Ю. С. Ильяшенко
С. Ю. Яковенко

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Том 1

Ю. С. Ильяшенко, С. Ю. Яковенко

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Том 1

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 517.91
ББК 22.161.6
И49

Ильяшенко Ю. С., Яковенко С. Ю.

И49 Аналитическая теория дифференциальных уравнений. Том 1. — М.: МЦНМО, 2013. — 432 с.

ISBN 978-5-4439-0230-2 (том 1)

Предлагаемая книга — первый том двухтомной монографии, посвящённой аналитической теории дифференциальных уравнений.

В первой части этого тома излагается формальная и аналитическая теория нормальных форм и теорема о разрешении особенностей для векторных полей на плоскости.

Вторая часть посвящена алгебраически разрешимым локальным задачам теории аналитических дифференциальных уравнений, квадратичным векторным полям и проблеме локальной классификации ростков векторных полей в комплексной области. Дано современное изложение работы Дюлака (1908) об условиях центра и классической работы Баутина о рождении не более чем трех предельных циклов при бифуркации особой точки квадратичного векторного поля типа центр. Изложена теория алгебраически разрешимых локальных задач и доказана алгебраическая неразрешимость проблемы различения центра и фокуса.

В третьей части изложена линейная теория: подход Арнольда к теории нормальных форм линейных систем с нелинейной точки зрения, проблема Римана — Гильберта, явление Стокса, теорема Сибуи о секториальной нормализации.

В приложениях приводится необходимый минимум сведений из теории римановых поверхностей и многомерного комплексного анализа.

Книга предназначена для студентов, аспирантов и научных работников физико-математических специальностей.

ББК 22.161.6

Юлий Сергеевич Ильяшенко
Сергей Юрьевич Яковенко

Аналитическая теория дифференциальных уравнений

Том 1

Подписано в печать 09.10.2013 г. Формат $70\times100\,{}^1/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 27. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-4439-0214-2 (общий)
978-5-4439-0230-2 (том 1)

Оглавление

Предисловие 11

Часть I

НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ И РАЗРЕШЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

Глава 1. Аналитические дифференциальные уравнения в комплексной области 17

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и их решения. Задача Коши 17
§ 1.2. Принцип сжимающих отображений 18
§ 1.3. Применение принципа сжимающих отображений к оператору Пикара 19
§ 1.4. Линейные дифференциальные уравнения. Экспонента линейного оператора 22
§ 1.5. Теорема о выпрямлении 24
§ 1.6. Векторные поля. Эквивалентность векторных полей 26
§ 1.7. Векторное поле как оператор дифференцирования 27
§ 1.8. Выпрямление векторного поля 29
§ 1.9. Однопараметрические группы голоморфных отображений 29
Упражнения и задачи 30

Глава 2. Голоморфные слоения и их особые точки 32

§ 2.1. Основные определения 32
§ 2.2. Слоения и интегрируемые распределения 34
§ 2.3. Голономия 36
§ 2.4. Слоения с особенностями 39
§ 2.5. Комплексные сепаратрисы 42
§ 2.6. Надстройка над отображением в себя 45
Упражнения и задачи 46

Глава 3. Формальные потоки и теорема о включении в поток 48

§ 3.1. Формальные векторные поля и формальные отображения 48
§ 3.2. Теорема об обратной функции 52
§ 3.3. Интегрирование и формальные потоки формальных векторных полей 53
§ 3.4. Включение в поток и матричные логарифмы 55
§ 3.5. Логарифмы и дифференциальные операторы 57
§ 3.6. Включение в формальный поток 59
Упражнения и задачи 59

Глава 4. Формальные нормальные формы 61

§ 4.1. Теорема о формальной классификации 61
§ 4.2. Шаг индукции: гомологическое уравнение 62

§ 4.3. Разрешимость гомологического уравнения 63
§ 4.4. Резонансные нормальные формы: парадигма Пуанкаре — Дюлака . . 65
§ 4.5. Теорема Белицкого 67
§ 4.6. Параметрический случай 71
§ 4.7. Формальная классификация формальных отображений 73
§ 4.8. Каспидальные точки 74
§ 4.9. Векторные поля с нулевой линейной частью 76
§ 4.10. Формальные нормальные формы элементарных особых точек на вещественной плоскости 78
Упражнения и задачи 82

Глава 5. Голоморфные нормальные формы 83

§ 5.1. Области Пуанкаре и Зигеля 83
§ 5.2. Голоморфная классификация в области Пуанкаре 84
§ 5.3. Резонансный случай: полиномиальная нормальная форма 89
§ 5.4. Голоморфные нормальные формы отображений 91
§ 5.5. Приведение к линейной нормальной форме в области Зигеля: теоремы Зигеля, Брюно и Йоккоза (мини-обзор) 93
§ 5.6. Гомотопический метод 95
§ 5.7. Альтернатива для расходимости нормализующего ряда 99
§ 5.8. Ёмкость и неравенство Бернштейна 102
Упражнения и задачи 103

Глава 6. Конечно порождённые группы ростков конформных отображений 105

§ 6.1. Эквивалентность конечно порождённых групп ростков конформных отображений 105
§ 6.2. Первые шаги формальной классификации 108
§ 6.3. Интегрируемые ростки 115
§ 6.4. Динамика конечно порождённых групп ростков и псевдогруппы . . . 117
§ 6.5. Периодические орбиты и периодические ростки 119
§ 6.6. Замыкание псевдогруппы и плотность орбит 121
§ 6.7. Счётное число предельных циклов для типичных псевдогрупп 123
§ 6.8. Жёсткость конечно порождённых групп конформных ростков 124
§ 6.9. Ослабление условий типичности 128
Упражнения и задачи 129

Глава 7. Голоморфные инвариантные многообразия 130

§ 7.1. Инвариантные многообразия для гиперболических особых точек . . 130
§ 7.2. Гиперболические инвариантные кривые для седлоузлов 134
Упражнения и задачи 136

Глава 8. Разрешение особенностей на плоскости 138

§ 8.1. Полярное раздутие 138
§ 8.2. Алгебраическое раздутие (σ-процесс) 140
§ 8.3. Раздутие аналитических кривых и слоений с особенностями 143
§ 8.4. Теорема о разрешении особенностей 145
§ 8.5. Раздутие в аффинной карте: вычисления 147
§ 8.6. Дивизоры 149
§ 8.7. Кратность пересечения и индекс пересечения 151
§ 8.8. Раздутие и индекс пересечения 156
§ 8.9. Раздутие и кратность слоений с особенностями 160

