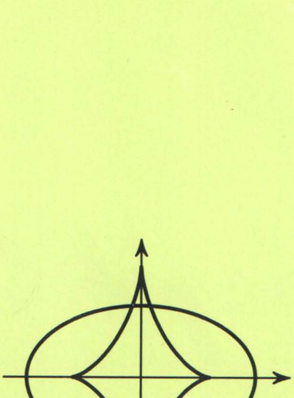
НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. К. ШЕЙНМАН

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ



НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. К. Шейнман

Основы теории представлений

Москва
Издательство МЦНМО
2004

УДК 512.547.2+512.815
ББК 22.1
Ш39

Шейнман О. К.

Ш39 Основы теории представлений. — М: МЦНМО, 2004. — 64 с.

ISBN 5-94057-169-7

Книга представляет собой семестровый вводный курс теории представлений конечных и важнейших компактных групп. Предназначается для студентов математических и физических специальностей, начиная со второго курса.

ББК 22.1

Олег Карлович Шейнман

Основы теории представлений

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 27.09.2004 г.
Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4.
Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-169-7

Предисловие автора

Настоящие лекции представляют собой записки семестрового вводного курса теории представлений, читанного мною в Независимом московском университете в 2002—2004 годах. Они предназначены для студентов начиная со второго курса.

При подготовке этих лекций я придерживался двух правил:

1) представлять общие принципы на простых конкретных примерах;

2) демонстрировать теорию представлений в действии.

Например, в соответствии с первым правилом, я формулирую теорему о существовании инвариантной меры на компактной группе, но вместо доказательства вычисляю ее на группе вращений, которая реально используется ниже. Или демонстрирую унитарный трюк Вейля на примере $\mathrm{SU}(2)$ и $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.

В соответствии со вторым правилом, в лекции о представлениях симметрической группы я привожу выражение рациональных решений уравнения Кадомцева—Петвиашвили через полиномы Шура. Я показываю, что уже простейшие рассмотрения в теории представлений приводят к фундаментальным выводам о строении атома. Кульминацией курса является решение уравнения Шредингера для электрона в центральном поле и вытекающее из него объяснение строения первых периодов таблицы Менделеева.

При подготовке своих лекций я широко пользовался замечательной книгой Э. Б. Винберга «Линейные представления групп». По сравнению с ней я еще более жестко подошел к отбору доказываемых фактов. В то же время я несколько приблизил изложение к классическим книгам И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса и З. Я. Шапиро «Унитарные представления группы вращений и группы Лоренца» и Б. Л. Ван-дер-Вардена «Метод теории групп в квантовой механике». Имеются заимствования из «Фейнмановских лекций по физике».

Я благодарен С. Локтеву за разрешение включить в записки разработанный им цикл задач (см. приложение). Я также благодарю В. Шувалова, сделавшего макет и внесшего многочисленные предложения редакционного характера, а также других сотрудников издательства МЦНМО, внесших ряд улучшений в текст.

О. К. Шейнман. Май 2004 г.

Лекция 1. Общие свойства представлений

1. Основные определения

Пусть G — группа, V — конечномерное комплексное линейное пространство, $\mathrm{GL}(V)$ — группа обратимых операторов в V. *Представлением G в V* называется гомоморфизм $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$. Оператор, отвечающий элементу $g \in G$, называется его *оператором представления* и обозначается $T(g)$ или T_g.

Пусть V_0 — подпространство, инвариантное относительно всех операторов представления T. Тогда ограничения операторов T_g на V_0 образуют представление G в V_0, которое называется *подпредставлением T*. Представление, образованное фактороператорами в пространстве V/V_0, называется *факторпредставлением.* Представление, не имеющее нетривиальных (т. е. отличных от нулевого и от него самого) подпредставлений, называется *неприводимым*; в противном случае — *приводимым.*

Представление называется *разложимым*, если V раскладывается в прямую сумму (нетривиальных) инвариантных подпространств, и *вполне приводимым*, если каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение.

Представление называется *унитарным* относительно заданной невырожденной эрмитовой формы в V, если эта форма инвариантна относительно всех операторов представления (иными словами, все T_g унитарны). Представление называется *унитаризуемым*, если невырожденная инвариантная эрмитова форма существует.

Теорема 1.1. *Унитарные представления вполне приводимы.*

Доказательство. Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству относительно инвариантной эрмитовой формы само инвариантно. $\square$

Теорема 1.2. *Представления конечных групп унитаризуемы и, как следствие, вполне приводимы.*

Доказательство. Пусть E — какая-либо невырожденная эрмитова форма в V. Тогда

$$(x, y) = |G|^{-1} \sum_{g\in G} E(T_g x, T_g y) \tag{1}$$

является *инвариантной* невырожденной эрмитовой формой. $\square$

2. Эквивалентность, морфизмы (сплетающие операторы)

Морфизмом (*сплетающим оператором*) представлений $T_1 : G \to$ $\to \mathrm{GL}(V_1)$ и $T_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$ называется такой оператор $C\colon V_1 \to V_2$, что $CT_1(g) = T_2(g)C$ для любого $g \in G$. Если C является изоморфизмом линейных пространств, то, по определению, он является и изоморфизмом представлений. Аналогично, термины *эндоморфизм*, *автоморфизм* переносятся из категории линейных пространств в категорию представлений. Если изоморфизм существует, представления называются *эквивалентными* (обозначение: $T_1 \cong T_2$). Множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы G обозначим $\widehat{G}$.

