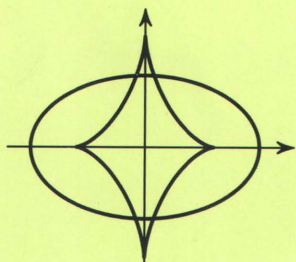


НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

О. К. ШЕЙНМАН

# ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ



НЕЗАВИСИМЫЙ МОСКОВСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**О. К. Шейнман**

**Основы теории представлений**

Москва  
Издательство МЦНМО  
2004

УДК 512.547.2+512.815

ББК 22.1

ШЗ9

**Шейнман О. К.**

ШЗ9 Основы теории представлений. — М: МЦНМО, 2004. — 64 с.

ISBN 5-94057-169-7

Книга представляет собой семестровый вводный курс теории представлений конечных и важнейших компактных групп. Предназначается для студентов математических и физических специальностей, начиная со второго курса.

ББК 22.1

*Олег Карлович Шейнман*

Основы теории представлений

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 27.09.2004 г.

Формат 60 × 90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4.

Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра

непрерывного математического образования

119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 5-94057-169-7

© Шейнман О. К., 2004

## Предисловие автора

Настоящие лекции представляют собой записки семестрового вводного курса теории представлений, читанного мною в Независимом московском университете в 2002—2004 годах. Они предназначены для студентов начиная со второго курса.

При подготовке этих лекций я придерживался двух правил:

- 1) представлять общие принципы на простых конкретных примерах;
- 2) демонстрировать теорию представлений в действии.

Например, в соответствии с первым правилом, я формулирую теорему о существовании инвариантной меры на компактной группе, но вместо доказательства вычисляю ее на группе вращений, которая реально используется ниже. Или демонстрирую унитарный трюк Вейля на примере  $SU(2)$  и  $SL(2, \mathbb{C})$ .

В соответствии со вторым правилом, в лекции о представлениях симметрической группы я привожу выражение рациональных решений уравнения Кадомцева—Петвиашвили через полиномы Шура. Я показываю, что уже простейшие рассмотрения в теории представлений приводят к фундаментальным выводам о строении атома. Кульминацией курса является решение уравнения Шредингера для электрона в центральном поле и вытекающее из него объяснение строения первых периодов таблицы Менделеева.

При подготовке своих лекций я широко пользовался замечательной книгой Э. Б. Винберга «Линейные представления групп». По сравнению с ней я еще более жестко подошел к отбору доказываемых фактов. В то же время я несколько приблизил изложение к классическим книгам И. М. Гельфанда, Р. А. Минлоса и Э. Я. Шапиро «Унитарные представления группы вращений и группы Лоренца» и Б. Л. Ван-дер-Вардена «Метод теории групп в квантовой механике». Имеются заимствования из «Фейнмановских лекций по физике».

Я благодарен С. Локтеву за разрешение включить в записки разработанный им цикл задач (см. приложение). Я также благодарю В. Шувалова, сделавшего макет и внесшего многочисленные предложения редакционного характера, а также других сотрудников издательства МЦНМО, внесших ряд улучшений в текст.

*О. К. Шейнман. Май 2004 г.*

# Лекция 1. Общие свойства представлений

## 1. Основные определения

Пусть  $G$  — группа,  $V$  — конечномерное комплексное линейное пространство,  $\text{GL}(V)$  — группа обратимых операторов в  $V$ . *Представлением  $G$  в  $V$*  называется гомоморфизм  $T: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Оператор, отвечающий элементу  $g \in G$ , называется его *оператором представления* и обозначается  $T(g)$  или  $T_g$ .

Пусть  $V_0$  — подпространство, инвариантное относительно всех операторов представления  $T$ . Тогда ограничения операторов  $T_g$  на  $V_0$  образуют представление  $G$  в  $V_0$ , которое называется *подпредставлением  $T$* . Представление, образованное фактороператорами в пространстве  $V/V_0$ , называется *факторпредставлением*. Представление, не имеющее нетривиальных (т. е. отличных от нулевого и от него самого) подпредставлений, называется *неприводимым*; в противном случае — *приводимым*.

