

ЛЕКЦИИ

ПО СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ
ГЕОМЕТРИИ
И ТОПОЛОГИИ

 **IAS/PARK CITY
MATHEMATICS SERIES**

Volume 7

Symplectic Geometry and Topology

**Yakov Eliashberg
Lisa Traynor
Editors**



**American Mathematical Society
Institute for Advanced Study**

Лекции по симплектической геометрии и топологии

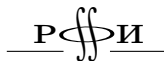
Под редакцией Я. Элиашберга
и Л. Трейнор

Перевод с английского
Ж. Т. Гавриловой, Ф. Ю. Попеленского

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 51(07)
ББК 22.1
С37

Издание осуществлено при поддержке РФФИ



Симплектическая геометрия и топология / Под ред. Я. Элиашберга, Л. Трейнора. Пер. с англ. Ж. Т. Гавриловой, Ф. Ю. Попеленского. — М.: МЦНМО, 2008. — 424 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-130-8

Книга представляет собой записи лекций, посвященных симплектической топологии и современным проблемам этой новой области математики. Авторы сборника — известные математики, внесшие большой вклад в развитие этой теории: Д. Мак-Дафф, Х. Хофер, К. Таубс, Д. Саламон, А. Гивенталь, Р. Макферсон, Дж. Марсен и другие. Материал лекций удачно подобран, так что книга является хорошим введением в рассматриваемый круг вопросов. Книга предназначена для студентов и научных сотрудников физико-математических специальностей.

ББК 22.1

This work was originally published in English by the American Mathematical Society under the title *Symplectic Geometry and Topology*, ©1999, American Mathematical Society. The present translation was created under authority of the American Mathematical Society and is published by permission.

Подписано в печать 01.03.2008 г. Формат 70 × 100 ¹/₁₆. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 26,5. Тираж 400 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-130-8



9 785940 571308 >

ISBN 0-8218-0838-9 (англ.)

© AMS, 1999.
© МЦНМО, 2008.

Оглавление

Дуза Мак-Дафф

Введение в симплектическую топологию	11
Введение	11
Лекция 1. Основные понятия	12
§ 1.1. Существование симплектоморфизмов	12
§ 1.2. Линейная симплектическая геометрия	13
§ 1.3. Кокасательное расслоение	15
Лекция 2. Метод Мозера	17
Лекция 3. Линейная теория	22
§ 3.1. Почти комплексные структуры, согласованные с формой ω . .	24
§ 3.2. Векторные расслоения	25
§ 3.3. Лагранжев грассманиан	26
§ 3.4. Индекс Маслова	27
Лекция 4. Емкость и теорема о несжимаемости	29
§ 4.1. Предварительные сведения о J -голоморфных кривых	32
Лекция 5. набросок доказательства теоремы о несжимаемости	34
§ 5.1. Теория Фредгольма	35
§ 5.2. Компактность	36
Литература	38

Хельмут Хофер

Голоморфные кривые и динамика в трехмерном пространстве	39
Лекция 1. Задачи, основные понятия и обзор результатов	39
§ 1.1. Периодические траектории гладких векторных полей на трехмерных многообразиях	39
§ 1.2. Голоморфные кривые и динамика	46
§ 1.3. Топология и более тонкие аспекты динамики Роба	49
Лекция 2. Аналитические методы	58
§ 2.1. Оценки	58
§ 2.2. Анализ выдуваний проективных прямых	61
§ 2.3. Поведение вблизи выколотой точки	63
Лекция 3. Гипотеза Вайнштейна для перекрученного случая	70
§ 3.1. Явное локальное семейство Бишопы	70

§ 3.2. Теорема о неявной функции в окрестности вложенного диска	73
§ 3.3. Промежуточные итоги, продолжение семейств Бишопа	82
Лекция 4. Гипотеза Вайнштейна для тугой контактной формы	91
§ 4.1. набросок доказательства	91
§ 4.2. Глобальная единственность для семейств псевдоголоморфных дисков	91
Лекция 5. Заключительные замечания	99
Литература	100