§ 8.10. Разрешение каспидальных точек 162
§ 8.11. Заключительные замечания: уничтожение резонансных узлов и дикритических касаний 165
Упражнения и задачи 167

Часть II

ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

Глава 9. Векторные поля на плоскости с характеристическими траекториями 171

§ 9.1. Первые шаги: классификация Пуанкаре 171
§ 9.2. Секториальное разбиение окрестностей неэлементарных особых точек 173
§ 9.3. Монодромные особые точки, характеристические орбиты, предельные циклы 174
§ 9.4. Основная альтернатива и топологическая классификация особых точек с характеристическими орбитами 176
§ 9.5. Три вопроса 179
§ 9.6. Три кошмара 179
§ 9.7. Алгебраическая разрешимость 181
§ 9.8. Разрешимость проблемы вычисления кратности 182
§ 9.9. Алгебраическая разрешимость основной альтернативы 183
§ 9.10. Топологически достаточные струи 185
§ 9.11. Вывод 186
Упражнения и задачи 186

Глава 10. Алгебраическая разрешимость локальных задач. Проблема различения центра и фокуса 188

§ 10.1. Разрешимость в пространствах струй: терминология 189
§ 10.2. Топологическая классификация вырожденных элементарных особенностей на плоскости 191
§ 10.3. Обобщённые эллиптические точки и проблема различения центра и фокуса 194
§ 10.4. Вычисление отображения голономии 196
§ 10.5. Почти алгебраическая разрешимость проблемы различения центра и фокуса в обобщённом эллиптическом случае 199
§ 10.6. Разрешимость до коразмерности 1 200
§ 10.7. Неразрешимость проблемы устойчивости для слабого фокуса 201
Упражнения и задачи 206

Глава 11. Голономия и первые интегралы 208

§ 11.1. Проблема интегрируемости и её разрешимость 208
§ 11.2. Интегрируемость вещественных слоений 210
§ 11.3. Исчезающая голономия особой точки слоения 212
§ 11.4. Топология комплексных слоений и (не)интегрируемость элементарных особенностей 213
§ 11.5. Теорема Пуанкаре — Ляпунова: доказательство и (контр)примеры . . 217
§ 11.6. Простые слоения на $(\mathbb{C}^2, 0)$ 220

§ 11.7. Обзор дальнейших результатов . . . 223
Упражнения и задачи . . . 228

Глава 12. Нули аналитических функций, зависящих от параметров, и малые предельные циклы . . . 230

§ 12.1. Бифуркация Пуанкаре — Андронова — Хопфа — Такенса: малые предельные циклы, рождающиеся из эллиптических точек . . . 230
§ 12.2. Идеал Баутина и производящие функции . . . 232
§ 12.3. Начала формальной теории . . . 234
§ 12.4. Идеал Баутина сходящегося ряда . . . 238
§ 12.5. Индекс Баутина и цикличность . . . 241
§ 12.6. Эллиптические векторные поля на плоскости: идеалы Баутина и Дюлака . . . 245
§ 12.7. Универсальные полиномиальные семейства, цикличность и локализованная проблема Гильберта . . . 251
Упражнения и задачи . . . 254

Глава 13. Квадратичные векторные поля и теорема Баутина . . . 255

§ 13.1. Квадратичные векторные поля . . . 255
§ 13.2. Условия Дюлака на центр . . . 257
§ 13.3. Неприводимые компоненты многообразия Дюлака . . . 258
§ 13.4. Доказательство теоремы Дюлака 13.3 . . . 259
§ 13.5. Символьные вычисления и «доказательство» теоремы Жолондека 13.4 . . . 262
§ 13.6. Завершающие замечания . . . 263
Упражнения и задачи . . . 264

Глава 14. Комплексные сепаратрисы голоморфных слоений . . . 265

§ 14.1. Инвариантные кривые . . . 265
§ 14.2. Линеаризация вдоль инвариантных кривых и индекс комплексной сепаратрисы . . . 266
§ 14.3. Суммарный индекс вдоль гладкой компактной инвариантной кривой . . . 269
§ 14.4. Индекс и раздутие . . . 271
§ 14.5. Точки Кано . . . 271
§ 14.6. Доказательство теоремы Камачо — Сада . . . 274
§ 14.7. Локальная проблема Пуанкаре . . . 274
§ 14.8. Вес компоненты исчезающего дивизора . . . 276
§ 14.9. Взвешенная сумма порядков малости . . . 279
§ 14.10. Минимальность интегрируемых слоений . . . 282
Упражнения и задачи . . . 285

Часть III

Локальная и глобальная теория линейных систем

Глава 15. Общие факты о линейных системах . . . 289

§ 15.1. Линейные дифференциальные уравнения: пфаффовы, обыкновенные, матричные . . . 289
§ 15.2. Фундаментальные системы решений . . . 290
§ 15.3. Монодромия и голономия . . . 293

§ 15.4. Калибровочное преобразование и голоморфная эквивалентность . . 294
§ 15.5. Системы с изолированными особыми точками 295
Упражнения и задачи 296

Глава 16. Локальная теория регулярных особых точек и её приложения 298

§ 16.1. Регулярные особенности 298
§ 16.2. Фуксовы особые точки 301
§ 16.3. Формальная классификация фуксовых особенностей 301
§ 16.4. Голоморфная классификация фуксовых особенностей 304
§ 16.5. Интегрируемость нормальных форм 306
§ 16.6. Дальнейшее упрощение нормальной формы фуксовых систем 307
§ 16.7. Нелокальная теория линейных систем на сфере $\mathbb{P}$: теорема Римана — Фукса 308
§ 16.8. Фуксовы системы и проблема Римана — Гильберта 309
§ 16.9. Определитель Вронского инвариантной подсистемы 313
§ 16.10. Монополи 313
Упражнения и задачи 317

Глава 17. Глобальная теория линейных систем: голоморфные векторные расслоения и мероморфная связность 318

§ 17.1. Голоморфное векторное расслоение 318
§ 17.2. Коциклы 320
§ 17.3. Операции над расслоениями 322
§ 17.4. Классификация линейных расслоений над сферой Римана 324
§ 17.5. Сечения голоморфных векторных расслоений 327
§ 17.6. Степень голоморфного расслоения 328
§ 17.7. Голоморфная и мероморфная связность 330
§ 17.8. Связности и линейные системы 331
§ 17.9. Связности линейных расслоений. След мероморфной связности 334
§ 17.10. Классификация голоморфных векторных расслоений над $\mathbb{P}$ 336
Упражнения и задачи 342

