Лекции
по симплектической геометрии и топологии

Ω IAS/PARK CITY
MATHEMATICS SERIES

Volume 7

Symplectic Geometry and Topology

Yakov Eliashberg
Lisa Traynor
Editors

American Mathematical Society
Institute for Advanced Study

Лекции по симплектической геометрии и топологии

Под редакцией Я. Элиашберга
и Л. Трейнор

Перевод с английского
Ж. Т. Гавриловой, *Ф. Ю. Попеленского*

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 51(07)
ББК 22.1
С37

Издание осуществлено при поддержке РФФИ

С37 **Симплектическая геометрия и топология** / Под ред. Я. Элиашберга, Л. Трейнор. Пер. с англ. Ж. Т. Гавриловой, Ф. Ю. Попеленского. — М.: МЦНМО, 2008. — 424 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-130-8

Книга представляет собой записи лекций, посвященных симплектической топологии и современным проблемам этой новой области математики. Авторы сборника — известные математики, внесшие большой вклад в развитие этой теории: Д. Мак-Дафф, Х. Хофер, К. Таубс, Д. Саламон, А. Гивенталь, Р. Макферсон, Дж. Марсден и другие. Материал лекций удачно подобран, так что книга является хорошим введением в рассматриваемый круг вопросов. Книга предназначена для студентов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

ББК 22.1

Подписано в печать 01.03.2008 г. Формат 70 × 100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 26,5. Тираж 400 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-130-8

9 785940 571308

ISBN 0-8218-0838-9 (англ.)

Оглавление

Дуза Мак-Дафф

ВВЕДЕНИЕ В СИМПЛЕКТИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

Введение

Вместо того чтобы пытаться дать всесторонний обзор симплектической топологии, мы сосредоточим внимание на трех важных темах, а именно на методе Мозера, которому посвящена лекция 2, на понятии емкости (см. лекцию 4) и на доказательстве Громова теоремы о несжимаемости (см. лекцию 5). Метод Мозера демонстрирует значительную гибкость симплектической структуры, тогда как остальные две темы относятся к ее жесткости. Довольно много внимания мы уделяем линейной теории, поскольку она лежит в основе всего остального. В последней лекции мы кратко описываем некоторые методы из теории J-голоморфных сфер с целью знакомства с этой замечательной и мощной техникой.

Система обозначений соответствует принятой в [MS1] и [MS2]. Читатели могут найти в этих работах детали по всем упомянутым темам, а также существенно более полный список ссылок.

Хочу поблагодарить Джен Слимович за обсуждения и полезные замечания, касающиеся ранней версии рукописи.

Лекция 1

Основные понятия

Симплектическая геометрия — это геометрия кососимметрической формы. Пусть M — многообразие размерности $2n$. *Симплектической формой* (или *симплектической структурой*) на M называется замкнутая невырожденная 2-форма ω. Невырожденность означает, что равенство $\omega(v, w) = 0$ выполняется для всех $w \in TM$ только при $v = 0$. Если форма ω невырожденна, то отображение

$$I_\omega \colon T_pM \to T_p^*M, \quad v \mapsto \iota(v)\omega = \omega(v, \cdot)$$

инъективно и, следовательно, является изоморфизмом. Основным примером симплектической формы служит форма

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + \ldots + dx_n \wedge dy_n$$

на $\mathbb{R}^{2n}$.

Вот несколько важных вопросов.

1. Можно ли получить геометрическое представление о структуре, определенной симплектической формой?

2. На каких многообразиях существует симплектическая структура?

3. При каком условии два симплектических многообразия (например, два открытых множества в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$) симплектоморфны?

Определение 1.1. Диффеоморфизм $\varphi \colon (M, \omega) \to (M', \omega')$ называется *симплектоморфизмом*, если $\varphi^*(\omega') = \omega$. Группа всех симплектоморфизмов многообразия M на себя обозначается $\mathrm{Symp}(M)$.