Майкл Хатчинс, Клиффорд Генри Таубс

Введение в теорию Зайберга—Виттена для симплектических многообразий 105

Введение	105
Лекция 1. Основные сведения из дифференциальной геометрии	106
§ 1.1. Векторные расслоения	106
§ 1.2. Связности	108
§ 1.3. Метрики	110
§ 1.4. Кривизна	110
§ 1.5. Автодуальные 2-формы	111
Лекция 2. Спинорные структуры и уравнения Зайберга—Виттена	113
§ 2.1. Главные и ассоциированные расслоения	113
§ 2.2. $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структуры	114
§ 2.3. Некоторые сведения из теории групп	115
§ 2.4. Спинорные расслоения	116
§ 2.5. Клиффордово умножение	117
§ 2.6. Спинорная связность	117
§ 2.7. Оператор Дирака	119
§ 2.8. Уравнения Зайберга—Виттена	119
Лекция 3. Инварианты Зайберга—Виттена	121
§ 3.1. Калибровочные преобразования	121
§ 3.2. Основные свойства пространства модулей	122
§ 3.3. Возникновение в условиях b_+^2	123
§ 3.4. набросок доказательства компактности пространств \mathcal{M} и \mathcal{M}^0	124
§ 3.5. Инварианты Зайберга—Виттена	126
§ 3.6. Примеры и приложения	127
Лекция 4. Симплектический случай, часть I	128
§ 4.1. Формулировка результата	128
§ 4.2. Каноническая $\text{Spin}^{\mathbb{C}}$ -структура	129
§ 4.3. Шаг 1: интерпретация уравнения Дирака	130
§ 4.4. Шаг 2: деформация уравнения кривизны	132
§ 4.5. Единственность решения	132
§ 4.6. Дополнение: оценка β	134

Лекция 5. Симплектический случай, часть II	135
§ 5.1. Обзор результатов предыдущей лекции	135
§ 5.2. Мотивировка	136
§ 5.3. Теория Зайберга—Виттена и псевдоголоморфные кривые	136
§ 5.4. Определение инварианта Громова	137
Литература	140

Дитмар Саламон

Лекции о гомологиях Флоера **141**

Введение	141
Лекция 1. Симплектические неподвижные точки и теория Морса	142
§ 1.1. Гипотеза Арнольда	142
§ 1.2. Условие монотонности	144
§ 1.3. Комплекс Морса—Смейла—Виттена	145
§ 1.4. Функционал симплектического действия	150
§ 1.5. Связывающие траектории	151
§ 1.6. Пространства модулей	153
Лекция 2. Теория Фредгольма	155
§ 2.1. Операторы Фредгольма	155
§ 2.2. Линеаризация оператора	156
§ 2.3. Оценки соболевских норм	157
§ 2.4. Индекс Конли—Цендера	162
§ 2.5. Спектральный поток	163
§ 2.6. Трансверсальность	165
§ 2.7. Экспоненциальная сходимость	168
Лекция 3. Гомологии Флоера	170
§ 3.1. Компактность	170
§ 3.2. Гомологии Флоера	174
§ 3.3. Теорема Флоера о склейке	176
§ 3.4. Инвариантность гомологий Флоера	179
§ 3.5. Естественный изоморфизм	183
§ 3.6. Многообразия Калаби—Яу	184
§ 3.7. Кольца Новикова	185
§ 3.8. Еще о гомологиях Флоера	186
Лекция 4. Компактность по Громову и устойчивые отображения	188
§ 4.1. Выдувание проективных прямых	188
§ 4.2. Устойчивые отображения	192
§ 4.3. Компактификация Делиния—Мамфорда	199
Лекция 5. Многозначные возмущения	206
§ 5.1. J -голоморфные сферы с отрицательным числом Чженя	206
§ 5.2. Многозначные возмущения	208
§ 5.3. Локальные срезы	211
§ 5.4. Разветвленные пространства модулей	215

§ 5.5. Возмущения и устойчивые отображения	222
§ 5.6. Рациональные инварианты Громова—Виттена	224
§ 5.7. Рациональные гомологии Флоера	226
Литература	231

Александр Гивенталь

Введение в теорию квантовых когомологий 235

Введение	235
Лекция 1. Пространства модулей устойчивых отображений	238
§ 1. Пример: квантовые когомологии комплексных проективных пространств	238
§ 2. Устойчивые отображения	239
Лекция 2. Инварианты Громова—Виттена	243
Лекция 3. $QH^*(G/B)$ и квантовые решетки Тоды	250
Лекция 4. Теория особенностей	256
Лекция 5. Решетки Тоды и гипотеза о зеркальной симметрии	262
Литература	265

Майкл Гринберг, Роберт Макферсон

Эйлеровы характеристики и лагранжевы пересечения 267

Введение	267
Лекция 1	268
§ 1.1. Основная теорема	268
§ 1.2. Стратификации	268
§ 1.3. Трансверсальность	269
§ 1.4. Эйлеровы характеристики конструктивных функций	269
§ 1.5. Гомологическое \cap -произведение циклов	270
§ 1.6. Характеристический цикл в одномерном случае	271
Лекция 2	273
§ 2.1. Конормальное многообразие стратификации	273
§ 2.2. Условия Уитни	273
§ 2.3. Типичные ковекторы	274
§ 2.4. Полулинк	275
§ 2.5. Характеристический цикл	275
§ 2.6. Знаки	276
Лекция 3	277
§ 3.1. Классическая теория Морса	277
§ 3.2. Стратифицированная теория Морса	278
§ 3.3. Комментарии	280
Лекция 4	281
§ 4.1. Стандартные пары	281

