В. И. Арнольд
Б. А. Хесин

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

МЦНМО

Applied Mathematical Sciences

Vladimir I. Arnold Boris A. Khesin

Topological Methods in Hydrodynamics

With 78 Illustrations

Springer

В. И. Арнольд, Б. А. Хесин

Топологические методы в гидродинамике

Перевод с английского
Дополненное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2007

УДК 517.958:531.32
ББК 22.253.3
А84

Арнольд В. И., Хесин Б. А.

А84 Топологические методы в гидродинамике / Перевод с англ. — М.: МЦНМО, 2007. — 392 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-312-8

Данная книга — это первая монография, в которой топологические, теоретико-групповые и геометрические задачи идеальной гидродинамики и магнитогидродинамики рассматриваются с единой точки зрения. Необходимый подготовительный материал из гидродинамики и чистой математики излагается с большим количеством примеров и рисунков.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и специалистов по чистой или прикладной математике, работающих в таких областях, как гидродинамика, группы Ли, динамические системы и дифференциальная геометрия.

ББК 22.253.3

Translation from the English language edition:
Topological Methods in Hydrodynamics by Vladimir I.Arnold, Boris A. Khesin.

Научное издание

Арнольд Владимир Игоревич, *Хесин Борис Аронович*

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГИДРОДИНАМИКЕ

Подписано в печать 18.06.2007 г. Формат 70 x 100 1/16.
Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 24,5.
Тираж 1000 экз. Заказ № 2003

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495)–241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ОАО «Типография „Новости“»
105005, Москва, ул. Фридриха Энгельса, 46

ISBN 0-387-94947-X (англ.)
ISBN 978-5-94057-312-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«...ad alcuno, dico, di quelli, che troppo laconiacamente vorrebbero vedere, nei piu' angusti spazii che possibil fusse, ristretti i filosofici insegnamenti, si' che sempre si usasse quella rigida e concisa maniera, spogliata di qualsivoglia vaghezza ed ornamento, che e' propria dei puri geometri, li quali ne' pure una parola proferiscono che dalla assoluta necessita' non sia loro suggerita.

Ma io, all'incontro, non ascrivo a difetto in un trattato, ancorche' indirizzato ad un solo scopo, interserire altre varie notizie, purche' non siano totalmente separate e senza veruna coerenza annesse al principale instituto»[1].

Galileo Galilei
«Lettera al Principe Leopoldo di Toscana» (1623)

Гидродинамика относится к небольшому числу фундаментальных проблем математики, успехи в которых могут служить мерилом действительного прогресса математики в целом. Много удивительных достижений в этой области основывается не столько на эксперименте, сколько на глубоких теориях, стимулировавших, в свою очередь, развитие таких областей математики как теория функций комплексного переменного, топология, теория устойчивости, теория бифуркаций, теория вполне интегрируемых динамических систем.

Несмотря на все эти успехи, гидродинамика с ее поразительными эмпирическими законами остается вызовом для математиков. Такие явления как турбулентность еще не имеют строгой математической теории, и даже вопросы существования решений основных уравнений гидродинамики трехмерной жидкости остаются открытыми.

Простейшей, но уже очень содержательной математической моделью гидродинамики является динамика идеальной (несжимаемой и невязкой) однородной жидкости. С математической точки зрения теория такой жидкости есть ни что иное, как изучение геодезических на группе сохраняющих объемы диффеоморфизмов области течения, где группа снабжена правоинвариантной римановой метрикой.

---

[1] «...некоторые предпочитают видеть научные тексты спресованными слишком лаконично в минимальный объем и используют для этого всегда такую строгую и краткую манеру, которой однако не хватает красоты и изящества и которая так популярна среди чистых геометров, не произнесущих и одного слова, если только оно не вызвано абсолютной необходимостью.

Я же, напротив, не считаю недостатком трактата, хотя бы и посвященного одной цели, вставлять в него всевозможные дополнительные замечания там, где они уместны и соответствуют главной цели». Галилео Галилей [Gal].

В 1765 году Л. Эйлер [Eul] опубликовал уравнения движения твердого тела, носящие его имя. Эйлеровские движения твердого тела являются геодезическими на группе вращений трехмерного евклидова пространства. Группа вращений при этом снабжена левоинвариантной римановой метрикой, и теория Эйлера, в сущности, использует только это одно обстоятельство. Уравнения Эйлера сохраняют силу для произвольной группы. Для других групп также получаются «уравнения Эйлера» — например, уравнения движения твердого тела в многомерном пространстве, уравнения Эйлера гидродинамики идеальной жидкости и т. д.