§ 1.1. Существование симплектоморфизмов

Пусть дана функция $H \colon M \to \mathbb{R}$; мы будем называть ее *энергией* или *гамильтонианом*. Определим на M векторное поле X_H формулой

$$\iota(X_H)\omega = dH.$$

Заметим, что векторное поле $X_H = (I_\omega)^{-1}(dH)$ определено корректно, так как форма ω невырожденна. Некоторые авторы ставят знак минус в определении X_H. Если многообразие M компактно, то векторное поле X_H порождает поток φ_t^H, сохраняющий форму ω, поскольку выполняется равенство

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = \iota(X_H)\, d\omega + d(\iota(X_H)\omega) = ddH = 0.$$

Здесь использовались оба свойства формы ω: ее замкнутость и невырожденность. Равенство

$$dH(X_H) = (\iota(X_H)\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$$

показывает, что векторное поле X_H касается поверхностей уровня функции H. Поэтому поток φ_t^H сохраняет функцию H.

Пример 1.2. Пусть функция $H: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ задается равенством $H(x, y) = y$ и $\omega = dx \wedge dy$. Тогда

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \varphi_t^H(x, y) = (x + t, y).$$

Если $H: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ и $\omega = \omega_0$, то

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Интегральные траектории $(x_i(t), y_i(t)) = \varphi_t(x(0), y(0))$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Например, для $H = \frac{1}{2}\sum ({x_j}^2 + {y_j}^2)$ траектории представляют собой окружности. В комплексных координатах $z_j = x_j + iy_j$ имеет место равенство

$$\varphi_t^H(z_1, \ldots, z_n) = (e^{-it}z_1, \ldots, e^{-it}z_n).$$

Таким образом, мы получили действие окружности на $\mathbb{R}^{7n} = \mathbb{C}$. Функция H, порождающая его, называется *отображением момента* этого действия.

Упражнение 1.3. Часто оказывается полезным рассматривать функции Гамильтона, зависящие от времени:

$$H: M \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \qquad H(p, t) = H_t(p).$$

Можно определить векторное поле X_{H_t} так же, как и ранее. Соотвествующий поток φ_t^H также состоит из симплектоморфизмов, причем $\varphi_0^H = id$. При этом имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}(\varphi_x^H(p)) = X_{H_t}(\varphi_t^H(p)), \qquad p \in M, \qquad t \in [0, 1].$$

Такое семейство называется *гамильтоновой изотопией*. Покажите, что всевозможные отображения вида φ_1^H образует подгруппу в $\mathrm{Symp}(M)$. Она называется группой *гамильтоновых симплектоморфизмов* $\mathrm{Ham}(M)$. Ее элементы часто называют *точными* симплектоморфизмами.

§ 1.2. Линейная симплектическая геометрия

Рассмотрим подробно, что происходит в касательном пространстве в некоторой фиксированной точке симплектического многообразия. Как будет видно далее, симплектическая геометрия этого пространства в некотором смысле помнит достаточно много о симплектической структуре на всем многообразии. Более того, структура в точке, как ни странно, имеет тесную связь с нелинейными эффектами. Одним из примеров является теорема Дарбу. Нетрудно показать, что с точностью до изоморфизма на данном конечномерном векторном пространстве существует ровно одна симплектическая структура. Теорема Дарбу утверждает, что на гладком многообразии локально (т. е. в окрестности некоторой точки) также существует ровно одна симплектическая структура. Другими словами, каждая симплектическая форма ω на M локально симплектоморфна стандартной форме ω_0 на $\mathbb{R}^{2n}$. Можно было бы подумать, что поэтому не существует интересных локальных структур. Однако это не так — мы увидим далее, что стандартная структура ω_0 на $\mathbb{R}^{2n}$ очень интересна сама по себе.

Рассмотрим векторное пространство V над $\mathbb{R}$ с невырожденной кососимметрической билинейной формой ω:

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v),$$

из равенства $\omega(v, w) = 0$ для всех $v \in V$ следует, что $w = 0$. Основным примером служит $\mathbb{R}^{2n}$ с формой ω_0.

Для подпространства W определим (*симплектическое*) *ортогональное дополнение* W^ω следующим образом:

$$W^\omega = \{v\colon \omega(v, w) = 0 \text{ для всех } w \in W\}.$$

Лемма 1.4. *Справедливо равенство* $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$.

Доказательство. Достаточно проверить, что отображение

$$I\colon V \to W^*, \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)|_W$$

является сюръективным, а его ядро совпадает с W^ω. □

Подпространство W называется *симплектическим*, если ограничение $\omega|_W$ невырожденно. Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Подпространство W симплектическое*

$$\Leftrightarrow \quad W \cap W^\omega = \{0\} \quad \Leftrightarrow \quad V \cong W \oplus W^\omega.$$

Доказательство предоставляется в качестве упражнения. □

Подпространство W называется *изотропным*, если $W \subset W^\omega$, и *лагранжевым*, если $W = W^\omega$. В последнем случае $\dim W = n$ по лемме 1.4.