§ 4.2. Доказательство теоремы 1.1. Общий случай	282
§ 4.3. Функторы Фэри	283
Лекция 5	286
§ 5.1. Функторы Фэри: комментарии и примеры	286
§ 5.2. Монодромия	287
§ 5.3. Эйлеровы характеристики	288
§ 5.4. Двойственность Пуанкаре—Вердье	288
§ 5.5. Локальные системы Морса	289
§ 5.6. Превратные пучки	290
Литература	291

Ли́за С. Дже́ффри

Гамильтоново действие групп и симплектическая редукция 293

Лекция 1. Введение в гамильтоново действие групп	293
§ 1.1. Некоторые элементарные свойства отображений момента	294
§ 1.2. Симплектический фактор	296
§ 1.3. Теорема о нормальной форме	297
Лекция 2. Геометрия отображения момента	299
§ 2.1. Теоремы выпуклости	299
§ 2.2. Многогранник момента	299
§ 2.3. Теорема Дюйстермата—Хекмана, версия I	300
§ 2.4. Действия на многогранниках момента	301
§ 2.5. Симплектическое обрезание	302
§ 2.6. Торические многообразия	302
Лекция 3. Эquivariantные когомологии и модель Картана	304
§ 3.1. Модель Картана	305
§ 3.2. Эquivariantные характеристические классы	305
§ 3.3. Теорема об абелевой локализации	307
Лекция 4. Теорема Дюйстермата—Хекмана и приложения к когомологиям симплектических факторов	310
§ 4.1. Приближение стационарной фазы	310
§ 4.2. Естественное отображение $\chi: H_G^*(M) \rightarrow H^*(M_{\text{red}})$	311
§ 4.3. Замечания о квантовании и теории представлений	312
§ 4.4. Неабелева локализация	313
Лекция 5. Пространства модулей векторных расслоений над римановыми поверхностями	316
§ 5.1. Якобиан	316
§ 5.2. Якобиан как симплектический фактор	317
§ 5.3. Пространство модулей плоских связностей на римановой поверхности	318
§ 5.4. Линейное расслоение над пространством модулей плоских связностей	318

Упражнения	320
Лекции 1 и 2	320
Лекции 3–5	322
Литература	326

Джерольд Е. Марсден

Лекции по механике, динамике и симметрии **329**

Введение	329
Лекция 1. Редукции механических систем с симметриями	330
Лекция 2. Теория устойчивости, динамика подводных движущихся объектов и фазы	344
Лекция 3. Системы с ограничениями типа качения и перемещение	364
Лекция 4. Оптимальное управление и стабилизация систем, балансирующих около положения равновесия	376
Лекция 5. Вариационные интеграторы	386
Литература	407

Дуза Мак-Дафф

ВВЕДЕНИЕ В СИМПЛЕКТИЧЕСКУЮ ТОПОЛОГИЮ

Введение

Вместо того чтобы пытаться дать всесторонний обзор симплектической топологии, мы сосредоточим внимание на трех важных темах, а именно на методе Мозера, которому посвящена лекция 2, на понятии емкости (см. лекцию 4) и на доказательстве Громова теоремы о несжимаемости (см. лекцию 5). Метод Мозера демонстрирует значительную гибкость симплектической структуры, тогда как остальные две темы относятся к ее жесткости. Довольно много внимания мы уделяем линейной теории, поскольку она лежит в основе всего остального. В последней лекции мы кратко описываем некоторые методы из теории J -голоморфных сфер с целью знакомства с этой замечательной и мощной техникой.

Система обозначений соответствует принятой в [MS1] и [MS2]. Читатели могут найти в этих работах детали по всем упомянутым темам, а также существенно более полный список ссылок.

Хочу поблагодарить Джен Слимович за обсуждения и полезные замечания, касающиеся ранней версии рукописи.

Основные понятия

Симплектическая геометрия — это геометрия кососимметрической формы. Пусть M — многообразие размерности $2n$. Симплектической формой (или симплектической структурой) на M называется замкнутая невырожденная 2-форма ω . Невырожденность означает, что равенство $\omega(v, \omega) = 0$ выполняется для всех $\omega \in TM$ только при $v = 0$. Если форма ω невырождена, то отображение

$$I_\omega: T_p M \rightarrow T_p^* M, \quad v \mapsto \iota(v)\omega = \omega(v, \cdot)$$

инъективно и, следовательно, является изоморфизмом. Основным примером симплектической формы служит форма

$$\omega_0 = dx_1 \wedge dy_1 + \dots + dx_n \wedge dy_n$$

на \mathbb{R}^{2n} .