Теоремы Эйлера об устойчивости вращения вокруг большой и вокруг малой осей эллипсоида инерции твердого тела также имеют аналоги в случае произвольной группы. В случае гидродинамики эти аналоги доставляют нелинейные обобщения теоремы Рэлея об устойчивости двумерных течений без точек перегиба профиля скоростей.

Описание течений идеальной жидкости при помощи геодезических правоинвариантной римановой метрики позволяет применить к исследованию этих течений методы римановой геометрии. Для этого нет необходимости строить сколько-нибудь последовательную теорию бесконечномерных римановых многообразий (что связано со значительными аналитическими трудностями, например, из-за отсутствия теорем существования решений соответствующих дифференциальных уравнений).

Стратегия применения геометрических методов к бесконечномерным задачам состоит скорее в том, чтобы, установив какие-либо факты в конечномерной ситуации (для геодезических инвариантных метрик на конечномерных группах Ли), использовать их, чтобы *сформулировать* соответствующие факты в бесконечномерном случае групп диффеоморфизмов. Доказательства этих окончательных результатов часто можно затем сделать строгими, минуя трудные вопросы обоснования промежуточных результатов (вроде продолжимости решений на нужный отрезок времени). Получаемые на этом пути результаты носят характер *априорных* утверждений: те или иные тождества или неравенства имеют место при любом разумном понимании решений всякий раз, когда нужное решение существует, но само это существование остается под вопросом.

В частности, мы выведем формулы для римановой кривизны группы, снабженной инвариантной римановой метрикой. Применяя эти формулы к случаю бесконечномерного многообразия, геодезическими которого являются движения идеальной жидкости, мы находим, что риманова кривизна во многих случаях отрицательна. Отрицательность кривизны влечет неустойчивость движения по геодезическим (как это хорошо известно из геометрии конечномерных римановых многообразий).

Применяя этот результат к (бесконечномерному) случаю групп диффеоморфизмов, мы приходим к выводу, что движение идеальной жидкости *неустойчиво* (в том смысле, что небольшое изменение начальных условий вызывает со временем большое изменение перемещений частиц). Более того, формулы для кривизны позволяют оценить величину показателя экспоненциального расхождения движений с близкими начальными условиями, а следовательно, и время, после которого движение масс жидкости становится принципиально непредсказуемым.

Например, в простейшей идеализированной модели атмосферы (рассматриваемой как двумерная идеальная жидкость на поверхности тора) отклонения возрастают за два месяца в 10^5 раз. Ясно, что уже одно это обстоятельство делает динамический прогноз погоды на такое время практически невозможным (независимо от того, насколько мощные компьютеры и сколь густая сеть данных для этого используется).

Мы попытались сделать главы книги независимыми друг от друга, насколько это возможно. Ссылки внутри одной и той же главы не содержат ее номер. Для первого знакомства с предметом мы адресуем читателя к следующим параграфам в соответствующих главах: § 1–5 и § 12 гл. I, § 1 и § 3–4 гл. II, § 1–2 и § 4 гл. III, § 1 гл. IV, § 1–2 гл. V, § 1 и § 4 гл. VI.

Некоторые утверждения в этой книге могут оказаться новыми даже для специалистов. Отметим классификацию локальных законов сохранения в идеальной гидродинамике (теорема 9.9, гл. I), решение М. Фридмана проблемы Сахарова–Зельдовича о минимизации энергии незаузленного магнитного поля (теорема 3.1, гл. III), обсуждение конструкции инвариантов многообразий, основанных на оценках энергии узлов (замечание 2.6, гл. III), обсуждение комплексной версии инвариантов Васильева для зацеплений (гл. III, п. 7.5), замечание Б. Зельдовича о медианах треугольника Лобачевского (задача 1.4, гл. IV), соотношение ковариантной производной векторного поля и оператора инерции в гидродинамике (гл. IV, п. 1.4), отступление об уравнении Фоккера–Планка (гл. V, п. 3.3) и конструкцию динамо при помощи геодезического потока на поверхности постоянной отрицательной кривизны (гл. V, п. 4.4). В русское издание мы также постарались включить ссылки на самые недавние исследования и решения ряда вопросов, поставленных в английском издании этой книги [AKh2]. К их числу относятся описание соотношения между эйлеровой и лагранжевой устойчивостью [Pre], доказательство фредгольмовости экспоненциального отображения на группе диффеоморфизмов в двумерном случае [EbM, EbMP], универсальность уравнения Монжа–Ампера в задачах гидродинамики и оптимального переноса массы [KhM2], решение «проблемы коротких путей» в определении асимптотического инварианта Хопфа [Vog], а также броуновская интерпретация многомерного аналога этого инварианта [Riv, Kh3]. Заметно расширен параграф, написанный А. Шнирельманом, где, в частности, добавлено описание слабых решений двумерного уравнения Эйлера в терминах обобщенных континуальных кос [Shn9]. Многие попрежнему открытые вопросы гидродинамики собраны в книге [Arn26].

