма, вблизи которой тип кривой меняется. Но необходимые для этого вычисления столь велики, что никакой прогресс вычислительной техники не позволяет надеяться на компьютерное решение задачи о многочленах степени 8 в обозримое время.

Несколько отвлекаясь от темы сегодняшней лекции, я расскажу об единственном мне известном (и очень недавнем) успехе компьютерной техники в близкой задаче.

Рассмотрим график вещественного многочлена степени n от двух переменных как поверхность, $z = f(x, y)$, в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$.

Около некоторых своих точек эта поверхность локально выпукла (такие точки называются *эллиптическими*), около других — локально седловая (такие точки называются *гиперболическими*, см. рис. 4).

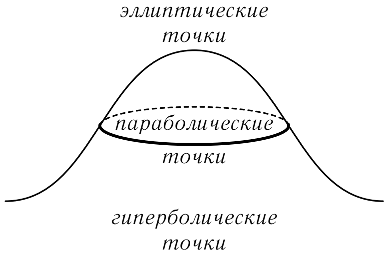

Рис. 4. Параболическая кривая на гладкой поверхности

Эллиптические и гиперболические точки поверхности разделяются линией *параболических точек*.

В терминах частных производных функции f кривая параболических точек задается уравнением

$$\det\begin{vmatrix} \partial^2 f/(\partial x)^2 & \partial^2 f/(\partial x\partial y) \\ \partial^2 f/(\partial y\partial x) & \partial^2 f/(\partial y)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

то есть условием $f_{xx}f_{yy} = (f_{xy})^2$ обращения в нуль гессиана функции f.

Пусть f — многочлен степени n. Спрашивается, *из скольких замкнутых кривых* (*овалов*) *может состоять его параболическая кривая*?

Для многочлена f степени 4 гессиан — тоже многочлен степени 4, поэтому по теореме Харнака число овалов не превосходит $g + 1 = 4$.

Многочлен f степени 4, доставляющий параболическую кривую, состоящую из трех овалов, построить нетрудно (предоставляю это слушателям в виде задачи).

А вот вопрос о том, может ли параболическая кривая многочлена степени 4 состоять из четырех овалов, оказался очень трудным.

Его решила в Мексике в 2005 году Адриана Ортиц-Родригес, защитившая перед этим в Париже, как моя ученица, диссертацию (где для многочленов степени n число овалов параболической кривой оценивалось сверху числом an^2, а снизу числом bn^2, причем $a > b$).

Когда она была еще студенткой (в университете Париж-Жюсьё), то, придя ко мне на семинар, попросила себе задачу. Я сказал, что, чтобы понимать мои задачи, надо решить сперва письменно 100 задач статьи «Математический Тривиум» (Успехи мат. наук. 1991. Т. 46, № 1. С. 225—232). Московские хорошие студенты решают их все за 3 часа.

Адриана принесла мне решения этих задач, но они все оказались неверными. Она попросила неделю на раздумье, и через неделю принесла 10 верно решенных задач. Через 10 недель она решила их все сто и начала разбираться в математике.

Но когда я хотел сформулировать ей научную задачу для самостоятельных размышлений, то Адриана сказала: «Нет, теперь я придумала себе задачу, в стиле Вашего семинара и работ Ваших учеников о лагранжевых особенностях в симплектической геометрии, сама», — и сформулировала обсуждавшийся выше вопрос о параболических кривых.

Я ответил, что убедился теперь, что и в Мексике учат математике так же плохо, как и в Париже (где я довольно хорошо знал, сколь низок уровень знаний студентов).

Неспособность решать задачи тривиума была у Адрианы следствием именно плохого обучения основам математики, которому она подверглась и в Мехико, и в Париже. Ведь и с сообразительностью, и с математическими способностями у нее все было в порядке (как показал ее дальнейший опыт и с «тривиумом», и с параболическими кривыми): после того, как я всему ее обучил своей сотней задач, она стала отличным математиком.

Вопрос о росте числа овалов параболической кривой для многочлена степени n (о сближении постоянных a и b в асимптотических оценках an^2 и bn^2 сверху и снизу) остается открытым и сегодня (почему я включил его в эту лекцию, надеясь, что и здесь найду талантливых учеников).

Что же касается исходного случая $n = 4$, то защитившая в Париже диссертацию Адриана, став профессором в Мехико, получила неограниченное компьютерное время. За год непрерывной работы ЦПУ ее компьютер рассмотрел 50 миллионов многочленов $f(x, y)$ степени 4. У трех из них оказалось по четыре овала в параболической кривой у каждого.

Когда коэффициенты многочлена известны, проверка того, сколько у него овалов в параболической кривой, занимает, даже без компьютера, считанные минуты. Так что из окончательных теорем компьютерный эксперимент можно было бы и выбросить.

Но *найти* эти замечательные многочлены без компьютера никак не удавалось, так что вклад этого компьютерного эксперимента в трудное решение описываемой задачи оказался решающим.

Я надеюсь, что и в обсуждаемых ниже задачах мои слушатели сумеют добиться аналогичных успехов.

Замечание. Прежде чем двигаться дальше, я объясню несколько (использованных выше) вещей, тщательно скрываемых от обучающихся при традиционном псевдо-научном изложении математики.