Глава 18. Проблема Римана — Гильберта 345

§ 18.1. Проблема Римана — Гильберта для абстрактных расслоений 346
§ 18.2. Связности на тривиальном расслоении 349
§ 18.3. Инвариантные подрасслоения и неприводимость 351
§ 18.4. Теорема Болибруха — Костова 355
§ 18.5. Контрпример Болибруха 357
Упражнения и задачи 360

Глава 19. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков 362

§ 19.1. Дифференциальные уравнения высших порядков: алгебраическая теория 362
§ 19.2. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения: наивный подход 364
§ 19.3. Факторизация дифференциальных операторов 367
§ 19.4. Фуксовы особенности уравнений высших порядков 371
§ 19.5. Струйные расслоения и инвариантные конструкции 373
§ 19.6. Проблема Римана — Гильберта для уравнений высших порядков . . . 378
Упражнения и задачи 382

Глава 20. Иррегулярные особенности и явление Стокса 384
§ 20.1. Иррегулярные особые точки в размерности 1 384
§ 20.2. Стандартная форма Биркгофа 385
§ 20.3. Резонансы и формальная диагонализация 388
§ 20.4. Формальное упрощение резонансного случая 389
§ 20.5. Срезающее преобразование и разветвлённая формальная нормальная форма 390
§ 20.6. Голоморфная секториальная нормализация 392
§ 20.7. Секториальные автоморфизмы и матрицы Стокса 393
§ 20.8. Явление Стокса. Голоморфная классификация иррегулярных особенностей 394
§ 20.9. Теорема реализуемости 397

Дополнение: доказательство теоремы Сибуи

§ 20.10. Нормализация в «узких» секторах 398
§ 20.11. Ключевой пример 400
§ 20.12. Интегральное уравнение и доказательство теоремы 20.23 403
§ 20.13. Расширение секторов и доказательство теоремы Сибуи 20.16 405
Упражнения и задачи 405

Приложение А. Элементы многомерного комплексного анализа 406
§ А.1. Голоморфные функции нескольких переменных 406
§ А.2. Теорема об обратной функции 406
§ А.3. Мультииндексные обозначения 407
§ А.4. Интегральная формула Коши 407
§ А.5. Следствия 407
§ А.6. Принцип компактности Вейерштрасса 408
§ А.7. Устранение особенностей ограниченных функций 408
§ А.8. Устранение компактных особенностей 408
§ А.9. Ростки голоморфных функций 409
§ А.10. Мероморфные функции 409
§ А.11. Аналитические множества 410
§ А.12. Голоморфные функции нескольких переменных 410
§ А.13. Локальная униформизация 410
§ А.14. Аналитичность и алгебраичность 411

Приложение Б. Элементы теории римановых поверхностей 412
§ Б.1. Римановы поверхности и алгебраические кривые 412
§ Б.2. Род и степень алгебраической кривой 412
§ Б.3. Мероморфные функции на римановых поверхностях 413
§ Б.4. Голоморфные и мероморфные формы на римановых поверхностях . . 413
§ Б.5. Униформизация 414

Список обозначений 415

Предметный указатель 417

Литература 422

Предисловие

Теорию обыкновенных дифференциальных уравнений можно грубо разделить на две большие части: *качественную теорию дифференциальных уравнений* и *теорию динамических систем*. Первая часть в основном изучает системы дифференциальных уравнений на плоскости, а вторая — многомерные системы (диффеоморфизмы на многообразиях размерности два и выше и потоки на многообразиях размерности три и выше). В то время как первая часть может быть названа миром порядка, вторая часть — область хаоса.

Ключевая проблема, в некотором смысле парадигма, влияющая на развитие теории динамических систем от момента её основания — это проблема турбулентности: как детерминистская природа динамической системы может быть совместима с наблюдаемым хаотическим поведением? Этой проблемой занимались предтечи и отцы-основатели теории динамических систем: Л. Ландау, Х. Хопф, А. Н. Колмогоров, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, С. Смейл, Д. Рюэль, Я. Г. Синай, Ф. Такенс. Это — одна из самых интригующих проблем на стыке математики, физики и кибернетики. Теория динамических систем существенно использует методы и средства топологии, дифференциальной геометрии, теории вероятностей, функционального анализа и других ветвей математики.

К качественной теории дифференциальных уравнений обычно относят вопросы об автономных системах на плоскости. Эта теория тесно связана с аналитической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной темой является исследование локальных и глобальных топологических свойств фазовых портретов векторных полей на плоскости. Одна из главных задач в этой области — вторая часть шестнадцатой проблемы Гильберта, в которой спрашивается о числе и расположении предельных циклов полиномиального векторного поля на плоскости. В очень широком смысле эта проблема сводится к вопросу: в какой степени свойства многочленов, задающих дифференциальное уравнение, наследуются его абсолютно трансцендентными (и временами очень сложными) решениями?

Другой большой раздел аналитической теории дифференциальных уравнений — это теория линейных систем. В этой области ключевая задача — 21-я проблема Гильберта, также известная как проблема Римана — Гильберта. Эта задача имеет длинную драматическую историю, и она была решена «только вчера». Её обсуждение занимает существенное место в этой книге.

Качественная теория дифференциальных уравнений возникла в работах А. Пуанкаре, который заметил, что дифференциальные уравнения суть предмет изучения не только анализа, но и геометрии. Ключевая идея Пуанкаре — выводить геометрические свойства решений напрямую из свойств задающих их дифференциальных уравнений. Этот подход применялся в обеих частях теории дифференциальных уравнений, но он привёл к созданию совершенно непохожих областей.

Благодаря дифференциальным уравнениям возникли такие области математики, как топология и теория групп Ли. В свою очередь, аналитическая теория дифференциальных уравнений — не замкнутая в себе дисциплина, а источник новых идей и задач в смежных областях математики. В этой книге мы подчёркиваем роль комплексного анализа, алгебраической геометрии и топологии векторных расслоений, кратко указывая связь аналитической теории с другими областями.

Книга выходит в двух томах. В первый том войдут первые три части (главы 1–20), а во второй — части IV и V (главы 21–28).