* * *

Мы глубоко признательны всем тем, кто помогал нам на разных этапах работы: Ф. Аикарди, М. А. Бергеру, Ж.-Л. Брылински, А. Вайнштейну, О. Я. Виро, М. М. Вишику, В. А. Владимирову, В. Л. Гинзбургу, М. Л. Громову, А. Д. Джилберту, Л. А. Дикому, В. М. Закалюкину, И. С. Захаревичу, Я. Б. Зельдовичу, А. В. Зоричу, В. А. Зоричу, Ю. С. Ильяшенко, К. Кингу, В. В. Козлову, А. Н. Колмогорову, Е. И. Коркиной, О. А. Ладыженской, П. Лауренсу, Ж. Лере, А. М. Лукацкому, М. Ю. Любичу, Д. Мак-Дафф, С. В. Манакову, Дж. Е. Марсдену, А. С. Мищенко, Ю. Мозеру, Р. Монтгомери, Дж. Моро, Х. К. Моффату, Н. А. Некрасову, Ю. А. Неретину, С. П. Новикову, В. Ю. Овсиенко, В. И. Оселедцу, Л. В. Полтеровичу, М. Поляку, Т. С. Ратью, С. Резникову, К. Роже, А. А. Рослому, А. А. Рузмайкину, А. Д. Сахарову, Д. Серру, Я. Г. Синаю, С. Л. Соболеву, Д. Д. Соколову, С. Л. Табачникову, А. Н. Тодорову, Л. Д. Фаддееву, В. В. Фоку, М. Х. Фридману, У. Фришу, К. М. Ханину, М. Хенону, Х. Хоферу, В. Ю. Цейтлину, Е. Цендеру, Ю. В. Чеканову, С. Чилдрессу, Б. З. Шапиро, Л. Шварцу, А. И. Шнирельману, М. А. Шубину, Д. Г. Эбину, Я. М. Элиашбергу, М.-Р. Эрману, В. И. Юдовичу, Л.-С. Янг и многим другим.

Параграф 7 гл. IV был написан А. И. Шнирельманом. Начальный вариант § 5 гл. VI написан Б. З. Шапиро, а замечание 4.11 гл. II — Дж. Е. Марсденом. Мы особенно обязаны О. С. Козловскому и Г. Мисиолеку за многочисленные обсуждения различных тем этой книги и за их многочисленные полезные замечания. О. С. Козловский также сообщил нам свои недавние неопубликованные результаты для нескольких параграфов в гл. V (в частности, для п. 1.2, п. 2.3, п. 3.5).

Мы благодарны А. Мекишу за помощь с рисунками и Д. Крамеру за тщательную правку английской рукописи. Подготовка книги была частично поддержана РФФИ и NSERC.

Борис Хесин сомневается, что этот проект был бы когда-нибудь закончен без неутомимой моральной поддержки его жены Маши в течение всей работы над книгой, казавшейся бесконечной. Он также признателен за гостеприимство Институту Макса Планка в Бонне и Институтам высших исследований в Бюр-сюр-Иветте и в Принстоне.

Русское издание книги было бы невозможным без помощи Т. В. Белокриницкой, В. М. Закалюкина, О. С. Козловского, А. М. Лукацкого, П. Е. Пушкаря, а также Ю. Н. Торхова и С. А. Ботовой. Им всем мы чрезвычайно признательны.

ГЛАВА I

ГРУППОВАЯ И ГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРЫ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ

Группа, с которой мы чаще всего будем иметь дело в гидродинамике — это бесконечномерная группа диффеоморфизмов области течения, сохраняющих элемент объема. Можно также связать интересные системы с другими группами, в частности, конечномерными. Например, обычная теория твердого тела с неподвижной точкой соответствует группе вращений SO(3), в то время как геометрия Лобачевского имеет дело с группой сдвигов и растяжений векторного пространства. Наши конструкции равным образом применимы и к калибровочным группам, используемым в физике. Последние занимают промежуточное положение между группой вращений твердого тела и группами диффеоморфизмов. Эти группы уже бесконечномерны, но еще слишком просты, чтобы служить моделью для гидродинамики.