Теорема 1.3. *Каждый морфизм неприводимых представлений — либо изоморфизм, либо нулевой оператор.*

Доказательство. Ядро и образ морфизма инвариантны. Следовательно, каждое из них либо является нулевым подпространством, либо совпадает с соответствующим представлением. $\square$

Лемма Шура (Schur). *Каждый эндоморфизм неприводимого представления над $\mathbb{C}$ скалярен.*

Доказательство. Пусть $CT(g) = T(g)C$, и λ — характеристическое значение C. Тогда $(C - \lambda I)T(g) = T(g)(C - \lambda I)$, т. е. $C - \lambda I$ — морфизм. Но $\det(C - \lambda I) = 0$, поэтому $C - \lambda I = 0$ (теорема 1.3). $\square$

Лемма Шура — основной критерий неприводимости в теории представлений. Напротив, основной метод разложения представлений — построение диагонального (но не скалярного) сплетающего оператора.

Следствие. *Пусть T_1 и T_2 — эквивалентные неприводимые представления. Тогда любой изоморфизм T_1 и T_2 имеет вид $\lambda\sigma$, где $\sigma : T_1 \to T_2$ — фиксированный изоморфизм, $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Пусть $\tau : T_1 \to T_2$ — изоморфизм, тогда $\tau\sigma^{-1}$ — автоморфизм T_1, т. е. $\tau\sigma^{-1} = \lambda I$. $\square$

Задача 1.1. *Каждое неприводимое представление абелевой группы одномерно.*

3. Основные операции: $\oplus$, $\otimes$

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление G в W и $V = U \oplus W$. Представление T в V, определенное формулой $T(g)(x \oplus y) = T_1(g)x \oplus T_2(g)y$, называется *прямой суммой* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \oplus T_2$. Прямую сумму n экземпляров представления τ обозначим $n\tau$.

Пусть T_1 — представление G в U, T_2 — представление H в W и $V = U \otimes W$. Представление T группы $G \times H$ в V, определенное формулой $T(g \times h)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(h)y$ $(x \in U,\ y \in W,\ g \in G,\ h \in H)$, называется *тензорным произведением* представлений T_1 и T_2 и обозначается $T_1 \otimes T_2$. Термин *тензорное произведение* применяется к еще одной аналогичной операции, в которой и U, и W — представления одной и той же группы G. При этом, по определению, $(T_1 \otimes T_2)(g)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(g)y$.

4. Спектр представления

Лемма 1.1. *Пусть* $T\colon G \to \mathrm{GL}(V)$ — *представление и* $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ — *разложение в сумму неприводимых инвариантных подпространств. Тогда T вполне приводимо и, более того, для каждого инвариантного подпространства $U \subset V$ найдутся такие $i_1, \ldots, i_p$, что* $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$.

Доказательство. Номера $i_1, \ldots, i_p$ выбираем из условия, что U, $V_{i_1} \ldots, V_{i_p}$ — максимальная независимая подсистема (в крайнем случае набор $i_1, \ldots, i_p$ окажется пустым). Тогда для любого $i = 1, \ldots, m$

$$\underbrace{V_i \cap (U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p})}_{\text{инвариантное подпространство в } V_i} = \begin{cases} V_i, \\ \{0\}. \end{cases}$$

Случай $\{0\}$ исключен, т. к. тогда V_i линейно независимо с остальными. Следовательно, $V_i \subseteq U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots V_{i_p}$ и $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$. □

Лемма 1.2. *Если T разложено на неприводимые: $T = \bigoplus T_i$, то любое его подпредставление (факторпредставление) эквивалентно сумме некоторой части представлений T_i.*

Доказательство. По лемме 1.1 $V/U = V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_p}$, и утверждение для фактора доказано. Для подпредставления: всякое подпредставление изоморфно факторпредставлению по дополнительному подпространству, а оно в данном случае имеется — по лемме 1.1. □

Теорема единственности. *Разложение на неприводимые единственно с точностью до эквивалентности: если $T \cong T_1 \oplus \ldots \oplus T_m$ и $T \cong S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$, то $m = n$ и после соответствующей перенумерации $T_i \cong S_i$, $i = 1, \ldots, m$.*

Доказательство. С точностью до изоморфизма можно считать, что представления T_i и S_j действуют в одном и том же пространстве V, и, соответственно, мы имеем два разложения V в прямую сумму неприводимых подпространств: $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ и $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$, так что $T_{V_i} \cong T_i$ и $T_{U_j} \cong S_j$.

Проведем доказательство индукцией по m. Применим лемму 1.1 к подпространству $U = U_1$. Это дает $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}$, где $V_{i_1}, \ldots, V_{i_k}$ — некоторая часть представлений $V_1, \ldots, V_m$. Тогда $T_U \cong T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}}$. Из данного по условию разложения $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_m$ имеем $T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}} \cong V_{j_1} \oplus \ldots \oplus V_{j_l}$, где $\{j_1, \ldots, j_l\} = \{1, \ldots, m\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Следовательно,

$$S_1 \cong T_U \cong T_{V/V_{i_1} \oplus \ldots \oplus V_{i_k}} \cong T_{j_1} \oplus \ldots \oplus T_{j_l}.$$

Оглавление