На границе между дифференциальными уравнениями и теорией особенностей лежит понятие нормальной формы — одно из центральных понятий этой книги. Первая часть содержит основы формальной и аналитической теории нормальных форм. Методы, развитые в этой части, систематически используются на протяжении всей книги. Исследование фазовых портретов сложных особых точек вызвало к жизни развитую технику разрешения особенностей — приёма, открытого примерно 150 лет назад. Известная теорема Бендиксона о разрешении особенностей доказана в нашей книге с помощью прозрачных геометрических методов.

Новый подход к локальным задачам анализа, основанный на понятиях алгебраической и аналитической разрешимости, был предложен Арнольдом и Томом в конце шестидесятых годов XX века. С точки зрения этого подхода мы изучаем во второй части теорию особых точек полиномиальных векторных полей. Доказано, что проблема устойчивости и топологической классификации особых точек векторных полей на плоскости алгебраически разрешима во всех случаях, за исключением проблемы различения центра и фокуса. Эта проблема алгебраически неразрешима, что и доказано в той же части. Там же содержится локальная теория голоморфных слоений комплексной плоскости: доказательство теоремы Камачо — Сада о существовании комплексных сепаратрис особых точек, теорема Маттеи и Муссю о связи интегрируемости со свойствами группы голономий и доказательство теоремы Баутина о предельных циклах малой амплитуды для квадратичных векторных полей.

Третья часть посвящена линейной теории. Неожиданно оказалось, что применение нелинейной теории сильно упрощает изложение многих классических фактов из теории линейных систем. В третьей части также содержится современное изложение положительных и отрицательных результатов о проблеме Римана — Гильберта.

Скажем несколько слов о содержании второго тома.

Часть IV посвящена новому направлению теории нормальных форм — функциональным модулям аналитической классификации резонансных особенностей. Главный инструмент, используемый при этом исследовании — теория почти комплексных структур и квазиконформных отображений. Этот инструмент недавно сыграл революционизирующую роль в голоморфной динамике. Часть IV содержит сводку основных результатов теории квазиконформных отображений. Эта часть заканчивается доказательством «простого варианта» теоремы конечности для предельных циклов аналитических векторных полей, с дополнительным предположением, что все особые точки векторного поля — гиперболические сёдла. Доказательство иллюстрирует эффективность теории локальных нормальных форм в решении задач глобального характера.

Пятая часть посвящена глобальной теории полиномиальных дифференциальных уравнений на вещественной и комплексной плоскости. В ней изучаются как алгебраические, так и вполне трансцендентные задачи.

Эта часть начинается с решения проблемы Пуанкаре о максимальной степени алгебраического решения полиномиального дифференциального уравнения (недавний яркий результат Серво, Линс-Нето и Карнисера). Вторая глава посвящена применению теории римановых поверхностей к глобальной теории полиномиальных дифференциальных уравнений. Мы описываем топологию разбиения комплексной плоскости на линии уровня типичных многочленов, включая теорему Пикара — Лефшеца и связность Гаусса — Манина. Это описание позволяет получить оценки снизу на число нулей абелевых интегралов; эти оценки оказываются тесно связанными с теорией предельных циклов. В двух последних главах мы описываем свойства типичных комплексных слоений проективной плоскости. Эти свойства резко отличаются от параллельных свойств в вещественной плоскости. Например, конечность числа вещественных предельных циклов для полиномиальных векторных полей резко контрастирует с бесконечностью числа комплексных предельных циклов, а структурная устойчивость вещественных слоений на плоскости является антиподом абсолютной негрубости комплексных слоений.

Некоторые фундаментальные факты из многомерного комплексного анализа и теории римановых поверхностей, постоянно используемые в книге, изложены в приложении к первому тому.

Почти все главы заканчиваются списками задач. Кроме лёгких задач, иногда называемых упражнениями, список содержит трудные вопросы, лежащие близко к нерешённым проблемам.

Книга не является исчерпывающим руководством по аналитической теории дифференциальных уравнений. Выбор тем основан на вкусе авторов и ограничен размером книги. Мы не касаемся таких классических разделов, как уравнения Риккати и Пенлеве, теорема Мальмквиста, интегральные представления и преобразования. Мы полностью выпускаем дифференциальную теорию Галуа и теорию малочленов, изобретённую Хованским. Тем не менее, на наш взгляд, книга покрывает замкнутый круг проблем, которые оказывают ключевое влияние на развитие всей области.

Изложение каждой темы начинается с основных определений и во многих случаях доходит до переднего края. Традиционно доказательства многих результатов аналитической теории дифференциальных уравнений весьма техничны. Мы старались по возможности предварять формулы мотивировками и избегать лишних выкладок.

Эта книга в основном адресована аспирантам и профессиональным математикам, ищущим быстрого и не слишком техничного введения в предмет. Однако эксперты найдут много фактов, ранее не излагавшихся в монографиях. С другой стороны, мы надеемся, что студенты смогут прочесть значительную часть этой книги и погрузиться в прекрасную область математики, которая занимает в ней одно из ключевых мест.

* * *

Наша работа над третьей частью книги была во многом вдохновлена революционным прорывом, совершённым нашим другом и коллегой Андреем Болибрухом, который решил одну из самых интригующих задач теории аналитических дифференциальных уравнений — проблему Римана — Гильберта. Андрей читал многочисленные наброски третьей части, и его комментарии были всегда очень полезны.

11 ноября 2003 года, после долгой борьбы, Андрей Андреевич Болибрух уступил неизлечимой болезни. Эта книга — посмертная дань восхищения и любви, которую мы к нему питали.

* * *

Когда работа над этой книгой, затянувшаяся гораздо дольше, чем мы рассчитывали, уже подходила к концу, появился другой трактат на близкую тему. Хенрик Жолондек опубликовал фундаментальную монографию, озаглавленную «Монодромия» [84]. Сюжеты обеих книг во многом пересекаются, но и симметрическая разность велика. Однако темы, встречаемые в обеих книгах, изложены с разных точек зрения. Это даёт читателю редкую возможность выбрать изложение по своему вкусу.

* * *

Благодарности. Многие друзья и коллеги разными способами помогали улучшить рукопись этой книги. Л. Гаврилов, А. Глуцюк, Ф. Кано, В. Кацнельсон, М. Костов, К. Кристофер, Ч. Ли, Дж. Ллибре, Д. Серво, Ф. Лоре, И. Йомдин объясняли нам тонкие детали математических конструкций и давали полезные советы по изложению.

Мы благодарны всем, кто прочёл первоначальные версии отдельных глав и указал на многочисленные ошибки и опечатки. Среди них — Т. Голенищева-Кутузова, А. Клименко, Ю. Кудряшов, Д. Рыжов и М. Прохорова.

