ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

А. М. РАЙГОРОДСКИЙ

ВЕРОЯТНОСТЬ И АЛГЕБРА В КОМБИНАТОРИКЕ

МЦНМО
2008

А. М. Райгородский

Вероятность и алгебра в комбинаторике

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 519.1
ББК 22.15
Р18

Проведение Летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Департамента образования г. Москвы, фондов «Династия» и «Вольное дело»

Райгородский А. М.

Р18 Вероятность и алгебра в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2008. — 48 с.

ISBN 978-5-94057-384-5

Настоящая брошюра возникла на основе лекций, прочитанных автором на летней математической школе «Современная математика» в Дубне в 2006 г. В ней рассказывается о двух мощных методах современного дискретного анализа — вероятностном и алгебраическом. Оба эти метода широко применяются сейчас для решения различных задач экстремальной комбинаторики. В частности, многие важные аспекты таких классических проблем, как проблема Борсука или проблема отыскания чисел Рамсея, рассматриваются исключительно с позиций вероятностной и алгебраической технологий. В брошюре на наиболее ярких примерах подобных задач излагаются основы методов. Необходимые сведения из (элементарной) теории вероятностей, анализа и алгебры приводятся в конце брошюры в специальном разделе. Брошюра доступна студентам младших курсов и даже школьникам. Однако полезна она может быть всем, кто интересуется комбинаторикой.

ББК 22.15

Оперативную информацию о Летней школе «Современная математика» можно посмотреть на сайте `http://www.mccme.ru/dubna`

Райгородский Андрей Михайлович

Вероятность и алгебра в комбинаторике

Подписано в печать 15.05.2008 г. Формат $60 \times 90\ {}^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 3. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

ISBN 978-5-94057-384-5

Оглавление

Введение

Современная комбинаторика — это весьма многогранная и бурно развивающаяся наука. Только за последние десятилетия в ней возникло множество новых и важных, но зачастую крайне далеких друг от друга разделов. В результате все труднее становится увидеть комбинаторику в целом, почувствовать единство комбинаторных проблем, осознать подлинные взаимосвязи между ними. Вместе с тем, неограниченное дробление любой, сколь угодно содержательной, науки в конечном счете лишь вредит ей. Необходима серьезная база, на основе которой набор разрозненных задач и наблюдений сформировался бы в цельную дисциплину. И тут огромную роль играет база методологическая. Возникают мощные методы, позволяющие дать ответы на самые различные вопросы и служащие, таким образом, естественными инструментами для цементирования науки: отныне значительная часть ее разделов, которые, на первый взгляд, совсем не коррелированы между собой, группируется вокруг единого метода, и этот метод не только ведет к решению прежних частных задач, но еще и выступает как катализатор к созданию новых нетривиальных и глубоко взаимосвязанных проблем. В комбинаторике можно выделить несколько таких общих и действительно важных методов. Если речь идет о подсчете числа комбинаций тех или иных объектов (т. е. о так называемой «перечислительной комбинаторике»), то, конечно, нужно в первую очередь упоминать метод производящих функций (см. [1, 2]). Нас, однако, будут в большей мере интересовать «экстремальные» задачи комбинаторики — задачи, в рамках которых требуется находить различные экстремальные характеристики какой-либо совокупности объектов (например, максимальное число попарно пересекающихся подмножеств конечного множества и пр.). И здесь наиболее существенны методы, связанные с применением идей теории вероятностей и алгебры.

Разумеется, нельзя сказать, кто был первым, применившим, скажем, вероятностные соображения для решения какой-нибудь комбинаторной задачи. Некоторые авторы еще в начале XX в. догадались, что вычисление средних значений «случайных величин» бывает весьма полезным в комбинаторике. Тем не менее, именно выдающийся венгерский математик П. Эрдёш (1913—1996) занялся в пятидесятые годы систематическим развитием вероятностного метода, и потому именно его — создателя венгерской школы современного комбинаторного анализа, человека, внесшего неоценимый вклад в становление комбинаторики (в том числе и вероятностной), — принято считать основателем метода.

Что же касается алгебраического метода, тут есть своя большая история. Мы не станем, однако, вдаваться ни в какие исторические подробности, отсылая заинтересованного читателя к другим источникам (см. [3–9]). Заметим лишь, что для нас будет актуален линейно-алгебраический аспект алгебраического метода, о чем подробнее ниже.

В серии из четырех лекций мы предполагаем рассказать о нескольких ярких задачах комбинаторики и комбинаторной геометрии. На их примере мы проиллюстрируем ряд основополагающих подходов вероятностного и линейно-алгебраического характера. Именно за счет этих методов задачи окажутся неожиданно близкими и тесно друг с другом связанными, хотя априори было бы трудно увидеть их естественную и глубокую близость. Для большей доступности изложения мы приведем в главе Дополнение набор необходимых определений из теории вероятностей, линейной алгебры, теории графов и математического анализа, так что читатель, не совсем знакомый с соответствующей терминологией, сможет получить всю недостающую ему информацию, не обращаясь к внешним источникам; впрочем, вспомогательную литературу по предметам мы также упомянем. В конце каждой лекции мы сформулируем некоторое количество задач, среди которых будут как чисто учебные, так и исследовательские — еще не решенные.