В этой главе мы изучим геодезические односторонне инвариантных метрик на группах Ли. Принцип наименьшего действия утверждает, что движение таких физических систем, как твердые тела и идеальные жидкости, описывается геодезическими этих метрик, заданных кинетической энергией.

§ 1. Группы симметрий твердого тела и идеальной жидкости

Определение 1.1. Множество G гладких преобразований многообразия M в себя называется *группой*, если:

1) вместе с любыми двумя преобразованиями $g, h \in G$ композиция $g \circ h$ принадлежит G (символ $g \circ h$ означает, что первым применяется h, а затем g);

2) вместе с любым $g \in G$ обратное преобразование g^{-1} также принадлежит G.

Из 1) и 2) следует, что каждая группа содержит тождественное преобразование (единицу) e.

Группа называется *группой Ли*, если G имеет гладкую структуру и операции 1) и 2) являются гладкими.

Пример 1.2. Все вращения твердого тела вокруг начала координат образуют группу Ли SO(3).

Пример 1.3. Диффеоморфизмы некоторой области M, сохраняющие элемент объема, образуют группу Ли. Мы обозначим эту группу $S\mathrm{Diff}(M)$.

Группа $S\mathrm{Diff}(M)$ может рассматриваться как конфигурационное пространство идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей область M. Действительно, течение жидкости определяет в каждый момент времени t отображение g^t области течения на себя (начальное положение любой частицы жидкости переносится в конечное ее положение в момент t). Все конечные положения, т. е. конфигурации системы (или «перестановки частиц»), образуют «бесконечномерное многообразие» $S\mathrm{Diff}(M)$.

Здесь и далее мы рассматриваем только диффеоморфизмы M, которые могут быть связаны непрерывным семейством диффеоморфизмов с тождественным преобразованием. Соответственно, $S\mathrm{Diff}(M)$ обозначает связную компоненту единицы группы всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих объемы.

Кинетическая энергия жидкости (в предположении, что ее плотность равна 1) является интегралом (по области течения) от половины квадрата скорости частиц. Так как жидкость несжимаема, интегрирование может производиться как по элементу объема, состоящему из начальных положений частиц, так и по элементу объема dx, занимаемому частицами в момент t:

$$E = \frac{1}{2}\int\limits_M v^2\,dx,$$

где v является скоростью частицы жидкости: $v(x,t) = \dfrac{\partial}{\partial t}g^t(y)$, $x = g^t(y)$ (y является начальной позицией той частицы, которая в момент t находится в точке x), см. рис. 1.

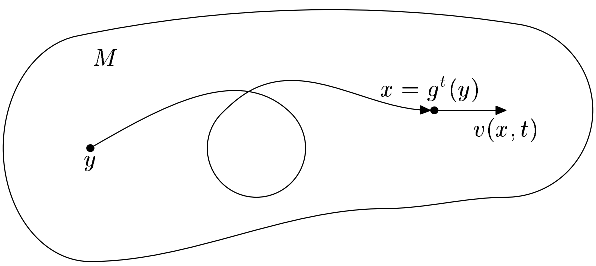

Рис. 1. Движение частицы жидкости в области M

Предположим, что конфигурация g изменяется со скоростью $\dot g$. Вектор $\dot g$ принадлежит касательному пространству T_gG группы $G = S\mathrm{Diff}(M)$ в точке g. Кинетическая энергия является квадратичной формой на векторном пространстве скоростей.

Т е о р е м а 1.4. *Кинетическая энергия несжимаемой жидкости инвариантна по отношению к правым переносам на группе* $G = S\mathrm{Diff}(M)$ (*т. е. по отношению к отображениям* $R_h\colon G \to G$ *вида* $R_h(g) = gh$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножение всех групповых элементов на h *справа* означает, что диффеоморфизм h (сохраняющий элемент объема) действует первым, прежде диффеоморфизма g, меняющегося со скоростью $\dot g$. Такой диффеоморфизм h может рассматриваться как (сохраняющая объем) перенумерация частиц в начальном положении $y = h(z)$. Скорость частицы, занимающей определенное положение в заданный момент времени, не меняется при такой перенумерации, и, следовательно, кинетическая энергия сохраняется. $\square$

Аналогично, кинетическая энергия твердого тела, имеющего неподвижную точку, является квадратичной формой на касательном пространстве к конфигурационному пространству твердого тела, т. е. к многообразию $G = \mathrm{SO}(3)$.