Мы благодарны Сергею Гельфанду, чья энергия много способствовала появлению английской версии этой книги, а также Люан Кол и Лори Неро.

И наконец, мы должны поблагодарить Дмитрия Новикова, который оказывал нам помощь на всех стадиях приготовления книги. Без многочисленных обсуждений с ним эта книга выглядела бы совсем по-другому.

Издание этой книги поддержано грантом 12-01-07018-д. Во время работы над книгой Ю. С. Ильяшенко был поддержан грантами РФФИ — CNRS 07-01-00017-а, 10-01-93115-НЦНИЛа, РФФИ 10-01-00739-а NSF 0400495, 0700973.

Сергей Яковенко является профессором кафедры Гершона Кекста. Его работа была поддержана грантом Израильского научного фонда 18-00/1 и Фондом «Минерва».

Перевод книги выполнен участниками семинара Ю. С. Ильяшенко: П. Вытновой, Н. Гончарук, И. Горбовицким, М. Деркач, Ю. Кудряшовым, Д. Филимоновым, И. Щуровым. Авторы приносят им свою глубокую благодарность.

ЧАСТЬ I

Нормальные формы и разрешение особенностей

- Аналитические дифференциальные уравнения в комплексной области
- Голоморфные слоения и их особые точки
- Формальные потоки и теорема о включении в поток
- Формальные нормальные формы
- Голоморфные нормальные формы
- Конечно порождённые группы ростков конформных отображений
- Голоморфные инвариантные многообразия
- Разрешение особенностей на плоскости

Глава 1

Аналитические дифференциальные уравнения в комплексной области

Для произвольной открытой области $U \subseteq \mathbb{C}^n$ символом $\mathscr{O}(U)$ мы будем обозначать комплексное векторное пространство функций, голоморфных в U (см. приложения А и Б). Для пространства векторнозначных голоморфных функций мы будем использовать обозначение

$$\mathscr{O}^m(U) = \underbrace{\mathscr{O}(U) \times \ldots \times \mathscr{O}(U)}_{m \text{ раз}} = \mathscr{O}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^m.$$

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и их решения. Задача Коши

Пусть $U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ — открытая область, $F = (F_1, \ldots, F_n)\colon U \to \mathbb{C}^n$ — голоморфная вектор-функция, определённая в этой области. *Аналитическое дифференциальное уравнение*, заданное вектор-функцией F на области U, — это векторное уравнение (*система n* скалярных уравнений)

$$\frac{dz}{dt} = F(t, z), \qquad (t, z) \in U \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n, \quad F \in \mathscr{O}^n(U). \tag{1.1}$$

В дальнейшем производную по комплексной переменной t мы часто будем обозначать точкой наверху: $\dot{z}(t) = \frac{dz}{dt}(t)$.

Решением этого уравнения называется голоморфное отображение

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\colon V \to \mathbb{C}^n,$$

определённое в некотором открытом подмножестве $V \subseteq \mathbb{C}$, график которого $\{(t, \varphi(t))\colon t \in V\}$ содержится в U, а комплексный «вектор скорости»

$$\frac{d\varphi}{dt} = \left(\frac{d\varphi_1}{dt}, \ldots, \frac{d\varphi_n}{dt}\right) \in \mathbb{C}^n$$

при каждом значении t совпадает с вектором $F(t, \varphi(t)) \in \mathbb{C}^n$.

График функции φ называется *интегральной кривой*. С вещественной точки зрения он является двумерной гладкой поверхностью в $\mathbb{R}^{2n+2}$. Отметим, что мы рассматриваем только голоморфные решения дифференциального уравнения, но при этом мы не фиксируем область в $\mathbb{C}$, на которой решение должно быть определено.

Уравнение (1.1) называется *автономным*, если F не зависит от t. В этом случае образ $\varphi(V) \subseteq \mathbb{C}^n$ называется *фазовой кривой*. Любое дифференциальное уравнение (1.1) можно сделать автономным, добавив дополнительную переменную $\xi(t,z) \in \mathbb{C}$ и уравнение $d\xi/dt = 1$.

Задача Коши, содержащая уравнение *с начальными условиями*, заключается в том, чтобы найти интегральную кривую дифференциального уравнения (1.1), которая проходит через заданную точку $(t_0, z_0) = (t_0, z_{0,1}, \ldots, z_{0,n}) \in U$. Другими словами, требуется найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее условию

$$\varphi : V \to \mathbb{C}^n, \quad \varphi(t_0) = z_0 \in \mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

Мы начнём с фундаментальной теоремы теории дифференциальных уравнений — локальной теоремы существования и единственности.

Теорема 1.1. *Для любого аналитического дифференциального уравнения* (1.1) *и любой точки* $(t_0, z_0) \in U$ *существует такой достаточно малый полидиск* $D_\varepsilon = \left\{|t-t_0| < \varepsilon,\ |z_j - z_{0,j}| < \varepsilon,\ j = 1, \ldots, n\right\} \subseteq U$, *что решение задачи Коши* (1.2) *существует и единственно в этом полидиске.*

Это решение голоморфно зависит от начальных условий $z_0 \in \mathbb{C}^n$ *и от любых других дополнительных параметров, при условии что вектор-функция* F *также голоморфно зависит от этих параметров.*

С вещественной точки зрения, теорема 1.1 утверждает существование вектор-функции *двух* независимых вещественных переменных, касательная плоскость к графику которой (к *двумерной поверхности* в $\mathbb{C}^{n+1} \simeq \mathbb{R}^{2n+2}$) в каждой точке порождена двумя вещественными векторами $\operatorname{Re} F$ и $\operatorname{Im} F$. Чтобы вывести теорему 1.1 из стандартных теорем существования, единственности и дифференцируемости решений *гладких* обыкновенных дифференциальных уравнений в *вещественной области*, приходится применять достаточно глубокие результаты об *интегрируемости распределений*, см. далее замечание 2.10. Однако непосредственное доказательство, в той его части, которая касается зависимости от начальных условий, неожиданно оказывается *проще*, чем в вещественном случае. Это доказательство изложено в послеследующем параграфе. Как и многие другие доказательства в этой книге, оно основано на применении *принципа сжимающих отображений*.

§ 1.2. Принцип сжимающих отображений

Определение 1.2. Отображение F метрического пространства $\mathscr{M}$ в себя называется *сжимающим*, если существует такое положительное вещественное число $\lambda < 1$, что для произвольных точек $u, v \in \mathscr{M}$ выполняется неравенство $\operatorname{dist}(F(u), F(v)) \leqslant \lambda \operatorname{dist}(u, v)$.

