МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
М34

*Поддержано Департаментом образования г. Москвы
в рамках программы «Одаренные дети»*

Рецензент: А. К. Ковальджи

М34 **Математика в задачах.** Сборник материалов выездных школ команды Москвы на Всероссийскую математическую олимпиаду / Под ред. А. А. Заславского, Д. А. Пермякова, А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова. — М.: МЦНМО, 2009. — 488 с.

ISBN 978-5-94057-477-4

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи, а также решения или указания к ключевым задачам.

ББК 74.200.58:22.1

Рисунки Е. С. Горской

ISBN 978-5-94057-477-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов

В данный сборник вошли материалы выездных школ по подготовке команды Москвы на Всероссийскую олимпиаду. Подробнее об этих школах, их программах, их преподавателях (многие из которых являются авторами сборника) и т. д. написано в приложении. Материалы сборника могут использоваться как школьниками для самостоятельных занятий, так и преподавателями. В большинстве материалов сборника приведены дававшиеся на занятиях задачи[1)], а также решения или указания к ключевым задачам. Обычно ключевые задачи самостоятельно решаются некоторыми школьниками и после этого разбираются, а остальные задачи сдаются школьниками как на занятии, так и после него.

Материалы разделены на три части: «Алгебра», «Геометрия», «Комбинаторика», а внутри каждой части на разделы. В скобках после названия каждого раздела указано, для каких классов он рекомендуется. Эта рекомендация примерно соответствует тому, каким участникам этот раздел предлагался на Школе. Конечно, эта рекомендация весьма условна.

Достоинство данного сборника в том, что почти все разделы независимы друг от друга. Если в одном разделе используются только определение из другого, то эти разделы не считаются зависимыми — все такие определения общеприняты. Схема зависимости разделов приведена в начале каждой главы (или в начале раздела написано, на какие другие разделы он опирается). Это дает большую свободу руководителю кружка при подготовке занятий, но одновременно требует его высокой квалификации.

Для решения задач достаточно понимания их условий. Все определения, не входящие в школьную программу, приводятся в той же главе, где используются (но не всегда в том же разделе). Иногда могут оказаться полезными другие задачи того же раздела или разделов, от которых «зависит» данный. Никакие другие знания и теории не нужны. Если условие задачи является формулировкой утверждения, то подразумевается, что это утверждение надо доказать.

[1)] По некоторым темам занятия проводились неоднократно на различных школах, причем иногда разными преподавателями. В сборнике соответствующие материалы объединены.

Некоторые материалы сборника отражают опыт преподавания не только на Школах, но также в СУНЦ МГУ и на кружке «Олимпиады и математика» в МЦНМО. Многие материалы использовались для дистанционного обучения математике [2)]. В таких материалах присутствуют контрольные вопросы с выбором ответов (предназначенные для быстрой оценки готовности школьника к решению данного цикла задач; такие задания не используются на школах) и перечисление номеров задач, являющихся зачетными по данной теме при дистанционном обучении.

Сборник предваряют заметки об общих принципах преподавания, адресованные прежде всего преподавателям. Возможно, заметки окажутся полезными и школьникам.

Мы благодарим проректора МИОО директора МЦНМО И. В. Ященко за идею создания Школ и книги, а также за организацию материальной основы. Мы благодарим авторов настоящего сборника за серьезную работу над материалами (эти материалы существенно доработаны по сравнению с тем, что предлагалось на занятиях). Мы благодарим участников школ, поскольку эти материалы создавались для них (более того, иногда участники помогали совершенствовать материалы), благодарим А. К. Ковальджи за общее рецензирование книги (после рецензирования нами отдельных материалов), М. Г. Быкову за техническое редактирование текста и Е. С. Горскую за подготовку рисунков.

Редакторы сборника частично поддержаны грантами РФФИ 06-01-72551-НЦНИЛа и 07-01-00648-а, НШ-4578.2006.1, РНП 2.1.1.7988, ИНТАС 06-1000014-6277.