Теорема 1.5. *Кинетическая энергия твердого тела является инвариантной по отношению к левым сдвигам на группе $G = \mathrm{SO}(3)$, т. е. по отношению к преобразованиям $L_h\colon G \to G$, имеющим вид $L_h(g) = hg$.*

Доказательство. Умножение на групповой элемент h *слева* означает, что вращение h применяется *после* вращения g, меняющегося со скоростью $\dot{g}$. Такое вращение h может рассматриваться как поворот всего пространства вместе с вращающимся телом. Этот поворот не меняет длины вектора скорости любой точки тела, и, следовательно, не меняет суммарной кинетической энергии. □

Замечание 1.6. На группе SO(3) (или, в более общем виде, на любой компактной группе) существует двусторонне инвариантная метрика. На бесконечномерных группах, наиболее интересных для гидродинамики, такой римановой метрики не существует. Отметим, однако, что для дву- и трехмерной гидродинамики на соответствующих группах диффеоморфизмов, сохраняющих элемент объема, существуют двусторонне инвариантные невырожденные квадратичные формы на касательных пространствах (см. гл. IV, § 8 для двумерного случая, и гл. III, § 4 и гл. IV, п. 8.4 для трехмерного, где этой квадратичной формой является «спиральность»).

§ 2. Группы Ли, алгебры Ли и присоединенное представление

В этом параграфе мы приведем основные факты из теории групп и алгебр Ли в удобной для нас форме.

Линейная замена координат C переводит матрицу линейного оператора B в матрицу CBC^{-1}. Подобная конструкция существует и для произвольной группы Ли G.

Определение 2.1. Композиция $A_g = R_g^{-1} L_g\colon G \to G$ левого и правого сдвигов, которая переводит любой элемент $h \in G$ в ghg^{-1}, называется *внутренним автоморфизмом* группы G. (Произведение $R_{g^{-1}}$ и L_g может быть взято в любом порядке: все левые сдвиги коммутируют со всеми правыми.) Это произведение действительно является автоморфизмом, так как

$$A_g(fh) = (A_g f)(A_g h).$$

Отображение, переводящее g во внутренний автоморфизм A_g, является групповым гомоморфизмом, так как $A_{gh} = A_g A_h$.

Внутренний автоморфизм A_g оставляет на месте единицу группы. Следовательно, его производная в единице переводит в себя касательное пространство к группе в единице.

Определение 2.2. Касательное пространство к группе Ли в единице называется *векторным пространством алгебры Ли*, соответствующей этой группе.

Алгебра Ли группы G обычно обозначается готической буквой $\mathfrak{g}$.

Пример 2.3. Для группы Ли $G = S\mathrm{Diff}(M)$, образованной диффеоморфизмами области течения M, сохраняющими элемент объема, соответствующая алгебра Ли состоит из бездивергентных векторных полей на M.

Пример 2.4. Алгебра Ли $\mathfrak{so}(n)$ группы вращений $\mathrm{SO}(n)$ состоит из кососимметрических $n \times n$ матриц. Для $n = 3$ векторное пространство кососимметрических матриц является трехмерным. Векторы этого трехмерного пространства называются *угловыми скоростями*.

Определение 2.5. Дифференциал внутреннего автоморфизма A_g в единице группы e называется *оператором* Ad_g *присоединенного действия* (или *присоединенным оператором*) *группы*:

$$\mathrm{Ad}_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \mathrm{Ad}_g a = (A_{g*}|_e)a, \quad a \in \mathfrak{g} = T_eG.$$

(Здесь и ниже мы обозначаем через T_xM касательное пространство многообразия M в точке x, а через $F_*|_x \colon T_xM \to T_{F(x)}M$ производную отображения $F \colon M \to M$ в x. Производная F_* отображения F в x является линейным оператором.)

Операторы присоединенного действия задают представление группы в пространстве своей алгебры Ли, так как

$$\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h.$$

Пример 2.6. Присоединенные операторы группы $S\mathrm{Diff}(M)$ определяют действие диффеоморфизмов на бездивергентных векторных полях на M как действие соответствующих замен координат на многообразии.