Определение 1.3. Точка $w \in \mathscr{M}$ называется *неподвижной точкой отображения* F, если $F(w) = w$.

Оказывается, в *полном* метрическом пространстве сжимающее отображение всегда имеет неподвижную точку.

Напомним, что последовательность $\{x_k\}$ точек метрического пространства называется *фундаментальной*, или *последовательностью Коши*, если расстояние $\operatorname{dist}(x_i, x_j)$ стремится к нулю, когда индексы i и j независимо стремятся к бесконечности.

Определение 1.4. Метрическое пространство $\mathscr{M}$ называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность точек этого пространства имеет предел.

Теорема 1.5 (принцип сжимающих отображений). *Любое сжимающее отображение $F\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ полного метрического пространства $\mathscr{M}$ в себя имеет единственную неподвижную точку в $\mathscr{M}$.*

Эта неподвижная точка является пределом последовательности $\{u_k\}$, $u_{k+1} = F(u_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, образов любой начальной точки $u_0 \in \mathscr{M}$ под действием итераций отображения F.

Доказательство. Для любой начальной точки $u_0 \in \mathscr{M}$ последовательность $\{u_k\}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, фундаментальна: действительно,

$$\operatorname{dist}(u_k, u_{k+1}) \leqslant \lambda^k \operatorname{dist}(u_0, u_1),$$

откуда по неравенству треугольника

$$\operatorname{dist}(u_k, u_l) \leqslant \operatorname{dist}(u_k, u_{k+1}) + \ldots + \operatorname{dist}(u_{l-1}, u_l) \leqslant \operatorname{dist}(u_0, u_1)\lambda^k/(1-\lambda)$$

для любых k, l, таких что $k < l$. Так как метрическое пространство $\mathscr{M}$ полно, последовательность $\{u_k\}$ имеет предел $w \in \mathscr{M}$. Пользуясь непрерывностью отображения F, переходим к пределу в равенстве $u_{k+1} = F(u_k)$ и получаем равенство $w = F(w)$.

Если w_1 и w_2 — две неподвижные точки отображения F, то

$$\operatorname{dist}(w_1, w_2) \leqslant \lambda \operatorname{dist}(F(w_1), F(w_2)) = \lambda \operatorname{dist}(w_1, w_2),$$

что возможно только в случае $\operatorname{dist}(w_1, w_2) = 0$, т. е. при $w_1 = w_2$. □

§1.3. Применение принципа сжимающих отображений к оператору Пикара

Изложение доказательства теоремы 1.1 в основном следует [94, глава 4].

Решение дифференциального уравнения мы будем искать как неподвижную точку сжимающего отображения в некотором метрическом пространстве.

Рассмотрим векторное пространство $\mathscr{A}(D_\rho)$ функций, голоморфных в полидиске D_ρ и непрерывных в его замыкании:

$$\mathscr{A}(D_\rho) = \left\{ f\colon \overline{D}_\rho \to \mathbb{C}\colon f \text{ голоморфна в } D_\rho \text{ и непрерывна в } \overline{D}_\rho \right\}. \tag{1.3}$$

Это пространство снабжено естественной sup-нормой:

$$\|f\|_\rho = \max_{z \in \overline{D}_\rho} |f(z)|, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \tag{1.4}$$

и поэтому естественным образом вкладывается как подпространство в *полное нормированное* (т. е. банахово) пространство непрерывных комплекснозначных функций $C(\overline{D}_\rho)$. При подходе к границе области голоморфная функция может вести себя очень сложным образом, поэтому $\mathscr{A}(U) \subsetneq \mathscr{O}(U)$. Однако все голоморфные функции непрерывны, и потому для любой меньшей области U', относительно компактной в U (т. е. удовлетворяющей $\overline{U}' \subset U$), имеем $\mathscr{A}(U') \supset \mathscr{O}(U)$.

Теорема 1.6. *Пространство $\mathscr{A}(D_\rho)$ и его векторные аналоги*

$$\mathscr{A}^m(D_\rho) = \bigoplus_{m\ \text{раз}} \mathscr{A}(D_\rho)$$

— полные (банаховы) пространства.

Доказательство. Каждая фундаментальная последовательность функций из $\mathscr{A}(D_\rho)$ по определению фундаментальна в банаховом пространстве $C(\overline{D}_\rho)$ и имеет там равномерный предел. По принципу компактности Вейерштрасса (см. [122]), предельная функция также голоморфна в D_ρ, т. е. принадлежит $\mathscr{A}(D_\rho)$. Итак, пространство $\mathscr{A}(D_\rho)$ полно.

Векторные аналоги пространства $\mathscr{A}(D_\rho)$ — это прямые суммы нескольких копий пространства $\mathscr{A}(D_\rho)$, поэтому они тоже полны. □

Перейдём к доказательству теоремы 1.1.

Рассмотрим уравнение (1.1), определённое в области $U \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Через $D_\varepsilon = \bigl\{|t-t_0| < \varepsilon,\ |z_j - z_{0,j}| < \varepsilon,\ \ j = 1, \ldots, n\bigr\} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ обозначим достаточно маленький полидиск с центром в точке $(t_0, z_0) \in U$, целиком лежащий в U.

Определение 1.7. *Оператором Пикара* $\mathbf{P}$, соответствующим дифференциальному уравнению (1.1) и начальному условию $(t_0, z_0) \in U$, называется оператор $f \mapsto \mathbf{P}f$, заданный интегральной формулой

$$(\mathbf{P}f)(s,z) = z + \int_{t_0}^{s} F(t, f(t,z))\, dt \tag{1.5}$$

для всех вектор-функций $f\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$, для которых выражение в правой части равенства имеет смысл.

Ниже мы построим полное метрическое пространство, инвариантное под действием $\mathbf{P}$, на котором этот оператор сжимает. По принципу сжимающих отображений отсюда будет следовать существование неподвижной точки этого оператора. Несложно видеть, что функция f, такая что $\mathbf{P}f = f$, является решением уравнения (1.1).