Предложение 1.6. *Любое симплектическое векторное пространство изоморфно* $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ *для подходящего* n.

Доказательство. Базис $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ для (V, ω) будем называть *стандартным*, если для любых i, j выполняются равенства

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0, \quad \omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Очевидно, что в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ такой базис существует. Линейное отображение, переводящее один такой базис в другой, сохраняет и симплектическую форму. Таким образом, для завершения доказательства достаточно построить стандартный базис для (V, ω).

Для этого выберем произвольный вектор $u_1 \neq 0$. Выберем v так, чтобы выполнялось условие $\omega(u_1, v) = \lambda \neq 0$, и положим $v_1 = v/\lambda$. Пусть W — линейная оболочка элементов u_1, v_1. Тогда W — симплектическое подпространство, и поэтому $V = W \oplus W^\omega$ по лемме 1.7. По индукции можно предположить, что W^ω уже имеет стандартный базис $u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n$. Легко видеть, что, добавив к нему u_1, v_1, мы получим стандартный базис для (V, ω). □

Упражнение 1.7. 1. Покажите, что если L — лагранжево подпространство симплектического векторного пространства (V, ω), то любой базис $u_1, \ldots, u_n$ пространства V можно расширить до стандартного базиса $u_1, v_1, \ldots, u_n, v_n$ пространства (V, ω). Указание. Следует выбрать $v_1 \in W^\omega$, где W — линейная оболочка элементов $u_2, \ldots, u_n$.

2. Покажите, что (V, ω) симплектоморфно пространству $(L \oplus L^*, \tau)$, где

$$\tau\big((l, v^*), (l', v'*)\big) = v'*(l) - v^*(l').$$

Следующее упражнение устанавливает связь симплектической структуры в точке с гамильтоновыми потоками, рассмотренными ранее.

Упражнение 1.8. 1. Проверьте, что каждое подпространство W коразмерности 1 *коизотропно* в том смысле, что $W^\omega \subset W$. Заметим, что подпространство W^ω одномерно. По очевидным причинам его направление называется *нулевым* направлением в W.

2. Пусть $H\colon M \to \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция, а $Q = H^{-1}(c)$ — регулярная поверхность уровня. Докажите, что

$$X_H(p) \in (T_pQ)^\omega \quad \text{для всех } p \in Q.$$

Тем самым, направление X_H определяется поверхностью уровня Q. Заметим, что его длина определяется функцией H.

Упражнение 1.9. Покажите, что для произвольной симплектической формы ω на векторном пространстве размерности $2n$ ее n-я внешняя степень ω^n не обращается в нуль. Покажите, что n-я внешняя степень $\Omega = \omega^n$ симплектической формы ω на $2n$-мерном симплектическом многообразии является формой объема. Покажите, что симплектоморфизм сохраняет форму объема.

§ 1.3. Кокасательное расслоение

Другим важным примером симплектического многообразия служит кокасательное расслоение. Зададим на кокасательном расслоении T^*X каноническую 1-форму λ_{can} следующим образом:

$$(\lambda_{\mathrm{can}})_{(x,v^*)}(w) = v^*\big(\pi_*(w)\big) \quad \text{для } w \in T_{(x,v^*)}(T^*X),$$

где $\pi\colon T^*X \to X$ является проекцией. Здесь x — точка из X, $v^* \in T_x^*X$. Тогда $\Omega_{\mathrm{can}} = -d\lambda_{\mathrm{can}}$ — симплектическая форма. Очевидно, что слои расслоения $\pi\colon T^*X \to X$ являются лагранжевыми относительно Ω_{can}. Более того, легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.10. *Пусть $\sigma_\alpha\colon X \to T^*X$ — сечение, заданное 1-формой α на X. Тогда $\sigma_\alpha^*(\lambda_{\mathrm{can}}) = \alpha$. Следовательно, многообразие $\sigma_\alpha(X)$ лагранжево тогда и только тогда, когда форма α замкнута.*

Упражнение 1.11. 1. Рассмотрим функцию H на X и положим $\widetilde{H} = H \circ \pi$. Опишите соответствующий поток на T^*X.