Олимпиады и математика [3)]

А. Б. Скопенков

> To him a thinking man's job was not to deny one reality at the expense of the other, but to include and to connect.
>
> *U. K. Le Guin.* The Dispossessed [4)]

Перед учителями и руководителями кружков, занимающимися с сильными школьниками, встает вопрос: как подготовить школьников к олимпиадам или к «серьезной» математике? Некоторые думают, что

[2)] http://math.olymp.mioo.ru.

[3)] Это обновленный вариант введения к статье из Мат. просвещения. 2006. № 10. С. 57–63. Обновляемый текст: http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf.

[4)] Для него работой мыслителя было не отрицание одной реальности за счет другой, а взаимовключение и взаимосвязь. *У. К. Ле Гуин.* Обделенные. — *Пер. автора.*

для первого надо прорешивать задачи последних олимпиад, для второго надо читать научную литературу, и что ввиду принципиальной разницы первого и второго бессмысленно пытаться достичь и того, и другого. Автор этой заметки придерживается распространенного мнения о том, что эти подходы недостаточно эффективны и приводят к вредным «побочным эффектам»: школьники либо чрезмерно увлекаются *спортивным* элементом в решении задач, либо изучают *язык* высшей математики вместо ее содержания.

Мне кажется, что основу математического образования сильного ученика должно составлять *решение и обсуждение задач, в процессе работы над которыми он знакомится с важными математическими идеями и теориями.* Это одновременно подготовит школьника и к математической науке, и к олимпиадам и не нанесет вреда его развитию в целом. Это будет более эффективно и для достижения успеха только в олимпиадах или только в науке (если не учитывать большого количества других факторов кроме разумной организации занятий).

Как и при естественном развитии самой математики, каждая следующая задача должна быть мотивирована либо практикой, либо уже решенными задачами (см. подробнее [4]). Поэтому ученик, занимающийся «мотивированной для него» математикой (обычно более элементарной, но содержательной и потому сложной) вместо «немотивированной для него» математики (обычно менее элементарной, но языковой и потому тривиальной), имеет преимущество в дальнейшей учебе и научной работе. А. Н. Колмогоров говорил, что до тридцати лет математику разумнее всего заниматься решением конкретно поставленных задач. А значит, умение решать сложные задачи является одним из важнейших для молодого математика.

Олимпиадных задач очень много, большинство из них интересны школьнику, и среди них много математически содержательных. Такие задачи могут составить основу изучаемого материала. Однако решение олимпиадных задач без изучения математических идей и теорий недостаточно эффективно даже для «чистой» подготовки к олимпиадам (на долгих — год и более — промежутках времени, как и вообще решение сиюминутных задач без фундаментального развития). Кроме того, большинству людей легче достичь успеха на олимпиадах в том случае, когда они не считают успех главной целью. Сложную задачу легче решить, если спокойно думать о самой задаче, а не о награде, которая последует за ее решением. Поэтому школьник, имеющий более высокую цель, чем успех на олимпиаде, имеет на этой олимпиаде психологическое преимущество.

Как удачно подобрать задачи для обучения учеников? Этот вопрос учителя́ задавали себе последние десять тысяч лет [1, предисловие],

[2], [3, с. 26–33], [5, предисловие]. Очередным примером являются материалы настоящего сборника.

[1] *Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.* Ленинградские математические кружки. Киров, 1994.

[2] *Судзуки Д.* Основы дзен-буддизма. Наука дзен — ум дзен. Киев, 1992.

[3] *Платон.* Федон // Федон, Пир, Федр, Парменид. М.: Мысль, 1999.

[4] *Скопенков А. Б.* Философско-методическое отступление, наст. сборник.

[5] *Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики. М.: Физматлит, 2001.

Философско-методическое отступление [5)]

А. Б. Скопенков

> Круг мог, нацелясь в стаю самых признанных и возвышенных человеческих мыслей, вмиг ссадить ворону в павлиньих перьях.
>
> *В. Набоков.* Под знаком незаконнорожденных

По моему мнению, именно с *новых идей*, а не с *немотивированных определений*, полезно *начинать* изучение любой теории [6)].

«Мы стараемся свести к минимуму число понятий, откладывая определения до момента, когда они напрашиваются сами собой, и избегая задач на понимание и применение формальных определений (типа „является ли множество целых чисел группой по сложению?“)» [5].