Отображение Ad, которое сопоставляет оператор Ad_g элементу группы $g \in G$, может рассматриваться как отображение из группы в пространство линейных операторов на ее алгебре Ли.

Определение 2.7. Дифференциал ad отображения Ad в единице группы называется *присоединенным представлением алгебры Ли*:

$$\mathrm{ad} = \mathrm{Ad}_{*e} \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,\mathfrak{g}, \quad \mathrm{ad}_\xi = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathrm{Ad}_{g(t)},$$

где $g(t)$ является кривой на группе G, выходящей из точки $g(0) = e$ со скоростью $\dot g(0) = \xi$ (рис. 2). Здесь $\mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является пространством линейных операторов, переводящих $\mathfrak{g}$ в себя. Символ ad_ξ обозначает образ элемента ξ из алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при линейном отображении ad. Этот образ $\mathrm{ad}_\xi \in \mathrm{End}\,\mathfrak{g}$ является линейным оператором из $\mathfrak{g}$ в себя.

Пример 2.8. Пусть G — группа вращений пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда

$$\mathrm{ad}_\xi \omega = [\xi, \omega],$$

где $[\xi, \omega] = \xi\omega - \omega\xi$ является коммутатором кососимметрических матриц ξ и ω. В частности, для $n = 3$ вектор $[\xi, \omega]$ оказывается обычным векторным произведением $\xi \times \omega$ векторов угловых скоростей ξ и ω в $\mathbb{R}^3$.

Доказательство. Пусть $t \mapsto g(t)$ — кривая, выходящая из e с начальной скоростью $\dot{g} = \xi$, и пусть $s \mapsto h(s)$ является такой же кривой с начальной скоростью $h' = \omega$. Тогда

$$g(t)h(s)g(t)^{-1} = (e + t\xi + o(t))(e + s\omega + o(s))(e + t\xi + o(t))^{-1} = \\ = e + s[\omega + t(\xi\omega - \omega\xi) + o(t)] + o(s)$$

при $t, s \to 0$. $\square$

Пример 2.9. Пусть $G = \mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов многообразия M. Тогда

$$\mathrm{ad}_v w = -\{v, w\}, \tag{2.1}$$

где $\{v, w\}$ — это скобка Пуассона векторных полей v и w.

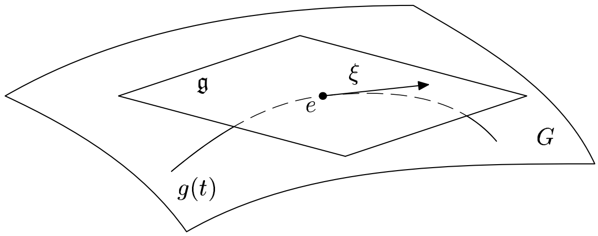

Рис. 2. Вектор ξ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ является скоростью в единице e некоторого пути $g(t)$ на группе Ли G

Скобка Пуассона векторных полей определяется как коммутатор соответствующих дифференциальных операторов:

$$L_{\{v,w\}} = L_v L_w - L_w L_v. \tag{2.2}$$

Линейный дифференциальный оператор первого порядка L_v, связанный с векторным полем v, является производной вдоль этого поля v ($L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ для произвольной функции f и любой системы координат).

Компоненты векторного поля $\{v, w\}$ в произвольной системе координат выражаются через компоненты v и w по формуле

$$\{v, w\}_i = \sum_j v_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} - w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Как следует из вышесказанного, поле $\{v, w\}$ не зависит от системы координат $(x_1, \ldots, x_n)$, используемой в этой формуле.

Оператор L_v (называемый *производной Ли*) действует также на любое тензорное поле на многообразии и определяется как «производная рыбака»: поток несет тензоры мимо рыбака, а рыбак сидит на месте и их дифференцирует. Например, функции переносятся потоком назад, и, следовательно,

$L_v f = \sum v_i \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. Подобным же образом дифференциальные формы переносятся назад, но векторные поля переносятся вперед. Таким образом, для векторных полей мы получаем $L_v w = -\{v, w\}$.

Знак минус входит в формулу (2.1), потому что по традиции знак скобки Пуассона двух векторных полей определяется согласно (2.2) подобно матричному коммутатору. Противоположность знаков в последних двух примерах является следствием тех же причин, что и различие в инвариантности кинетической энергии твердого тела и несжимаемой жидкости: она левоинвариантна для тела и правоинвариантна для жидкости.