Вот несколько важных вопросов.

1. Можно ли получить геометрическое представление о структуре, определенной симплектической формой?
2. На каких многообразиях существует симплектическая структура?
3. При каком условии два симплектических многообразия (например, два открытых множества в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$) симплектоморфны?

Определение 1.1. Диффеоморфизм $\varphi: (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$ называется симплектоморфизмом, если $\varphi^*(\omega') = \omega$. Группа всех симплектоморфизмов многообразия M на себя обозначается $\text{Symp}(M)$.

§ 1.1. Существование симплектоморфизмов

Пусть дана функция $H: M \rightarrow \mathbb{R}$; мы будем называть ее энергией или гамильтонианом. Определим на M векторное поле X_H формулой

$$\iota(X_H)\omega = dH.$$

Заметим, что векторное поле $X_H = (I_\omega)^{-1}(dH)$ определено корректно, так как форма ω невырождена. Некоторые авторы ставят знак минус в определении X_H . Если многообразие M компактно, то векторное поле X_H порождает поток φ_t^H , сохраняющий форму ω , поскольку выполняется равенство

$$\mathcal{L}_{X_H}\omega = \iota(X_H)d\omega + d(\iota(X_H)\omega) = ddH = 0.$$

Здесь использовались оба свойства формы ω : ее замкнутость и невырожденность. Равенство

$$dH(X_H) = (\iota(X_H)\omega)(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$$

показывает, что векторное поле X_H касается поверхностей уровня функции H . Поэтому поток φ_t^H сохраняет функцию H .

Пример 1.2. Пусть функция $H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ задается равенством $H(x, y) = y$ и $\omega = dx \wedge dy$. Тогда

$$X_H = \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{и} \quad \varphi_t^H(x, y) = (x + t, y).$$

Если $H: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ и $\omega = \omega_0$, то

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial y_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

Интегральные траектории $(x_i(t), y_i(t)) = \varphi_t(x(0), y(0))$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Например, для $H = \frac{1}{2} \sum (x_j^2 + y_j^2)$ траектории представляют собой окружности. В комплексных координатах $z_j = x_j + iy_j$ имеет место равенство

$$\varphi_t^H(z_1, \dots, z_n) = (e^{-it} z_1, \dots, e^{-it} z_n).$$

Таким образом, мы получили действие окружности на $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$. Функция H , порождающая его, называется *отображением момента* этого действия.

Упражнение 1.3. Часто оказывается полезным рассматривать функции Гамильтона, зависящие от времени:

$$H: M \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(p, t) = H_t(p).$$

Можно определить векторное поле X_{H_t} так же, как и ранее. Соответствующий поток φ_t^H также состоит из симплектоморфизмов, причем $\varphi_0^H = id$. При этом имеет место соотношение

$$\frac{d}{dt}(\varphi_t^H(p)) = X_{H_t}(\varphi_t^H(p)), \quad p \in M, \quad t \in [0, 1].$$

Такое семейство называется *гамильтоновой изотопией*. Покажите, что всевозможные отображения вида φ_t^H образует подгруппу в $\text{Sym}(M)$. Она называется группой *гамильтоновых симплектоморфизмов* $\text{Ham}(M)$. Ее элементы часто называют *точными симплектоморфизмами*.

§ 1.2. Линейная симплектическая геометрия

Рассмотрим подробно, что происходит в касательном пространстве в некоторой фиксированной точке симплектического многообразия. Как будет видно далее, симплектическая геометрия этого пространства в некотором смысле помнит достаточно много о симплектической структуре на всем многообразии. Более того, структура в точке, как ни странно, имеет тесную связь с нелинейными эффектами. Одним из примеров является теорема Дарбу. Нетрудно показать, что с точностью до изоморфизма на данном конечномерном векторном пространстве существует ровно одна симплектическая структура. Теорема Дарбу утверждает,

что на гладком многообразии локально (т. е. в окрестности некоторой точки) также существует ровно одна симплектическая структура. Другими словами, каждая симплектическая форма ω на M локально симплектоморфна стандартной форме ω_0 на \mathbb{R}^{2n} . Можно было бы подумать, что поэтому не существует интересных локальных структур. Однако это не так — мы увидим далее, что стандартная структура ω_0 на \mathbb{R}^{2n} очень интересна сама по себе.

Рассмотрим векторное пространство V над \mathbb{R} с невырожденной кососимметрической билинейной формой ω :

$$\omega(v, w) = -\omega(w, v),$$

из равенства $\omega(v, w) = 0$ для всех $v \in V$ следует, что $w = 0$. Основным примером служит \mathbb{R}^{2n} с формой ω_0 .