«При изложении материала нужно ориентироваться на объекты, которые основательнее всего укореняются в человеческой памяти. Это — отнюдь не системы аксиом и не логические приемы в доказательстве теорем. Изящное решение красивой задачи, формулировка которой ясна и доступна, имеет больше шансов удержаться в памяти студента, нежели абстрактная теория. Скажем больше: именно по такому реше-

[5)] Это часть исходной версии заметки [3], не включенная в опубликованную версию. Обновляемый текст: `http://www.mccme.ru/circles/oim/oimphil.pdf` и `http://arxiv.org/abs/0804.4357`.

[6)] Такие идеи наиболее ярко выражаются доказательствами, подобными приведенным в [3].

нию, при наличии некоторой математической культуры, студент впоследствии сможет восстановить теоретический материал. Обратное же, как показывает опыт, практически невозможно» [2, предисловие].

Известно также, что «путь познания должен повторять путь развития» [7].

По моему мнению, такой стиль изложения не только делает материал более доступным, но позволяет сильным студентам (для которых доступно даже абстрактное изложение) приобрести математический вкус и стиль с тем, чтобы, во-первых, разумно выбирать проблемы для исследования и их мотивировки. (Математик, понимающий, что теория Галуа мотивируется более важными проблемами, чем построимость правильных многоугольников и разрешимость алгебраических уравнений в радикалах, вряд ли станет мотивировать созданную им теорию приложениями, которые можно получить и без его теории.)

Во-вторых, это позволит ясно излагать собственные открытия, не скрывая ошибки или известности полученного результата за чрезмерным формализмом. (К сожалению, такое — обычно бессознательное — сокрытие ошибки часто происходит с молодыми математиками, воспитанными на чрезмерно формальных курсах. Происходило это и с автором этих строк; к счастью, все мои серьезные ошибки исправлялись *перед* публикациями.)

Мода на искусственно формализованное изложение [8] привела к следующему парадоксу. По данному *известному понятию* высшей математики зачастую непросто (и это требует высокой научной квалификации) выбрать *конкретный красивый результат*, для которого это понятие действительно необходимо (и при получении которого это понятие обычно и возникло).

[7] «Впрочем, это не вполне верно. Так, изучение геометрии Лобачевского вовсе не обязательно начинать с попыток доказать пятый постулат Евклида. Геометрия Лобачевского для нас сейчас важна, в первую очередь, ее приложениями в ТФКП, теории чисел, топологии, теории групп, алгебраической геометрии, космологии и т. д., а вовсе не тем, что она демонстрирует независимость пятого постулата от остальных аксиом Евклида. С этой точки зрения более плодотворно ее построение не на основе аксиом Евклида—Гильберта, а на основе понятия группы преобразований (Клейн) или римановой метрики (Риман). Аналогично изучение теории Галуа вовсе не обязательно начинать с задачи о решении алгебраического уравнения в радикалах или квадратных радикалах. С современной точки зрения теория Галуа есть теория алгебраических расширений полей, составляющая неотъемлемую часть алгебры и имеющая приложения и аналоги в других разделах математики (алгебраическая геометрия, теория накрытий, теория инвариантов), а решение алгебраических уравнений в радикалах — это маргинальная задача» (*Э. Б. Винберг*).

[8] Видимо, общепринятый термин «бурбакизация» не очень удачен ввиду *«масштаба и влияния деятельности Бурбаки, независимо от оценки пользы и вреда разных ее аспектов»* (*А. Шень*).

Доказательство с использованием некоторого нового термина имеет свои преимущества: оно подготавливает читателя к доказательству тех теорем, которые уже трудно или невозможно доказать без этого термина [9]. Однако такие доказательства, как правило, не должны быть *первыми* доказательствами данного результата (легко себе представить результат *первого* знакомства с теоремой Пифагора на основе понятий векторного пространства и скалярного умножения). Кроме того, при приведении «терминологического» доказательства полезно четко оговорить его мотивированность не доказываемым результатом, а обучением полезному новому методу.