Лекция 1

Задачи о пересечениях множеств

1.1. Постановки задач и формулировки некоторых результатов

В 60-е годы XX в. начала активно развиваться наука об экстремальных свойствах совокупностей подмножеств конечного множества. Эти совокупности часто называют также «гиперграфами», имея в виду, что граф задается *конечным множеством* вершин и совокупностью пар вершин — ребер (см. дополнение): понятно, что, рассматривая вместо двухэлементных произвольные подмножества множества вершин, мы получаем обобщение графа — «сверхграф», гиперграф. Мы изучим здесь две на вид очень похожие задачи упомянутого типа. Обе они имеют значительное количество приложений, просты по своим постановкам и крайне, однако ж, нетривиальны.

Итак, пусть $\mathcal{R}_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — произвольное множество, состоящее из n элементов. Можно считать без ограничения общности, что $\mathcal{R}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ есть просто отрезок натурального ряда. Рассмотрим какую-нибудь совокупность $\mathcal{M} = \{M_1, \ldots, M_s\}$, образованную (различными) k — элементными подмножествами M_i (k — сочетаниями), $i = 1, \ldots, s$, множества $\mathcal{R}_n$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Очевидно, $s \leqslant C_n^k$, и тут никаких проблем нет. Возникает вопрос: а что, если мы запретим множествам из совокупности $\mathcal{M}$ иметь попарные пересечения той или иной мощности? Как это повлияет на размер s самой совокупности? Наиболее изучены две ситуации. В первом случае мы потребуем, чтобы любые два множества из $\mathcal{M}$ пересекались не менее, чем по $t \leqslant k$, общим элементам. Во втором случае нам важно будет лишь отсутствие пар множеств $M_i, M_j \in \mathcal{M}$, которые бы пересекались ровно по t элементам из $\mathcal{R}_n$. Положим, соответственно,

$$f(n, k, t) = \max\{s = |\mathcal{M}| \colon \forall i, j \in \{1, \ldots, s\}\ |M_i \cap M_j| \geqslant t\},$$
$$m(n, k, t) = \max\{s = |\mathcal{M}| \colon \forall i, j \in \{1, \ldots, s\}\ |M_i \cap M_j| \neq t\}.$$

Отыскание величин $m(n, k, t)$, $f(n, k, t)$ — крайне сложная, красивая и богатая приложениями задача (см. лекции 2 и 3). Ниже мы приведем две яркие и показательные теоремы относительно этих величин.

Теорема 1 (П. Эрдёш, Ч. Ко и Р. Радо). *Если $n < 2k$, то $f(n, k, 1) = C_n^k$; иначе $f(n, k, 1) = C_{n-1}^{k-1}$.*

Теорема 2 (П. Франкл и Р. М. Уилсон). *Пусть p — простое число, $n = 4p$, $k = 2p$, $t = p$. Тогда $m(n, k, t) \leqslant 2C_{n-1}^{p-1}$.*

Обе теоремы носят достаточно специфический характер. Тем не менее, в них уже содержится вся суть происходящего, а некоторую историю, связанную с ними, и более общие формулировки мы приведем в § 1.4. Сейчас мы заметим лишь, что результат теоремы 1 окончательный, тогда как в теореме 2 приводится только оценка сверху. На самом деле, эта оценка практически неулучшаема (см. задачи). Более того, она, на первый взгляд, абсолютно неожиданна. Действительно, если аккуратно применить формулу Стирлинга $m! = \sqrt{2\pi m}\left(\frac{m}{e}\right)^m (1 + o(1))$, $m \to \infty$ (см. дополнение), к каждому из факториалов, фигурирующих в известной записи выражений C_n^k и $2C_{n-1}^{p-1}$, то нетрудно увидеть, что в первом случае мы имеем дело с величиной $(2 + o(1))^n$, а во втором — с величиной $(1{,}754\ldots + o(1))^n$. Это означает, что, едва мы запретили всего один вариант пересечения множеств в совокупности (разрешено ведь все, что угодно; лишь бы множества не пересекались по p общим элементам), и сразу же от тривиальной оценки $s \leqslant (2 + o(1))^n$ мы пришли к экспоненциально меньшему неравенству $s \leqslant (1{,}754\ldots + o(1))^n$. Трудно поверить, что буквально один запрет столь сильно ограничивает свободу в построении совокупности $\mathcal{M}$; однако это так.

Теорему 1 докажем в следующем параграфе, а теорему 2 — в § 1.3.

1.2. Доказательство теоремы 1

Начнем с замечания, что случай $n < 2k$ очевиден. В самом деле, при данных условиях просто не существует непересекающихся множеств, так что действительно $f(n, k, 1) = C_n^k$. Далее, во втором случае нижняя оценка $f(n, k, 1) \geqslant C_{n-1}^{k-1}$ тоже практически очевидна. Достаточно рассмотреть совокупность множеств, каждый элемент которой содержит, например, единицу:

$$\mathcal{M} = \{M \subset \mathcal{R}_n : |M| = k,\ 1 \in M\}.$$

Понятно, что $|\mathcal{M}| = C_{n-1}^{k-1}$, и все в порядке. В свою очередь, верхнюю оценку можно, в принципе, получить различными способами, но мы применим самый естественный и показательный из них — вероятностный. Этот способ формально предложил Д. Катона в 1972 г., хотя нам представляется, что подобная идея должна сразу же прийти в голову всякому, желающему обосновать теорему Эрдёша—Ко—Радо.