2. Каждый диффеоморфизм φ на X определяет диффеоморфизм $\widetilde{\varphi}$ кокасательного расслоения T^*X посредством формулы

$$\widetilde{\varphi}(x, v^*) = (\varphi(x), (\varphi^{-1})^*v^*).$$

Покажите, что $\widetilde{\varphi}^*(\lambda_{\mathrm{can}}) = \lambda_{\mathrm{can}}$.

3. Пусть φ_t — поток на X, порожденный векторным полем Y, а $\widetilde{\varphi}_t$ — поднятие этого потока на T^*X. Покажите, что гамильтониан $H\colon T^*X \to \mathbb{R}$, порождающий этот поток, имеет вид

$$H(x, v^*) = v^*(Y(x)).$$

Указание. Воспользуйтесь п. 2 и выпишите определяющее уравнение для $\widetilde{Y} = X_H$, используя форму λ_{can}.

Лекция 2

Метод Мозера

В этой лекции мы рассмотрим метод, принадлежащий Мозеру [M], который позволяет доказать локальную гибкость симплектической структуры. Основное утверждение состоит в следующем.

Лемма 2.1. *Пусть ω_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — такое семейство симплектических форм на замкнутом многообразии M, что производная по времени образует семейство точных форм, иными словами,*

$$\dot{\omega}_t = d\sigma_t,$$

где σ_t — гладкое семейство 1-форм. Тогда существует такое гладкое семейство диффеоморфизмов φ_t, что $\varphi_0 = id$ и

$$\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0.$$

Доказательство. Мы построим φ_t как поток некоторого векторного поля X_t, зависящего от времени. Мы знаем, что

$$\begin{gathered}\varphi_t^*(\omega_t) = \omega \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad \dot{\omega}_t + \iota(X_t)d\omega_t + d(\iota(X_t)\omega_t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d(\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t) = 0.\end{gathered}$$

Последнее уравнение очевидным образом выполняется, если $\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t = 0$. Заметим, что при любом выборе 1-формы σ_t последнее уравнение всегда имеет решение относительно X_t вследствие невырожденности ω_t. Отсюда следует, что всегда существует подходящее векторное поле X_t, а следовательно, и семейство φ_t, что и требовалось доказать. □

Замечание 2.2. 1. Условие $\dot{\omega}_t = d\sigma_t$ эквивалентно требованию независимости от t класса когомологий $[\omega_t]$. Если класс когомологий $[\omega_t]$ не зависит от времени, то производная $\dot{\omega}_t$ является точной формой для каждого t, т. е. при каждом t существует форма σ_t, для которой $\dot{\omega}_t = d\sigma_t$. Следовательно, проблема сводится к построению семейства 1-форм σ_t, гладко зависящих от t. Это можно сделать различными способами (например, используя теорию Ходжа, см. также книгу Ботта и Ту [BT]).

2. В предыдущей лемме используется тот факт, что формы ω_t замкнуты, а также то, что уравнение $\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t = 0$ всегда имеет решение. Последнее возможно только для невырожденных 2-форм и для ненулевых форм максимальной размерности. В частности, доказательство применимо к формам объема. Обратим внимание на то, что этот случай существенно отличается от симплектического,

так как не возникает проблем при задании гомотопий форм объема. В самом деле, множество форм объема, принадлежащих данному классу когомологий, выпукло. Действительно, если ω_0, ω_1 — формы объема, задающие одну и ту же ориентацию, то формы

$$(1-t)\omega_0 + t\omega_t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

также являются формами объема. Поэтому все такие формы диффеоморфны. Это рассуждение не проходит в случае симплектических форм. В качестве упражнения читателю предлагается найти соответствующий контрпример.

Из этого замечания, в частности, следует, что нельзя получить новые интересные симплектические структуры путем деформации заданной симплектической формы внутри ее класса когомологий, иными словами, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.3 (теорема устойчивости Мозера). *Пусть ω_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, — семейство симплектических форм на замкнутом многообразии M, принадлежащих одному классу когомологий. Тогда существует такая изотопия φ_t, что $\varphi_0 = id$ и $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$ для всех t.*

В других следствиях метод Мозера применяется к некомпактным многообразиям M. В этом случае для того чтобы определить поток векторного поля X_t, необходимо следить за областью, в которой векторное поле отлично от нуля. Так как $X_t = 0 \ \Leftrightarrow \ \sigma_t = 0$, этот вопрос сводится к изучению носителя формы σ_t. В качестве иллюстрации докажем теорему Дарбу.