Приведенная выше точка зрения разделяется многими математиками (а некоторыми — нет); я унаследовал ее от Ю. П. Соловьева.

Например, приводимые порой в качестве *основных* приложений теории Галуа доказательство теоремы Гаусса о правильных многоугольниках и другие результаты о разрешимости алгебраических уравнений в радикалах неубедительны для мотивировки этой теории (как и приложение к решению квадратных уравнений неубедительно для мотивировки общей теории разрешимости уравнений произвольной степени в радикалах) [10]. Действительно, теорема Гаусса имеет элементарное доказательство, не использующее групп Галуа [3]. Теорема Руффини—Абеля о неразрешимости в радикалах *общего* алгебраического уравнения степени 5 и выше (как и достаточность условия Кронекера неразрешимости в радикалах *конкретного* уравнения простой степени) также имеет алгебраическое доказательство, не использующее групп Галуа [2], [4] (и *топологическое* доказательство [1]). В терминах теории Галуа формулируется общий критерий разрешимости *конкретного* алгебраического уравнения в радикалах, но этот критерий не дает настоящего решения проблемы разрешимости, а лишь сводит ее к трудной задаче вычисления группы Галуа уравнения. (То, что никакая *другая теория* не дает легкого для применения ответа, не позволяет утверждать, что *теория Галуа* дает такой ответ.) Но, конечно, формулировка общего критерия в адекватных проблеме терминах может иметь важное философское значение.

---

[9] «Например, векторное доказательство теоремы Пифагора уже является достаточным основанием для введения понятий векторного пространства и скалярного умножения, хотя эти понятия и не являются необходимыми для доказательства упомянутой теоремы» (*Э. Б. Винберг*).

[10] Возможно, *именно поэтому* работы Галуа были забыты на 20 лет после их выхода — пока не появились важные задачи, в первую очередь о разрешимости дифференциальных уравнений в квадратурах, при решении которых уже трудно обойтись без теории Галуа — ведь математика XIX века была гораздо ближе к естествознанию, чем современная. Конечно, приведенная гипотеза нуждается в серьезной проверке.

Популяризации теории Галуа послужит дальнейшая публикация интересных теорем, формулируемых без ее понятий, но при попытках доказать которые она естественно возникает. Примеры таких теорем мне сообщили А. Я. Канель-Белов, С. М. Львовский и Г. Р. Челноков (к сожалению, в доступной мне учебной литературе по теории Галуа мне не удалось найти такие теоремы, формулировка которых не была бы скрыта под толщей обозначений и терминов).

[1] *Алексеев В. Б.* Теорема Абеля в вопросах и задачах. М.: Наука, 1976.

[2] *Колосов В. А.* Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики. М.: Гелиос, 2001.

[3] *Козлов П. В.*, *Скопенков А. Б.* В поисках утраченной алгебры: в направлении Гаусса (подборка задач) // Мат. просвещение. 2008. № 12. С. 127–143. http://arxiv.org/abs/0804.4357

[4] *Прасолов В. В.* Многочлены. М.: МЦНМО, 1999, 2001, 2003.

[5] Задачи по математике / Под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000.

Напутствие

А. Я. Канель-Белов

Для успешного решения задач математических олимпиад высшего уровня необходимы в первую очередь общеукрепляющие средства: хорошая проработка алгебры (культура алгебраических преобразований), проработка школьной геометрии. Задачи этих олимпиад (кроме первых задач) практически всегда используют смешанный сценарий решения; редки задачи на применение некоторого метода или идеи в чистом виде. Решению таких «смешанных» задач должна предшествовать работа с ключевыми задачами, в которых идеи работают в чистом виде. Этому и посвящен настоящий сборник. См. также А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи «Как решают нестандартные задачи», С. Генкин, И. Итенберг, Д. Фомин «Ленинградские математические кружки».