Для подпространства W определим (*симплектическое*) *ортогональное дополнение* W^ω следующим образом:

$$W^\omega = \{v : \omega(v, w) = 0 \text{ для всех } w \in W\}.$$

Лемма 1.4. *Справедливо равенство $\dim W + \dim W^\omega = \dim V$.*

Доказательство. Достаточно проверить, что отображение

$$I: V \rightarrow W^*, \quad v \mapsto \omega(v, \cdot)|_W$$

является сюръективным, а его ядро совпадает с W^ω . □

Подпространство W называется *симплектическим*, если ограничение $\omega|_W$ невырожденно. Легко проверить, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Подпространство W симплектическое*

$$\Leftrightarrow W \cap W^\omega = \{0\} \quad \Leftrightarrow V \cong W \oplus W^\omega.$$

Доказательство предоставляется в качестве упражнения. □

Подпространство W называется *изотропным*, если $W \subset W^\omega$, и *лагранжевым*, если $W = W^\omega$. В последнем случае $\dim W = n$ по лемме 1.4.

Предложение 1.6. *Любое симплектическое векторное пространство изоморфно $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ для подходящего n .*

Доказательство. Базис $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ для (V, ω) будем называть *стандартным*, если для любых i, j выполняются равенства

$$\omega(u_i, u_j) = \omega(v_i, v_j) = 0, \quad \omega(u_i, v_j) = \delta_{ij}.$$

Очевидно, что в $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ такой базис существует. Линейное отображение, переводящее один такой базис в другой, сохраняет и симплектическую форму. Таким образом, для завершения доказательства достаточно построить стандартный базис для (V, ω) .

Для этого выберем произвольный вектор $u_1 \neq 0$. Выберем v так, чтобы выполнялось условие $\omega(u_1, v) = \lambda \neq 0$, и положим $v_1 = v/\lambda$. Пусть W — линейная оболочка элементов u_1, v_1 . Тогда W — симплектическое подпространство, и поэтому $V = W \oplus W^\omega$ по лемме 1.7. По индукции можно предположить, что W^ω уже имеет стандартный базис $u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$. Легко видеть, что, добавив к нему u_1, v_1 , мы получим стандартный базис для (V, ω) . □

Упражнение 1.7. 1. Покажите, что если L — лагранжево подпространство симплектического векторного пространства (V, ω) , то любой базис u_1, \dots, u_n пространства V можно расширить до стандартного базиса $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$ пространства (V, ω) . У к а з а н и е. Следует выбрать $v_1 \in W^\omega$, где W — линейная оболочка элементов u_2, \dots, u_n .

2. Покажите, что (V, ω) симплектоморфно пространству $(L \oplus L^*, \tau)$, где

$$\tau((l, v^*), (l', v'^*)) = v'^*(l) - v^*(l').$$

Следующее упражнение устанавливает связь симплектической структуры в точке с гамильтоновыми потоками, рассмотренными ранее.

Упражнение 1.8. 1. Проверьте, что каждое подпространство W коразмерности 1 *коизотропно* в том смысле, что $W^\omega \subset W$. Заметим, что подпространство W^ω одномерно. По очевидным причинам его направление называется *нулевым* направлением в W .

2. Пусть $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая гладкая функция, а $Q = H^{-1}(c)$ — регулярная поверхность уровня. Докажите, что

$$X_H(p) \in (T_p Q)^\omega \quad \text{для всех } p \in Q.$$

Тем самым, направление X_H определяется поверхностью уровня Q . Заметим, что его длина определяется функцией H .

Упражнение 1.9. Покажите, что для произвольной симплектической формы ω на векторном пространстве размерности $2n$ ее n -я внешняя степень ω^n не обращается в нуль. Покажите, что n -я внешняя степень $\Omega = \omega^n$ симплектической формы ω на $2n$ -мерном симплектическом многообразии является формой объема. Покажите, что симплектоморфизм сохраняет форму объема.

§ 1.3. Кокасательное расслоение

Другим важным примером симплектического многообразия служит кокасательное расслоение. Зададим на кокасательном расслоении T^*X каноническую 1-форму λ_{can} следующим образом:

$$(\lambda_{\text{can}})_{(x, v^*)}(\omega) = v^*(\pi_*(\omega)) \quad \text{для } \omega \in T_{(x, v^*)}(T^*X),$$

где $\pi: T^*X \rightarrow X$ является проекцией. Здесь x — точка из X , $v^* \in T_x^*X$. Тогда $\Omega_{\text{can}} = -d\lambda_{\text{can}}$ — симплектическая форма. Очевидно, что слои расслоения $\pi: T^*X \rightarrow X$ являются лагранжевыми относительно Ω_{can} . Более того, легко видеть, что справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.10. Пусть $\sigma_\alpha: X \rightarrow T^*X$ — сечение, заданное 1-формой α на X . Тогда $\sigma_\alpha^*(\lambda_{\text{can}}) = \alpha$. Следовательно, многообразие $\sigma_\alpha(X)$ лагранжево тогда и только тогда, когда форма α замкнута.