Теорема 2.4 (Дарбу). *Любое симплектическое многообразие M локально диффеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$ со стандартной симплектической формой ω_0.*

Доказательство. Рассмотрим в окрестности U_p данной точки p многообразия M локальные координаты

$$\psi\colon U_p \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\psi(p) = 0$. Нам нужно показать, что форма ω', полученная как прямой образ формы ω при отображении ψ, может быть приведена к стандартной форме ω_0 диффеоморфизмом окрестности нуля в $\mathbb{R}^{2n}$. Согласно предложению 1.6 можно выбрать ψ так, чтобы в точке 0 выполнялось равенство $\omega' = \omega_0$. Рассмотрим семейство дифференциальных форм

$$\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega'.$$

Так как $\omega_t = \omega_0$ в точке 0 по построению, а невырожденность — условие, выполняющееся на открытых множествах, существует открытый шар U в $\mathbb{R}^{2n}$, содержащий 0 и такой, что на нем все эти формы невырожденны. Заметим, что $\dot{\omega}_t = \omega' - \omega_0$. Поскольку шар U стягиваем, существует такая 1-форма σ, что $d\sigma = \omega' - \omega_0$. Кроме того, вычитанием постоянной формы $\sigma(0)$ можно добиться того, чтобы в точке 0 выполнялось равенство $\sigma = 0$. В этом случае соответствующее семейство векторных полей X_t обращается в нуль в точке 0. Допустим, что φ_t — частично определенный поток для векторных полей X_t. Так как 0 — неподвижная точка, очевидно, существует такая достаточно малая окрестность V

точки 0, что орбиты $\varphi_t(p)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, точек p из V целиком лежат внутри шара U. Следовательно, отображения φ_t определены на V и $\varphi_1^*(\omega') = \omega_0$. □

Еще одно доказательство теоремы Дарбу (а также многое другое) содержится в книге Арнольда [A]. В следующих приложениях эта идея используется для окрестностей подмногообразий M. Основной результат формулируется следующим образом.

Предложение 2.5. *Пусть* ω_0, ω_1 — *две симплектические формы на* M, *которые совпадают на ограничении касательного расслоения многообразия* M *на некоторое подмногообразие* Q, *т. е.*

$$\omega_0|_{T_pM} = \omega_1|_{T_pM} \quad \text{для } p \in Q.$$

Тогда существует такой диффеоморфизм φ *многообразия* M *на себя, что*

$$\varphi(p) = p \quad \text{для } p \in Q, \qquad \varphi^*(\omega_1) = \omega_0 \quad \text{в окрестности подмногообразия } Q.$$

Доказательство. Вновь рассмотрим формы $\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega_1$. Как и в предыдущем случае, они невырожденны в некоторой окрестности подмногообразия Q. Более того, форма

$$\dot{\omega}_t = \omega_1 - \omega_0$$

точна в некоторой окрестности подмногообразия Q. Подходящим образом изменив доказательство леммы Пуанкаре (например, см. [BT]), можно найти 1-форму σ, которая обращается в 0 во всех точках из Q и удовлетворяет условию $d\sigma = \omega_1 - \omega_0$. Тогда соответствующие векторные поля X_t также обращаются в 0 на Q и задают искомое семейство диффеоморфизмов φ_t в окрестности подмногообразия Q. □

Более интересные результаты можно получить, рассматривая специальные подмногообразия Q. Рассмотрим, например, симплектическое подмногообразие[1)] Q в (M, ω). Тогда по лемме 1.5 нормальное расслоение $\nu_Q = TM/TQ$ подмногообразия Q можно отождествить с ортогональным дополнением $(TQ)^\omega$ к TQ. Более того, ограничение формы ω на ν_Q порождает симплектическую структуру на этом расслоении: это означает, что каждый слой имеет естественную симплектическую структуру, которая сохраняется функциями склейки расслоения (см. лекцию 3).

Следствие 2.6 (теорема о симплектической окрестности). *Пусть* ω_0, ω_1 — *симплектические формы на* M, *ограничения которых на подмногообразие* Q *совпадают с симплектической формой* ω_Q *на* Q. *Кроме того, потребуем, чтобы* ω_0 *и* ω_1 *индуцировали изоморфные симплектические структуры на нормальном расслоении* ν_Q. *Тогда существует диффеоморфизм* φ *на* M, *оставляющий неподвижными точки из* Q, *для которого* $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$ *в окрестности подмногообразия* Q.