ГЛАВА 1

МИНИКУРС ПО АЛГЕБРЕ [1)]

А. Б. Скопенков

Сегодня основная масса учащихся решает алгебраические задачи относительно плохо. Это связано с ухудшением качества школьного образования при сохранении кружкового. Для успешного решения олимпиадных задач алгебраического и теоретико-числового типа всячески рекомендуем нарабатывать культуру арифметических выкладок. (*А. Я. Канель-Белов.*)

Деление многочленов с остатком (8–9)

1. а) Вычислите значение функций

$$P(x) = 2x^3 - 27x^2 + 141x - 256 \quad \text{при } x = 16$$

и

$$Q(x) = x^4 + \frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad \text{при } x = -\frac{3}{4}.$$

Указание:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = \\ = (\ldots((a_nx + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots + a_1)x + a_0.$$

Этот способ вычисления значения многочлена в точке называется *схемой Горнера.*

б) Сколько операций сложения и умножения нужно для вычисления значения функции $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ «напрямую»? А сколько — по схеме Горнера?

Многочленом (в алгебраическом смысле, с вещественными коэффициентами) называется бесконечный упорядоченный набор $(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$

[1)] Отдельные разделы написаны А. Я. Канель-Беловым и И. Н. Шнурниковым. Контрольные вопросы составлены М. Б. Скопенковым. Некоторые решения написаны М. В. Прасоловым и М. Б. Скопенковым.

вещественных чисел, среди которых лишь конечное количество отличны от нуля. Поставим в соответствие многочлену (т. е. набору) $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ функцию $\overline{P}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданную формулой $\overline{P}(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + \ldots$ (эта сумма конечна). Поэтому многочлен $P = (a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ обычно записывают в виде $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, т. е. так же, как $\overline{P}$. Однако будем различать P и $\overline{P}$ — пока не доказано, что это «одно и то же» (4 б)) или в тех обобщениях, где это не «одно и то же» (4 в)). *Корнем* многочлена $a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ называется такое число x_0, что $a_0 + a_1x_0 + \ldots + a_nx_0^n = 0$.

2. Дайте определения степени, суммы и произведения многочленов.

3. Пусть P — многочлен и a — число.

а) **Теорема Безу.** Существует такой многочлен Q, что $P = (x-a)Q + P(a)$. (Иными словами, многочлен $P - P(a)$ делится на $x - a$.) Более того, можно считать, что $\deg Q < \deg P$. Здесь $\deg P$ — *степень многочлена* P, т. е. наибольшее такое число n, что коэффициент a_n ненулевой.

б) **Следствие.** Если $P(a) = 0$, то существует такой многочлен Q, что $P = (x-a)Q$.

4. а) Многочлен степени $n > 0$ имеет не более n корней.

б) Если значения двух многочленов в любой точке совпадают, то эти многочлены равны. (Иными словами, если P, P_1 — многочлены и $P(x) = P_1(x)$ для любого x, то $P = P_1$).

в)* Утверждение б) неверно для *многочленов над* $\mathbb{Z}_p$ (определите сами, что это такое).

г) Если значения двух многочленов степени n совпадают в $n+1$ различной точке, то эти многочлены равны.

д) Докажите тождество:

$$\frac{d(x-a)(x-b)(x-c)}{(d-a)(d-b)(d-c)} + \frac{a(x-b)(x-c)(x-d)}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \\ + \frac{b(x-d)(x-c)(x-a)}{(b-d)(b-c)(b-a)} + \frac{c(x-d)(x-b)(x-a)}{(c-d)(c-b)(c-a)} = x.$$

5. Пусть P — многочлен. Если $a_1, \ldots, a_k$ — различные числа, для которых $P(a_i) = 0$, то P делится на $(x-a_1)\ldots(x-a_k)$.

6. а) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с вещественными коэффициентами.

б) Верна ли теорема о делении с остатком для многочленов с рациональными коэффициентами?

в) А с целыми коэффициентами?

г) Сформулируйте и докажите теорему о делении с остатком для многочленов с целыми коэффициентами, если старший коэффициент делителя равен единице.

Зачетные задачи: 1 б); 2; 3 а), б); 4 а), б), г), д); 5; 6 а)–г). Из них письменно: 3 а); 6 в).

Контрольные вопросы

I. Многочлен $f(x)$ дает остаток 1 при делении на $x-1$ и остаток -1 при делении на $x+1$. Какой остаток дает $f(x)$ при делении на x^2-1?