Доказательство формулы (2.1). Диффеоморфизмы, соответствующие векторным полям v и w, могут быть записаны (в локальных координатах) в виде:

$$g(t)\colon x \mapsto x + tv(x) + o(t), \quad t \to 0,$$
$$h(s)\colon x \mapsto x + sw(x) + o(s), \quad s \to 0.$$

Тогда мы имеем $g(t)^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t)$, откуда

$$h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x - tv(x) + o(t) + sw(x - tv(x) + o(t)) + o(s) = \\ = x - tv(x) + o(t) + s\Big(w(x) - t\frac{\partial w}{\partial x}v(x) + o(t)\Big) + o(s)$$

и

$$g(t)h(s)(g(t))^{-1}\colon x \mapsto x + s\Big(w(x) + t\Big(\frac{\partial v}{\partial x}w(x) - \frac{\partial w}{\partial x}v(x)\Big)\Big) + o(t) + o(s). \quad \square$$

Пример 2.10. Пусть $G = S\mathrm{Diff}(M)$ — группа диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. Формула (2.1) справедлива и в этом случае, причем все три поля v, w и $\{v, w\}$ являются бездивергентными.

Определение 2.11. *Коммутатор* в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определяется как операция $[\,.\,,\,.\,]\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, которая ставит в соответствие паре векторов a, b касательного пространства $\mathfrak{g}$ (в единице группы Ли G) следующий третий вектор этого пространства:

$$[a, b] = \mathrm{ad}_a b.$$

Касательное пространство в единице группы Ли, снабженное такой операцией $[\,.\,,\,.\,]$, называется *алгеброй Ли группы Ли* G.

Пример 2.12. Коммутатор кососимметрических матриц a и b — это $ab - ba$ (в трехмерном случае это векторное произведение $a \times b$ соответствующих векторов). Коммутатор двух векторных полей — это их скобка Пуассона, взятая с минусом. Коммутатор бездивергентных векторных полей в трехмерном евклидовом пространстве дается формулой

$$[a, b] = \mathrm{rot}(a \times b),$$

где $a \times b$ — векторное произведение. Это следует из более общей формулы

$$\mathrm{rot}(a \times b) = [a, b] + a \,\mathrm{div}\, b - b \,\mathrm{div}\, a$$

и справедливо для произвольного трехмерного риманова многообразия M^3. Последняя формула может быть получена применением формулы гомотопии (см. п. 7.2).

З а м е ч а н и е 2.13. Операция коммутирования в любой алгебре Ли может быть определена следующей конструкцией. Продолжим векторы v и w левоинвариантно на всю группу Ли G. Другими словами, в любой точке $g \in G$ мы определим касательный вектор $v_g \in T_gG$, который является левым сдвигом в точку g вектора $v \in \mathfrak{g} = T_eG$. Мы получим два *левоинвариантных* векторных поля $\tilde{v}$ и $\tilde{w}$ на G. Возьмем их скобку Пуассона $\tilde{u} = \{\tilde{v}, \tilde{w}\}$. Операция взятия скобки Пуассона инвариантна относительно диффеоморфизмов. Следовательно, поле $\tilde{u}$ также *левоинвариантно*, и оно полностью определяется своим значением u в единице группы. Этот вектор $u \in T_eG = \mathfrak{g}$ и можно принять за определение коммутатора в алгебре Ли $\mathfrak{g}$:

$$[v, w] = u.$$

Аналогичная конструкция, использующая *правоинвариантные* поля $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ на группе G, дает нам коммутатор со знаком *минус*.

Т е о р е м а 2.14. *Операция коммутирования* $[\,.\,,\,.\,]$ *является билинейной, кососимметрической и удовлетворяет тождеству Якоби*:

$$[\lambda a + \nu b, c] = \lambda[a, c] + \nu[b, c];$$
$$[a, b] = -[b, a];$$
$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0.$$

З а м е ч а н и е 2.15. Векторное пространство, снабженное кососимметрической билинейной операцией, удовлетворяющей тождеству Якоби, называется *абстрактной алгеброй Ли*. Каждая (конечномерная) абстрактная алгебра Ли является алгеброй Ли некоторой группы Ли G.

К сожалению, в бесконечномерном случае это не так. Это является источником многих трудностей в квантовой теории поля, в теории вполне интегрируемых систем и в других областях, где язык бесконечномерных алгебр Ли заменяет теорию групп Ли (см., например, гл. VI, § 1 об алгебре Вирасоро и об уравнении Кортевега–де Фриза). Можно рассматривать алгебру Ли как первую аппроксимацию к группе Ли, а тождество Якоби представлять как инфинитезимальное следствие ассоциативности группового умножения. В конечномерной ситуации (связная, односвязная) группа Ли может быть реконструирована по ее первой аппроксимации. Однако в бесконечномерном случае попытка такой реконструкции может привести к расходящимся рядам.