Выберем произвольный компакт $K \subset U$ в области U. Пусть L_0 и L_1 — константы, ограничивающие сверху значения модуля функции F и её константы Липшица по z на компакте K: для любых точек $(t,z), (t,z') \in K$

$$|F(t,z)| \leqslant L_0, \quad |F(t,z) - F(t,z')| \leqslant L_1\, |z - z'|. \tag{1.6}$$

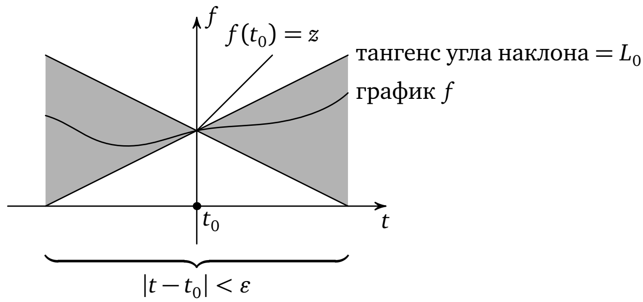

Рис. 1.1. График функции из пространства $\mathscr{M}$ лежит в закрашенной области (область изображена в пересечении с гиперплоскостью $z = \mathrm{const}$)

Пусть $\mathscr{M}$ — пространство функций из $\mathscr{A}^n(D_\varepsilon)$, для которых выполнено неравенство

$$|f(t,z) - z| \leqslant L_0\,|t - t_0|. \tag{1.7}$$

Это пространство полно по норме $\|\cdot\|_\varepsilon$, индуцированной с объемлющего пространства $\mathscr{A}^n(D_\varepsilon)$ (упражнение 1.3). График функции из пространства $\mathscr{M}$ показан на рис. 1.1.

Лемма 1.8. *Для достаточно малого полидиска D_ε интегральная формула* (1.5) *задаёт корректно определённый оператор Пикара* $\mathbf{P}\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$, *который сжимает в норме $\|\cdot\|_\varepsilon$. Показатель сжатия λ этого оператора не превосходит εL_1* (*константа L_1 определена выше*).

Доказательство. Поскольку $|f(t,z) - z| \leqslant L_0\varepsilon$, для достаточно малого ε точка $(t, f(t,z))$ принадлежит U и подынтегральное выражение в правой части (1.5) определено. Оценим интеграл из равенства (1.5):

$$|\mathbf{P}f(s,z) - z| = \left|\int_{t_0}^{s} F(t, f(t,z))\,dt\right| \leqslant L_0 \int_{t_0}^{s} |dt| = L_0\,|s - t_0|.$$

Поэтому правая часть формулы (1.5) имеет смысл для функций из пространства $\mathscr{M}$, и оператор $\mathbf{P}$ отображает это пространство в себя.

Для любых двух вектор-функций f, f', определённых в полидиске D_ε, аналогичная оценка даёт

$$\|\mathbf{P}f - \mathbf{P}f'\| \leqslant \sup_{|s-t_0|<\varepsilon} \int_{t_0}^{s} L_1\,|f(t,z) - f'(t,z)| \cdot |dt| \leqslant \varepsilon L_1\,\|f - f'\|.$$

Если $\varepsilon L_1 < 1$, оператор $\mathbf{P}$ сжимает и показатель сжатия не превосходит εL_1. □

Доказательство теоремы 1.1. Возьмём ε из леммы 1.8. Тогда оператор Пикара $\mathbf{P}\colon \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ сжимает с показателем сжатия λ не больше εL_1. По теореме 1.5 неподвижная точка этого оператора существует и единственна.

По теореме 1.6 эта неподвижная точка является *голоморфной* вектор-функцией $f: D_\varepsilon \to \mathbb{C}^n$, удовлетворяющей интегральному равенству

$$f(s,z) = z + \int_{t_0}^{s} F(t, f(t,z))\,dt, \qquad |s-t_0| < \varepsilon, \quad |z-z_0| < \varepsilon. \tag{1.8}$$

Для любого фиксированного z функция $\varphi_z(t) = f(t,z)$, очевидно, удовлетворяет и начальным условиям (1.2) (для $z_0 = z$), и дифференциальному уравнению (1.1). По построению, она голоморфно зависит от начальных условий z.

Чтобы доказать, что решение голоморфно зависит от параметров, можно рассмотреть их как дополнительные переменные. Предположим, что вектор-функция $F = F(t,z,y)$ голоморфно зависит от параметров $y \in \mathbb{C}^m$, и рассмотрим задачу Коши (напомним, что точкой мы обозначаем производную d/dt)

$$\begin{cases} \dot z = F(t,z,y), & z(t_0) = z_0, \\ \dot y = 0, & y(t_0) = y_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Решением задачи Коши будет функция $f(t,z,y,z_0,y_0)$, голоморфно зависящая от всех переменных. □

Замечание 1.9. Для дифференциального уравнения с правой частью $F(t,z)$ и его решения $z(t)$ можно произвести *сдвиг по времени*, рассмотрев функцию $z'(t) = z(t-y)$, $y \in \mathbb{C}^1$. Эта функция удовлетворяет уравнению $\dot z' = F(t-y, z')$, которое аналитически зависит от параметра y. По теореме 1.1 из этого следует, что решение задачи Коши голоморфно зависит также и от t-координаты начальной точки $(t_0, z_0) \in U$.

§1.4. Линейные дифференциальные уравнения. Экспонента линейного оператора

Доказательство теоремы существования *конструктивно*: решение дифференциального уравнения получается как равномерный предел его *приближений Пикара* — последовательных образов некоторой функции под действием оператора Пикара.

В простейшем случае, когда правая часть дифференциального уравнения — *константа* $F = \mathrm{const} \in \mathbb{C}^n$ (т. е. не зависит от t, z, y), приближения Пикара быстро стабилизируются: если $f_0(t,v) = v$, то

$$f_1(t,v) = f_2(t,v) = \ldots = v + (t-t_0)F.$$

Линейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется система уравнений

$$\dot z = Az, \quad z \in \mathbb{C}^n, \; A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}), \tag{1.10}$$

где $A = \|a_{ij}\|$ — постоянная (независящая от t и z) матрица $n \times n$ с комплексными коэффициентами. Докажем по индукции, что если последовательность приближений Пикара для решения (1.10) начинается с функции $f_0(t, v) = v$, то члены этой последовательности будут иметь вид

$$f_k(t, v) = \Big(E + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots + \frac{t^k}{k!}A^k\Big)v. \tag{1.11}$$

Действительно,

$$\mathbf{P}f_k(t, v) = v + \int\limits_0^t A \cdot \Big(E + sA + \ldots + \frac{s^k}{k!}A^k\Big)v\,ds =$$

$$= Ev + \Big(tA + \ldots + \frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A^{k+1}\Big)\,v = f_{k+1}(t, v).$$

Эти формулы подсказывают следующее важное определение.