Представление называется *разложимым*, если  $V$  раскладывается в прямую сумму (нетривиальных) инвариантных подпространств, и *вполне приводимым*, если каждое инвариантное подпространство имеет инвариантное дополнение.

Представление называется *унитарным* относительно заданной невырожденной эрмитовой формы в  $V$ , если эта форма инвариантна относительно всех операторов представления (иными словами, все  $T_g$  унитарны). Представление называется *унитаризуемым*, если невырожденная инвариантная эрмитова форма существует.

**Теорема 1.1.** *Унитарные представления вполне приводимы.*

*Доказательство.* Ортогональное дополнение к инвариантному подпространству относительно инвариантной эрмитовой формы само инвариантно.  $\square$

**Теорема 1.2.** *Представления конечных групп унитаризуемы и, как следствие, вполне приводимы.*

*Доказательство.* Пусть  $E$  — какая-либо невырожденная эрмитова форма в  $V$ . Тогда

$$(x, y) = |G|^{-1} \sum_{g \in G} E(T_g x, T_g y) \quad (1)$$

является *инвариантной* невырожденной эрмитовой формой.  $\square$

## 2. Эквивалентность, морфизмы (сплетающие операторы)

*Морфизмом (сплетающим оператором)* представлений  $T_1: G \rightarrow \text{GL}(V_1)$  и  $T_2: G \rightarrow \text{GL}(V_2)$  называется такой оператор  $C: V_1 \rightarrow V_2$ ,

что  $CT_1(g) = T_2(g)C$  для любого  $g \in G$ . Если  $C$  является изоморфизмом линейных пространств, то, по определению, он является и изоморфизмом представлений. Аналогично, термины *эндоморфизм*, *автоморфизм* переносятся из категории линейных пространств в категорию представлений. Если изоморфизм существует, представления называются *эквивалентными* (обозначение:  $T_1 \cong T_2$ ). Множество (классов эквивалентности) неприводимых представлений группы  $G$  обозначим  $\hat{G}$ .

**Теорема 1.3.** *Каждый морфизм неприводимых представлений — либо изоморфизм, либо нулевой оператор.*

*Доказательство.* Ядро и образ морфизма инвариантны. Следовательно, каждое из них либо является нулевым подпространством, либо совпадает с соответствующим представлением.  $\square$

**Лемма Шура (Schur).** *Каждый эндоморфизм неприводимого представления над  $\mathbb{C}$  скалярен.*

*Доказательство.* Пусть  $CT(g) = T(g)C$ , и  $\lambda$  — характеристическое значение  $C$ . Тогда  $(C - \lambda I)T(g) = T(g)(C - \lambda I)$ , т. е.  $C - \lambda I$  — морфизм. Но  $\det(C - \lambda I) = 0$ , поэтому  $C - \lambda I = 0$  (теорема 1.3).  $\square$

Лемма Шура — основной критерий неприводимости в теории представлений. Напротив, основной метод разложения представлений — построение диагонального (но не скалярного) сплетающего оператора.

**Следствие.** *Пусть  $T_1$  и  $T_2$  — эквивалентные неприводимые представления. Тогда любой изоморфизм  $T_1$  и  $T_2$  имеет вид  $\lambda\sigma$ , где  $\sigma: T_1 \rightarrow T_2$  — фиксированный изоморфизм,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\tau: T_1 \rightarrow T_2$  — изоморфизм, тогда  $\tau\sigma^{-1}$  — автоморфизм  $T_1$ , т. е.  $\tau\sigma^{-1} = \lambda I$ .  $\square$

**Задача 1.1.** *Каждое неприводимое представление абелевой группы одномерно.*

### 3. Основные операции: $\oplus$ , $\otimes$

Пусть  $T_1$  — представление  $G$  в  $U$ ,  $T_2$  — представление  $G$  в  $W$  и  $V = U \oplus W$ . Представление  $T$  в  $V$ , определенное формулой  $T(g)(x \oplus y) = T_1(g)x \oplus T_2(g)y$ , называется *прямой суммой* представлений  $T_1$  и  $T_2$  и обозначается  $T_1 \oplus T_2$ . Прямую сумму  $n$  экземпляров представления  $\tau$  обозначим  $n\tau$ .