а) 1; б) -1; в) x; г) $-x$.

II. При каких значениях a многочлен $x^{1000}+ax+9$ делится на $x+1$?

а) Ни при каких;
б) при $a=10$;
в) при $a=-10$;
г) при $a=10$ или $a=-10$;
д) при любых.

III. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Степень суммы двух многочленов равна максимуму из степеней этих многочленов.

б) Степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме их степеней.

в) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени самого многочлена P.

г) Степень остатка при делении многочлена P на многочлен Q меньше степени многочлена Q.

Указания и решения

3. а) *Указание.* Докажите сначала для $P=x^n$. Докажите, что если утверждение верно для P и Q, то верно и для bP и $P+Q$ (для любого числа b).

4. а) Докажем это утверждение индукцией по степени n многочлена P. При $n=0$ утверждение верно: ненулевой постоянный многочлен не имеет корней. Предположим, что *любой ненулевой многочлен Q степени k меньше n имеет менее k корней.* Рассмотрим произвольный ненулевой многочлен степени n. Предположим, что он имеет хотя бы $n+1$ корень. Обозначим эти различные корни через $a_0, a_1, a_2 \ldots, a_n$.

По следствию из теоремы Безу (задача 3 б)) $P=(x-a_0)Q$, где Q — некоторый многочлен *степени меньше n* (это свойство многочлена Q, иногда пропускаемое при доказательстве, существенно!). Подставляя в данное равенство $x=a_1$, получим $0=(a_1-a_0)Q(a_1)$. Значит,

$Q(a_1)=0$, т. е. a_1 — корень многочлена Q. Аналогично все числа $a_2, a_3, \ldots, a_n$ — корни многочлена Q *степени меньше* n. Это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает индукционный переход, а следовательно, и утверждение задачи.

Рациональные и иррациональные числа (8–10)

1. Числа $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии (ни в каком порядке; даже не подряд идущими членами).

Число называется *рациональным*, если его можно представить как отношение целых чисел, и *иррациональным* в противном случае.

2. Рациональны ли числа:

а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[7]{1+\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}$;

г) $\sqrt[n]{k}$, где целое $k \geqslant 2$ не является n-й степенью целого числа;

д) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$;

е) $\cos 60^\circ$;

ж) $\sin 60^\circ$;

з) $\cos 20^\circ$;

и) $\sin 10^\circ$?

Указание к з). Выразите $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$. Если для несократимой дроби p/q выполнено $4(p/q)^3-3(p/q)=-1/2$, т. е. $8p^3-6pq^2+q^3=0$, то 1 делится на p и 8 делится на q.

3. а) **Теорема о целых корнях.** Пусть

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

с целыми $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p)=0$ для целого p. Тогда a_0 делится на p.

б) **Теорема о рациональных корнях.** Пусть

$$f(x)=a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0$$

с целыми $a_n, \ldots, a_1, a_0$ и $f(p/q)=0$ для несократимой дроби p/q. Тогда a_0 делится на p и a_n делится на q.

в) В условиях б) для любого целого k число $f(k)$ делится на $p-kq$.

4. а) На клетчатой бумаге нельзя выбрать три узла, являющиеся вершинами правильного треугольника.

б)* Какие правильные многоугольники можно нарисовать на клетчатой бумаге с вершинами в узлах?

в)* При каких целых n число $\cos n^\circ$ рационально?

Не изучавшие тригонометрических функций могут игнорировать задачи 2 е)–и) *и* 4 а)–в).

Зачетные задачи: 1; 2 б), г)–и); 3 а), б); 4 а), в). Из них письменно: 3 а), 4 а).

Контрольные вопросы

I. Какие из следующих чисел являются рациональными?

а) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{\dfrac{3+2\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}}$;

в) $\sqrt{6+2\sqrt{7}}-\sqrt{3+\sqrt{2}}-\sqrt{3-\sqrt{2}}$.

II. Какие из следующих утверждений являются верными?

а) Сумма рациональных чисел всегда рациональна.

б) Сумма иррациональных чисел всегда иррациональна.

в) Корень из иррационального числа всегда иррационален.