[1)] Подмногообразие Q из M называется симплектическим, если ограничение формы ω на Q является симплектической формой, или, что то же самое, все касательные пространства T_pQ, $p \in Q$, являются симплектическими подпространствами в T_pM. Аналогично Q называется лагранжевым, если $\omega|_Q \equiv 0$ и $\dim Q = n$.

Доказательство. Из условий следует, что существует линейный изоморфизм
$$L\colon TM|_Q \to TM|_Q,$$
тождественный на подрасслоении TQ и такой, что $L^*(\omega_1) = \omega_0$. Легко видеть, что L можно реализовать в виде диффеоморфизма ψ многообразия M на себя, оставляющего неподвижными точки из Q. Иначе говоря, существует диффеоморфизм, для которого $d\psi_p = L_p$ в каждой точке из Q. Тогда
$$\omega_0|_{T_pM} = \psi^*\omega_1|_{T_pM}, \quad p \in Q,$$
и требуемое утверждение следует из предложения 2.5. □

В следующей лекции будет показано, что задание класса изоморфизма симплектических структур на некотором расслоении эквивалентно заданию класса изоморфизма комплексных структур на нем. Поэтому условие согласованности форм ω_0 и ω_1 на нормальном расслоении подмногообразия Q является довольно слабым. Например, если Q имеет коразмерность 2, то все, что необходимо проверить, — это то, что обе формы индуцируют одинаковую ориентацию на нормальном расслоении, поскольку класс Эйлера (или первый класс Чженя) ν_Q определен с точностью до знака топологией расслоения.

Другой важный случай — когда подмногообразие Q лагранжево. В этом случае можно показать, что нормальное расслоение ν_Q канонически изоморфно двойственному расслоению $(TQ)^*$. Более того, это двойственное расслоение также лагранжево (см. упражнение 1.7). Таким образом, если подмногообразие Q лагранжево относительно как ω_0, так и ω_1, то всегда существует линейный изоморфизм
$$L\colon TM|_Q \to TM|_Q,$$
тождественный на TQ и такой, что $L^*(\omega_1) = \omega_0$. Кроме того, как и в случае теоремы Дарбу, существует стандартная модель для Q, а именно нулевое сечение кокасательного расслоения $(T^*Q, \Omega_{\mathrm{can}})$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 2.7 (теорема Вайнштейна о лагранжевой окрестности). *Каждое лагранжево подмногообразие Q симплектического многообразия (M, ω) имеет окрестность, симплектоморфную окрестности нулевого сечения в кокасательном расслоении $(T^*Q, \Omega_{\mathrm{can}})$.*

Упражнение 2.8. Пусть даны две какие-либо диффеоморфные замкнутые гладкие области U, V в $\mathbb{R}^n$, имеющие одинаковый объем. Покажите, что существует диффеоморфизм $\varphi\colon U \to V$, сохраняющий объем.

Указание. Следует выбрать произвольный диффеоморфизм $\psi\colon U \to V$ и рассмотреть формы ω_0, $\omega_1 = \psi^*(\omega_0)$ на U, а затем подправить диффеоморфизм вблизи границы ∂U так, чтобы выполнялось равенство $\omega_0 = \omega_1$ во всех точках из ∂U и использовать метод Мозера, чтобы добиться согласованности форм внутри области.

Завершим лекцию важным результатом Баньяга о продолжении симплектической изотопии. Доказательство остается читателю в качестве упражнения.

Предложение 2.9 (продолжение изотопии). *Пусть Q — компактное подмногообразие симплектического многообразия (M, ω). Предположим, что существует семейство таких диффеоморфизмов $\varphi_t\colon M \to M$, что $\varphi_0 = id$*

и $\varphi_t^*(\omega) = \omega$ *в окрестности* Q. *Тогда если для любого относительного цикла* $Z \in H_2(M,\, Q)$ *выполняется равенство*

$$\int\limits_Z \varphi_t^*(\omega) = \int\limits_Z \omega,$$

то существуют такое семейство симплектических диффеоморфизмов ψ_t *и такая окрестность* U *подмногообразия* Q, *что* $\psi_t(p) = \varphi_t(p)$ *для всех* $p \in U$.