Пусть  $T_1$  — представление  $G$  в  $U$ ,  $T_2$  — представление  $H$  в  $W$  и  $V = U \otimes W$ . Представление  $T$  группы  $G \times H$  в  $V$ , определенное формулой  $T(g \times h)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(h)y$  ( $x \in U$ ,  $y \in W$ ,  $g \in G$ ,  $h \in H$ ), называется *тензорным произведением* представлений  $T_1$  и  $T_2$  и обозначается  $T_1 \otimes T_2$ . Термин *тензорное произведение* применяется к еще одной аналогичной операции, в которой и  $U$ , и  $W$  — пред-

ставления одной и той же группы  $G$ . При этом, по определению,  $(T_1 \otimes T_2)(g)(x \otimes y) = T_1(g)x \otimes T_2(g)y$ .

#### 4. Спектр представления

**Лемма 1.1.** Пусть  $T: G \rightarrow \text{GL}(V)$  — представление и  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  — разложение в сумму неприводимых инвариантных подпространств. Тогда  $T$  вполне приводимо и, более того, для каждого инвариантного подпространства  $U \subset V$  найдутся такие  $i_1, \dots, i_p$ , что  $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_p}$ .

*Доказательство.* Номера  $i_1, \dots, i_p$  выбираем из условия, что  $U, V_{i_1}, \dots, V_{i_p}$  — максимальная независимая подсистема (в крайнем случае набор  $i_1, \dots, i_p$  окажется пустым). Тогда для любого  $i = 1, \dots, m$

$$\underbrace{V_i \cap (U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_p})}_{\text{инвариантное подпространство в } V_i} = \begin{cases} V_i, \\ \{0\}. \end{cases}$$

Случай  $\{0\}$  исключен, т. к. тогда  $V_i$  линейно независимо с остальными. Следовательно,  $V_i \subseteq U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_p}$  и  $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_p}$ .  $\square$

**Лемма 1.2.** Если  $T$  разложено на неприводимые:  $T = \bigoplus T_i$ , то любое его подпредставление (факторпредставление) эквивалентно сумме некоторой части представлений  $T_i$ .

*Доказательство.* По лемме 1.1  $V/U = V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_p}$ , и утверждение для фактора доказано. Для подпредставления: всякое подпредставление изоморфно факторпредставлению по дополнительному подпространству, а оно в данном случае имеется — по лемме 1.1.  $\square$

**Теорема единственности.** Разложение на неприводимые единственно с точностью до эквивалентности: если  $T \cong T_1 \oplus \dots \oplus T_m$  и  $T \cong S_1 \oplus \dots \oplus S_n$ , то  $m = n$  и после соответствующей перенумерации  $T_i \cong S_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

*Доказательство.* С точностью до изоморфизма можно считать, что представления  $T_i$  и  $S_j$  действуют в одном и том же пространстве  $V$ , и, соответственно, мы имеем два разложения  $V$  в прямую сумму неприводимых подпространств:  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  и  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ , так что  $T_{V_i} \cong T_i$  и  $T_{U_j} \cong S_j$ .

Проведем доказательство индукцией по  $m$ . Применим лемму 1.1 к подпространству  $U = U_1$ . Это дает  $V = U \oplus V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}$ , где  $V_{i_1}, \dots, V_{i_k}$  — некоторая часть представлений  $V_1, \dots, V_m$ . Тогда  $T_U \cong T_{V/V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}}$ . Из данного по условию разложения  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$  имеем  $T_{V/V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}} \cong V_{j_1} \oplus \dots \oplus V_{j_l}$ , где  $\{j_1, \dots, j_l\} = \{1, \dots, m\} - \{i_1, \dots, i_k\}$ . Следовательно,

$$S_1 \cong T_U \cong T_{V/V_{i_1} \oplus \dots \oplus V_{i_k}} \cong T_{j_1} \oplus \dots \oplus T_{j_l}.$$