Упражнение 1.11. 1. Рассмотрим функцию H на X и положим $\tilde{H} = H \circ \pi$. Опишите соответствующий поток на T^*X .

2. Каждый диффеоморфизм φ на X определяет диффеоморфизм $\tilde{\varphi}$ кокасательного расслоения T^*X посредством формулы

$$\tilde{\varphi}(x, v^*) = (\varphi(x), (\varphi^{-1})^*v^*).$$

Покажите, что $\tilde{\varphi}^*(\lambda_{\text{can}}) = \lambda_{\text{can}}$.

3. Пусть φ_t — поток на X , порожденный векторным полем Y , а $\tilde{\varphi}_t$ — поднятие этого потока на T^*X . Покажите, что гамильтониан $H: T^*X \rightarrow \mathbb{R}$, порождающий этот поток, имеет вид

$$H(x, v^*) = v^*(Y(x)).$$

У к а з а н и е. Воспользуйтесь п. 2 и выпишите определяющее уравнение для $\tilde{Y} = X_H$, используя формулу λ_{can} .

Метод Мозера

В этой лекции мы рассмотрим метод, принадлежащий Мозеру [М], который позволяет доказать локальную гибкость симплектической структуры. Основное утверждение состоит в следующем.

Лемма 2.1. Пусть ω_t , $0 \leq t \leq 1$, — такое семейство симплектических форм на замкнутом многообразии M , что производная по времени образует семейство точных форм, иными словами,

$$\dot{\omega}_t = d\sigma_t,$$

где σ_t — гладкое семейство 1-форм. Тогда существует такое гладкое семейство диффеоморфизмов φ_t , что $\varphi_0 = id$ и

$$\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0.$$

Доказательство. Мы построим φ_t как поток некоторого векторного поля X_t , зависящего от времени. Мы знаем, что

$$\begin{aligned} \varphi_t^*(\omega_t) = \omega &\Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\varphi_t^*\omega_t) = 0 \Leftrightarrow \varphi_t^*(\dot{\omega}_t + \mathcal{L}_{X_t}\omega_t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \dot{\omega}_t + \iota(X_t)d\omega_t + d(\iota(X_t)\omega_t) = 0 \Leftrightarrow d(\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t) = 0. \end{aligned}$$

Последнее уравнение очевидным образом выполняется, если $\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t = 0$. Заметим, что при любом выборе 1-формы σ_t последнее уравнение всегда имеет решение относительно X_t вследствие невырожденности ω_t . Отсюда следует, что всегда существует подходящее векторное поле X_t , а следовательно, и семейство φ_t , что и требовалось доказать. \square

Замечание 2.2. 1. Условие $\dot{\omega}_t = d\sigma_t$ эквивалентно требованию независимости от t класса когомологий $[\omega_t]$. Если класс когомологий $[\omega_t]$ не зависит от времени, то производная $\dot{\omega}_t$ является точной формой для каждого t , т.е. при каждом t существует форма σ_t , для которой $\dot{\omega}_t = d\sigma_t$. Следовательно, проблема сводится к построению семейства 1-форм σ_t , гладко зависящих от t . Это можно сделать различными способами (например, используя теорию Ходжа, см. также книгу Ботта и Ту [ВТ]).

2. В предыдущей лемме используется тот факт, что формы ω_t замкнуты, а также то, что уравнение $\sigma_t + \iota(X_t)\omega_t = 0$ всегда имеет решение. Последнее возможно только для невырожденных 2-форм и для ненулевых форм максимальной размерности. В частности, доказательство применимо к формам объема. Обратим внимание на то, что этот случай существенно отличается от симплектического,

так как не возникает проблем при задании гомотопий форм объема. В самом деле, множество форм объема, принадлежащих данному классу когомологий, выпукло. Действительно, если ω_0, ω_1 — формы объема, задающие одну и ту же ориентацию, то формы

$$(1 - t)\omega_0 + t\omega_1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

также являются формами объема. Поэтому все такие формы диффеоморфны. Это рассуждение не проходит в случае симплектических форм. В качестве упражнения читателю предлагается найти соответствующий контрпример.

Из этого замечания, в частности, следует, что нельзя получить новые интересные симплектические структуры путем деформации заданной симплектической формы внутри ее класса когомологий, иными словами, справедливо следующее утверждение.