Определитель («det») матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — это *площадь параллелограмма*, построенного на вектор-столбцах (a, c) и (b, d) (см. рис. 5), считаемая со знаком плюс, если векторы ориентируют плоскость так же, как первый и второй координатные орты (и со знаком минус в противном случае).

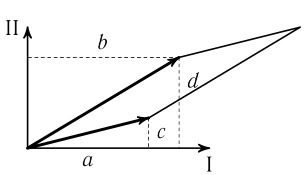

Рис. 5. Ориентированный положительно параллелограмм

Две пары линейно независимых векторов на плоскости *ориентируют ее одинаково*, если их можно соединить непрерывным путем в пространстве упорядоченных пар линейно независимых векторов плоскости.

Разных ориентаций (классов эквивалентности упорядоченных пар векторов на плоскости, упорядоченных реперов из n линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$) — *ровно две* (при любом n). Этот важнейший естественно-научный факт (который только один и объясняет странное правило: «минус на минус дает плюс») обычно скрывают от обучающихся, заменяя всю эту геометрию постулируемой формулой

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc,$$

являющейся, на самом деле, легким *следствием* из приведенных выше топологических фактов (полезно еще отметить *линейную* зависимость определителя от каждого вектор-столбца и его кососимметричность: смену знака при перестановке двух столбцов).

Вторые производные многочлена (или иной гладкой функции) в точке образуют матрицу (порядка m для функций от m переменных), $\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j$.

Определитель этой *матрицы Гессе* функции f называется *гессианом* функции f. Полезно заметить, что знак гессиана функции f совпадает со знаком гауссовой кривизны графика функции f (и, между прочим, не зависит от выбора ориентации пространства, где функция определена). Я не останавливаюсь на этом замечании потому, что оно понятно только тем, кто знаком с гауссовой кривизной — а знакомые с ней легко докажут сделанные выше утверждения о связи гессиана с гауссовой кривизной графика.

Еще одно замечание — о роде g римановой поверхности алгебраической кривой степени n. Мы использовали выше «формулу Римана—Гурвица»

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Например, кривые степени $n=1$ (прямая) и $n=2$ (окружность) имеют род $g=0$, т. е. вещественно диффеоморфны сфере S^2 (называемой также сферой Римана $\mathbb{C} \sqcup \{\infty\}$ или комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$).

Для прямой это ясно, а для окружности следует из ее рациональной параметризации «тангенсом половинного угла» $t = \operatorname{tg}\beta = y/(1+x)$:

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 1. \tag{1}$$

Полезная задача — постараться понять топологическое строение «комплексной сферы», заданной в проективном пространстве, $\mathbb{C}P^3$, аффинным уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Ответ: это четырехмерное многообразие диффеоморфно прямому произведению двух обычных сфер, $S^2 \times S^2$.

Выписанные формулы (1) (доставляющие также «египетские прямоугольные треугольники», $3^2+4^2=5^2$, $5^2+12^2=13^2$ и т. п., а именно $a^2+b^2=c^2$ для $x=a/c$, $y=b/c$, где, согласно (1), при $t=u/v$, $a=v^2-u^2$, $b=2uv$, $c=u^2+v^2$) определяют диффеоморфизм комплексной окружности сфере S^2.

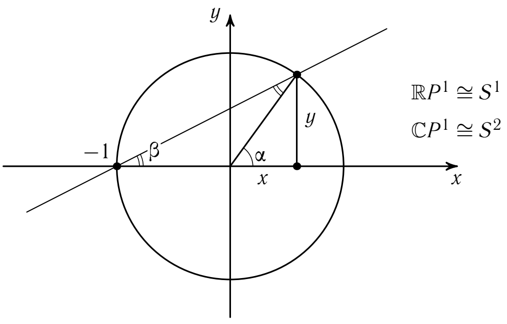

Рис. 6. Рациональная параметризация окружности

Формулы (1) выводятся так (рис. 6). Проведем через точку ($x=-1$, $y=0$) плоскости прямую $\{y=t(x+1)\}$. Подставляя это значение y в уравнение окружности $x^2+y^2=1$, мы получим для абсциссы x точки пересечения прямой с окружностью квадратное уравнение, один корень которого ($x=-1$) нам известен.

Для второго корня теорема Виета доставляет рациональное выражение через t, откуда и получается первая (а затем и вторая) формулы параметризации (1).

Вместо этой алгебры можно было бы воспользоваться геометрическим тождеством $\alpha=2\beta$ теоремы о внешнем угле (равнобедренного треугольника), ведь

$$x=\cos\alpha, \quad y=\sin\alpha, \quad t=\operatorname{tg}\beta.$$

Для знакомых с анализом слушателей отмечу еще, что из той же рациональной параметризации окружности следует явная вычислимость (в элементарных функциях) всех абелевых интегралов вдоль окружности:

$$I=\int\limits_{x^2+y^2=1} R(x,\, y)\,dx,$$

где R — рациональная функция.

Действительно, рациональная параметризация (1) сводит вычисление интеграла I к интегрированию рациональной функции параметра t,

$$I=\int r(t)\,dt.$$

Владимир Игоревич Арнольд

Экспериментальное наблюдение математических фактов

Подписано в печать 09.12.2011 г. Формат 60 × 90 $^1\!/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 7,5. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, Борисовская ул., д. 14.