# Оглавление

Предисловие автора . . . . .	3
Лекция 1. Общие свойства представлений . . . . .	4
1. Основные определения (4). 2. Эквивалентность, морфизмы (сплетающие операторы) (4). 3. Основные операции: $\oplus$ , $\otimes$ (5). 4. Спектр представления (6). 5. Неприводимость тензорного произведения (7).	
Лекция 2. Разложение регулярного представления . . . . .	8
1. Действия групп на множествах (8). 2. Двойственное представление (9). 3. Матричные элементы (9). 4. Разложение $\text{Reg}$ (11).	
Лекция 3. Характеры и групповая алгебра . . . . .	14
1. Характеры: основные факты (14). 2. Центральные функции (15). 3. Групповая алгебра (16). 4. Центральные характеры (16). 5. Разложение представлений (18).	
Лекция 4. Соотношения ортогональности . . . . .	18
1. Инвариантное скалярное произведение в $C(G)$ (18). 2. Единственность инвариантного скалярного произведения (18). 3. Соотношения ортогональности (18).	
Лекция 5. Представления симметрической группы $\mathfrak{S}_d$ . . . . .	22
1. Классификация неприводимых представлений (23). 2. Идентификация неприводимых представлений в регулярном (23). 3. Характеры: формула Фробениуса (23). 4. Размерности: формула крюков (24). 5. Полиномы Шура (24). 6. Уравнение Кадомцева—Петвиашвили (25). 7. Квантовая теория поля (25).	
Лекция 6. Группы $SU(2)$ и $SO(3)$ — геометрия, топология, инвариантная мера . . . . .	26
1. Определение $SU(2)$ и $SO(3)$ (26). 2. Углы Эйлера (26). 3. Накрытие $SU(2) \rightarrow SO(3)$ (27). 4. Инвариантная мера на $SO(3)$ (28). 5. Подъем инвариантной меры с $SO(3)$ на $SU(2)$ (28).	
Лекция 7. Представления компактных групп . . . . .	28
1. Вводные замечания (28). 2. Теорема Петера—Вейля (29). 3. Гармонический анализ на $S^2$ — постановка задачи (31).	



Лекция 8. Сферические функции Лапласа . . . . .	31
1. Гармонические полиномы в $\mathbb{R}^3$ (31). 2. Сферические функции (32). 3. Собственные полиномы группы $SO(2) \subset SO(3)$ (32). 4. Основная теорема гармонического анализа на $S^2$ (33).	
Лекция 9. Элементы теории Ли . . . . .	34
1. Линейные группы Ли (34). 2. Скобка на $T_e G$ (35). 3. Соответствие между представлениями групп Ли и их алгебр Ли (36).	
Лекция 10. Представления $SU(2)$ , $SO(3)$ и $\mathfrak{sl}(2)$ . . . . .	37
1. От $\mathfrak{su}(2)$ к $\mathfrak{sl}(2)$ : комплексификация (37). 2. Неприводимые конечномерные представления $\mathfrak{sl}(2)$ (38). 3. Представления $SU(2)$ — классификация (39). 4. Представления $SO(3)$ — классификация (40).	
Лекция 11. Полиномы Лежандра . . . . .	40
1. Зональная сферическая функция $Y_{m,0}$ (40). 2. Присоединенные сферические функции (40). 3. Вычисление $Y_{m,\pm k}$ (42).	
Лекция 12. Атом водорода. Периодическая система Менделеева . . . . .	43
1. Стационарное уравнение Шредингера (43). 2. Разделение переменных (44). 3. Оператор Лапласа в сферическом представлении (45). 4. Радиальное уравнение Шредингера (46). 5. Вырождение главного квантового числа и длина периодов таблицы Менделеева (46). 6. Заполнение электронных оболочек (47).	
Приложение. Задачи к курсу «Введение в теорию представлений» (С. А. Локтев) . . . . .	50