Следствие 2.3 (теорема устойчивости Мозера). *Пусть $\omega_t, 0 \leq t \leq 1$, — семейство симплектических форм на замкнутом многообразии M , принадлежащих одному классу когомологий. Тогда существует такая изотопия φ_t , что $\varphi_0 = id$ и $\varphi_t^*(\omega_t) = \omega_0$ для всех t .*

В других следствиях метод Мозера применяется к некомпактным многообразиям M . В этом случае для того чтобы определить поток векторного поля X_t , необходимо следить за областью, в которой векторное поле отлично от нуля. Так как $X_t = 0 \Leftrightarrow \sigma_t = 0$, этот вопрос сводится к изучению носителя формы σ_t . В качестве иллюстрации докажем теорему Дарбу.

Теорема 2.4 (Дарбу). *Любое симплектическое многообразие M локально диффеоморфно \mathbb{R}^{2n} со стандартной симплектической формой ω_0 .*

Доказательство. Рассмотрим в окрестности U_p данной точки p многообразия M локальные координаты

$$\psi: U_p \rightarrow \mathbb{R}^{2n}.$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство $\psi(p) = 0$. Нам нужно показать, что форма ω' , полученная как прямой образ формы ω при отображении ψ , может быть приведена к стандартной форме ω_0 диффеоморфизмом окрестности нуля в \mathbb{R}^{2n} . Согласно предложению 1.6 можно выбрать ψ так, чтобы в точке 0 выполнялось равенство $\omega' = \omega_0$. Рассмотрим семейство дифференциальных форм

$$\omega_t = (1 - t)\omega_0 + t\omega'.$$

Так как $\omega_t = \omega_0$ в точке 0 по построению, а невырожденность — условие, выполняющееся на открытых множествах, существует открытый шар U в \mathbb{R}^{2n} , содержащий 0 и такой, что на нем все эти формы невырожденны. Заметим, что $\dot{\omega}_t = \omega' - \omega_0$. Поскольку шар U стягиваем, существует такая 1-форма σ , что $d\sigma = \omega' - \omega_0$. Кроме того, вычитанием постоянной формы $\sigma(0)$ можно добиться того, чтобы в точке 0 выполнялось равенство $\sigma = 0$. В этом случае соответствующее семейство векторных полей X_t обращается в нуль в точке 0. Допустим, что φ_t — частично определенный поток для векторных полей X_t . Так как 0 — неподвижная точка, очевидно, существует такая достаточно малая окрестность V

точки 0, что орбиты $\varphi_t(p)$, $0 \leq t \leq 1$, точек p из V целиком лежат внутри шара U . Следовательно, отображения φ_t определены на V и $\varphi_1^*(\omega') = \omega_0$. \square

Еще одно доказательство теоремы Дарбу (а также многое другое) содержится в книге Арнольда [А]. В следующих приложениях эта идея используется для окрестностей подмногообразий M . Основной результат формулируется следующим образом.

Предложение 2.5. Пусть ω_0, ω_1 — две симплектические формы на M , которые совпадают на ограничении касательного расслоения многообразия M на некоторое подмногообразие Q , т. е.

$$\omega_0|_{T_p M} = \omega_1|_{T_p M} \quad \text{для } p \in Q.$$

Тогда существует такой диффеоморфизм φ многообразия M на себя, что

$$\varphi(p) = p \quad \text{для } p \in Q, \quad \varphi^*(\omega_1) = \omega_0 \quad \text{в окрестности подмногообразия } Q.$$

Доказательство. Вновь рассмотрим формы $\omega_t = (1-t)\omega_0 + t\omega_1$. Как и в предыдущем случае, они невырождены в некоторой окрестности подмногообразия Q . Более того, форма

$$\dot{\omega}_t = \omega_1 - \omega_0$$

точна в некоторой окрестности подмногообразия Q . Подходящим образом изменив доказательство леммы Пуанкаре (например, см. [ВТ]), можно найти 1-форму σ , которая обращается в 0 во всех точках из Q и удовлетворяет условию $d\sigma = \omega_1 - \omega_0$. Тогда соответствующие векторные поля X_t также обращаются в 0 на Q и задают искомое семейство диффеоморфизмов φ_t в окрестности подмногообразия Q . \square

Более интересные результаты можно получить, рассматривая специальные подмногообразия Q . Рассмотрим, например, симплектическое подмногообразие¹⁾ Q в (M, ω) . Тогда по лемме 1.5 нормальное расслоение $\nu_Q = TM/TQ$ подмногообразия Q можно отождествить с ортогональным дополнением $(TQ)^\omega$ к TQ . Более того, ограничение формы ω на ν_Q порождает симплектическую структуру на этом расслоении: это означает, что каждый слой имеет естественную симплектическую структуру, которая сохраняется функциями склейки расслоения (см. лекцию 3).