Легко проверяется следующая

Т е о р е м а 2.16. *Операторы присоединенного действия* $\mathrm{Ad}_g \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *образуют представление группы Ли* G *автоморфизмами ее алгебры Ли* $\mathfrak{g}$:

$$[\mathrm{Ad}_g\xi, \mathrm{Ad}_g\eta] = \mathrm{Ad}_g[\xi, \eta], \quad \mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g\mathrm{Ad}_h.$$

О п р е д е л е н и е 2.17. Множество образов элемента ξ алгебры Ли под действием всех операторов Ad_g, $g \in G$, называется *орбитой* точки ξ *при присоединенном действии группы* (короче, *присоединенной орбитой точки* ξ).

П р и м е р 2.18. A. Присоединенная орбита матрицы, рассматриваемая как элемент алгебры Ли всех комплексных матриц, есть множество матриц с одной и той же жордановой нормальной формой.

B. Присоединенные орбиты группы вращений трехмерного евклидова пространства являются сферами всевозможных радиусов с центром в начале координат. Само начало координат (сфера нулевого радиуса) является отдельной орбитой.

C. Алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ группы $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ вещественных матриц с определителем, равным единице, состоит из всех 2×2 матриц с нулевым следом:

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$$

с вещественными a, b и c. Матрицы с одной и той же жордановой формой имеют одинаковую величину определителя $\Delta = -(a^2 + bc)$. Присоединенные орбиты в $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ восстанавливаются по этому определителю «почти однозначно», хотя они и меньше, чем в комплексном случае. Орбитами являются связные компоненты квадрик $a^2 + bc = \mathrm{const} \neq 0$, каждая половина конуса $a^2 + bc = 0$ и начало координат $a = b = c = 0$ (см. рис. 3, a).

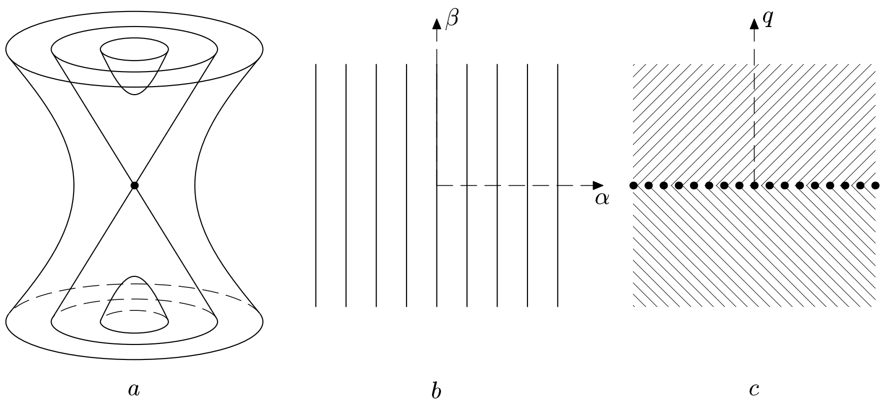

Рис. 3. (a) (Ко)присоединенные орбиты в матричной алгебре $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ являются связными компонентами квадрик. (b) Присоединенные и (c) коприсоединенные орбиты группы аффинных преобразований $\mathbb{R}$

D. Присоединенные орбиты группы $G = \{x \mapsto ax + b\colon a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ аффинных преобразований вещественной прямой $\mathbb{R}$ являются прямыми линиями $\{\alpha = \mathrm{const} \neq 0\}$, двумя лучами $\{\alpha = 0,\ \beta > 0\}$, $\{\alpha = 0,\ \beta < 0\}$ и началом координат $\{\alpha = 0,\ \beta = 0\}$ в плоскости $\{(\alpha, \beta)\} = \mathfrak{g}$ (рис. 3, b).

E. Пусть v является бездивергентным векторным полем на M. Присоединенная орбита поля v для группы $S\mathrm{Diff}(M)$ состоит из бездивергентных векторных полей, полученных из v естественным действием всех диффеоморфизмов области M, сохраняющих элемент объема. В частности, все такие поля являются топологически эквивалентными. Например, они имеют равные чис-