III. Бумага «в треугольничек» получается так: на плоскости через равные промежутки проводятся прямые, параллельные двум сторонам фиксированного правильного треугольника, а затем через все точки пересечения проводят прямые, параллельные третье стороне. На листе бумаги в треугольничек можно выбрать 4 узла, являющиеся вершинами (выберите все возможные фигуры)

а) прямоугольника; б) ромба; в) квадрата.

Указания и решения

2. *Ответы*: а) нет; б) да.

а) Приведем доказательство того, что число $\sqrt{2}$ иррационально (известное еще древним грекам). Предположим обратное: пусть $\sqrt{2}=p/q$, где p/q — несократимая дробь. Возведем данное равенство в квадрат и домножим обе части на q^2. Получим: $2q^2=p^2$. Так как числа p и q целые, то из полученного равенства заключаем, что число p четное. Значит, $p=2r$, где r — некоторое целое число. Подставляя это выражение в наше равенство, получим $2q^2=(2r)^2$. Сокращая на 2, имеем $q^2=2r^2$. Так как q и r — целые числа, то число q четное. В итоге мы получили, что оба числа p и q четные. Это противоречит нашему предположению, что дробь p/q несократима. Полученное противоречие доказывает, что $\sqrt{2}$ — иррациональное число.

в) Преобразуем данное выражение:

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}+2\sqrt{6}=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}+2\sqrt{6}=\frac{5+2\sqrt{6}}{-1}+2\sqrt{6}=-5.$$

Число -5, очевидно, рациональное.

Решение уравнений 3-й и 4-й степени (9–10)

1. а) Уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ сводится к уравнению $x^3+px+q=0$.

б) Уравнение $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ сводится к уравнению $x^4+px^2+qx+r=0$.

в) Найдите координаты центра симметрии графика функции $y = -2x^3-6x^2+4$.

г) График любого кубического многочлена имеет центр симметрии.

2. Метод дель Ферро. а) Найдите хотя бы один корень уравнения $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Так как $(b+c)^3=b^3+c^3+3bc(b+c)$, то число $b+c$ является корнем уравнения $x^3-3bcx-(b^3+c^3)=0$.

б) Решите уравнение $x^3-3\sqrt[3]{2}x+3=0$.

Указание. Поделите $x^3-3bcx-(b^3+c^3)$ на $x-b-c$.

3. а) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$. Иными словами, $x^3-b^3-c^3-3bcx=(x-b-c)(x^2+b^2+c^2+bx+cx-bc)$.

б) $a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$. Когда достигается равенство?

в) $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$ при $a,b,c>0$.

г)* $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$.

4. а) Решите уравнение $x^3+3x-4=0$.

б) Докажите, что $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$.

в) Напишите общую формулу для решения уравнения $x^3+px+q=0$ методом дель Ферро. При каком условии применим этот метод (если корни разрешается извлекать только из положительных чисел)?

5. Метод Феррари. а) Решите уравнение $(x^2+2)^2=18(x-1)^2$.

б) Решите уравнение $x^4+4x-1=0$.

Указание. Подберите такие α, b, c, чтобы $x^4+4x-1=(x^2+\alpha)^2-(bx+c)^2$. Для этого найдите хотя бы одно α, для которого квадратный трехчлен $(x^2+\alpha)^2-(x^4+4x-1)$ является полным квадратом.

в) Решите уравнение $x^4-10x^2-8x+5=0$.

г) Для любых p,q,r кубическое уравнение $4(2\alpha-p)(\alpha^2-r)-q^2=0$ имеет решение.

д) Найдите алгоритм решения уравнения $x^4+px^2+qx+r=0$ методом Феррари. При каком условии применим этот метод (если корни

МАТЕМАТИКА В ЗАДАЧАХ

Сборник материалов выездных школ команды Москвы
на Всероссийскую математическую олимпиаду

Под редакцией А. А. Заславского, Д. А. Пермякова,
А. Б. Скопенкова, М. Б. Скопенкова и А. В. Шаповалова

Подписано в печать 22.12.2008 г. Формат 60 × 90 $^1\!/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 30,5. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.