Следствие 2.6 (теорема о симплектической окрестности). Пусть ω_0, ω_1 — симплектические формы на M , ограничения которых на подмногообразии Q совпадают с симплектической формой ω_Q на Q . Кроме того, потребуем, чтобы ω_0 и ω_1 индуцировали изоморфные симплектические структуры на нормальном расслоении ν_Q . Тогда существует диффеоморфизм φ на M , оставляющий неподвижными точки из Q , для которого $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$ в окрестности подмногообразия Q .

¹⁾ Подмногообразие Q из M называется симплектическим, если ограничение формы ω на Q является симплектической формой, или, что то же самое, все касательные пространства $T_p Q$, $p \in Q$, являются симплектическими подпространствами в $T_p M$. Аналогично Q называется лагранжевым, если $\omega|_Q \equiv 0$ и $\dim Q = n$.

Доказательство. Из условий следует, что существует линейный изоморфизм

$$L: TM|_Q \rightarrow TM|_Q,$$

тождественный на подрасслоении TQ и такой, что $L^*(\omega_1) = \omega_0$. Легко видеть, что L можно реализовать в виде диффеоморфизма ψ многообразия M на себя, оставляющего неподвижными точки из Q . Иначе говоря, существует диффеоморфизм, для которого $d\psi_p = L_p$ в каждой точке из Q . Тогда

$$\omega_0|_{T_p M} = \psi^* \omega_1|_{T_p M}, \quad p \in Q,$$

и требуемое утверждение следует из предложения 2.5. \square

В следующей лекции будет показано, что задание класса изоморфизма симплектических структур на некотором расслоении эквивалентно заданию класса изоморфизма комплексных структур на нем. Поэтому условие согласованности форм ω_0 и ω_1 на нормальном расслоении подмногообразия Q является довольно слабым. Например, если Q имеет коразмерность 2, то все, что необходимо проверить, — это то, что обе формы индуцируют одинаковую ориентацию на нормальном расслоении, поскольку класс Эйлера (или первый класс Чженя) ν_Q определен с точностью до знака топологией расслоения.

Другой важный случай — когда подмногообразиие Q лагранжево. В этом случае можно показать, что нормальное расслоение ν_Q канонически изоморфно двойственному расслоению $(TQ)^*$. Более того, это двойственное расслоение также лагранжево (см. упражнение 1.7). Таким образом, если подмногообразиие Q лагранжево относительно как ω_0 , так и ω_1 , то всегда существует линейный изоморфизм

$$L: TM|_Q \rightarrow TM|_Q,$$

тождественный на TQ и такой, что $L^*(\omega_1) = \omega_0$. Кроме того, как и в случае теоремы Дарбу, существует стандартная модель для Q , а именно нулевое сечение кокасательного расслоения $(T^*Q, \Omega_{\text{can}})$. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 2.7 (теорема Вайнштейна о лагранжевой окрестности). *Каждое лагранжево подмногообразиие Q симплектического многообразиия (M, ω) имеет окрестность, симплектоморфную окрестности нулевого сечения в кокасательном расслоении $(T^*Q, \Omega_{\text{can}})$.*

Упражнение 2.8. Пусть даны две какие-либо диффеоморфные замкнутые гладкие области U, V в \mathbb{R}^n , имеющие одинаковый объем. Покажите, что существует диффеоморфизм $\varphi: U \rightarrow V$, сохраняющий объем.

У к а з а н и е. Следует выбрать произвольный диффеоморфизм $\psi: U \rightarrow V$ и рассмотреть формы $\omega_0, \omega_1 = \psi^*(\omega_0)$ на U , а затем подправить диффеоморфизм вблизи границы ∂U так, чтобы выполнялось равенство $\omega_0 = \omega_1$ во всех точках из ∂U и использовать метод Мозера, чтобы добиться согласованности форм внутри области.

Завершим лекцию важным результатом Баньяга о продолжении симплектической изотопии. Доказательство остается читателю в качестве упражнения.

Предложение 2.9 (продолжение изотопии). *Пусть Q — компактное подмногообразиие симплектического многообразиия (M, ω) . Предположим, что существует семейство таких диффеоморфизмов $\varphi_t: M \rightarrow M$, что $\varphi_0 = id$*

и $\varphi_t^*(\omega) = \omega$ в окрестности Q . Тогда если для любого относительного цикла $Z \in H_2(M, Q)$ выполняется равенство

$$\int_Z \varphi_t^*(\omega) = \int_Z \omega,$$

то существуют такое семейство симплектических диффеоморфизмов ψ_t и такая окрестность U подмногообразия Q , что $\psi_t(p) = \varphi_t(p)$ для всех $p \in U$.