Определение 1.10 (экспонента линейного оператора). Для произвольной постоянной матрицы $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ её *экспонентой* $\exp A$ называется сумма бесконечного (матричного) ряда

$$\exp A = E + A + \frac{1}{2!}A^2 + \ldots + \frac{1}{k!}A^k + \ldots \tag{1.12}$$

Так как $|A^k| \leqslant |A|^k$, а степенной ряд $\sum_{k\geqslant 0} \frac{r^k}{k!}$ абсолютно сходится для всех значений $r \in \mathbb{R}$, то матричный ряд (1.12) абсолютно сходится в комплексном векторном пространстве $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{n^2}$ для любого конечного n.

Заметим, что для любых двух *коммутирующих* матриц A, B их экспоненты удовлетворяют *групповому свойству*

$$\exp(A + B) = \exp A \cdot \exp B = \exp B \cdot \exp A. \tag{1.13}$$

Это можно доказать, формально перемножив матричные ряды для экспонент $\exp A$ и $\exp B$. Впрочем, можно заметить, что если матрицы A и B в этих рядах заменить на числа a и b, правила перемножения рядов не изменятся, а мы получим верное равенство $e^a e^b = e^{a+b}$. Значит, равенство для экспонент линейных операторов тоже верно.

Из явной формулы (1.11) для приближений Пикара линейной системы (1.10) сразу получаем следующую теорему.

Теорема 1.11. *Решение линейной системы дифференциальных уравнений* $\dot z = Az$, $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$, *с начальным условием* $z(0) = v$ *выражается через экспоненту линейного оператора*:

$$z(t) = (\exp tA)\,v, \quad t \in \mathbb{C},\ v \in \mathbb{C}^n. \tag{1.14}$$

□

Замечание 1.12. Вычисление экспоненты линейного оператора можно свести к вычислению многочлена от матрицы степени не выше $n-1$ и вычислению экспонент собственных значений оператора A. Действительно, предположим, что оператор A приведён к жордановой нормальной форме $A = \Lambda + N$, где $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ — диагональная составляющая, а N — верхнетреугольная (нильпотентная) составляющая, *коммутирующая* с Λ. Тогда $\exp\Lambda$ — диагональная матрица, на диагонали которой стоят экспоненты собственных значений Λ. Так как $N^n = 0$ в силу нильпотентности матрицы N, то

$$\exp[t(\Lambda + N)] = \exp t\Lambda \cdot \exp tN =$$
$$= \begin{pmatrix} \exp t\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \exp t\lambda_n \end{pmatrix} \cdot \left(E + tN + \frac{t^2}{2!}N^2 + \ldots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}N^{n-1}\right). \quad (1.15)$$

Из этого равенства можно получить метод решения линейных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами: координаты любого решения в любом базисе являются линейными комбинациями *квазимногочленов* $t^k \exp t\lambda_j$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, с комплексными коэффициентами.

Замечание 1.13 (формула Лиувилля — Остроградского). Из формулы (1.15) непосредственно получаем, что

$$\forall\, A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \qquad \det \exp A = \exp \operatorname{tr} A. \quad (1.16)$$

Действительно,

$$\det \exp A = \det \exp \Lambda \cdot \det \exp N = \prod_{i=1}^{n} \exp \lambda_i \cdot 1 = \exp \operatorname{tr} \Lambda = \exp \operatorname{tr} A.$$

Мы пользуемся тем, что $\exp N$ — многочлен от матрицы N — является верхнетреугольной матрицей с единицами на диагонали.

§ 1.5. Теорема о выпрямлении

Определение 1.14. Пусть $f(t, z)$ — решение задачи Коши для дифференциального уравнения (1.1) с начальным условием (t_0, z). *Отображением потока* этого дифференциального уравнения называется вектор-функция $n+2$ комплексных переменных (t_0, t_1, z), которая для $(t_0, z) \in U$ и достаточно малых $|t_0 - t_1|$ задаётся формулой

$$(t_0, t_1, z) \mapsto \Phi_{t_0}^{t_1}(z) = f(t_1, z). \quad (1.17)$$

Другими словами, $\Phi_{t_0}^{t_1}(z)$ — это значение решения задачи Коши $\varphi(t)$ с начальными условиями $\varphi(t_0) = z$ в точке t_1, достаточно близкой к t_0.

Пример 1.15. Для линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.10) отображение потока линейно:

$$\Phi_{t_0}^{t_1}(z) = [\exp((t_1 - t_0)A)]\, z.$$

Это отображение определено для *всех* значений t_0, t_1, z.

Приведём несколько свойств отображения потока, которые понадобятся нам в дальнейшем.

- По теореме 1.1 отображение Φ голоморфно.
- Решение задачи Коши единственно, значит, отображение Φ должно удовлетворять функциональному уравнению
$$\Phi_{t_1}^{t_2}\big(\Phi_{t_0}^{t_1}(z)\big) = \Phi_{t_0}^{t_2}(z) \tag{1.18}$$
для всех t_1, t_2, достаточно близких к t_0.
- Так как для любого z вектор-функция $t \mapsto \varphi_z(t) = \Phi_{t_0}^{t}(z)$ удовлетворяет уравнению (1.1), мы получаем
$$\frac{\partial}{\partial t}\bigg|_{t=t_0,\, z=z_0} \Phi_{t_0}^{t}(z) = -\frac{\partial}{\partial t_0}\bigg|_{t=t_0,\, z=z_0} \Phi_{t_0}^{t}(z) = F(t_0, z_0).$$
- Из интегрального уравнения (1.8) следует, что
$$\Phi_{t_0}^{t}(z_0) = z_0 + (t-t_0)F(t_0, z_0) + o(|t-t_0|) \tag{1.19}$$
и, значит, производная отображения потока Φ по переменной z в точке (t_0, z_0) имеет вид:
$$\left(\frac{\partial \Phi_{t_0}^{t}(z)}{\partial z}\right)_{t=t_0,\, z=z_0} = E. \tag{1.20}$$

На множестве дифференциальных уравнений можно ввести несколько естественных отношений эквивалентности, самым важным из которых является (би)голоморфная эквивалентность.

Определение 1.16. Говорят, что биголоморфное отображение $H\colon U \to U'$ *сопрягает* дифференциальное уравнение (1.1) с уравнением
$$\dot{w} = F'(t', w), \quad (t', w) \in U', \tag{1.21}$$
если H переводит любую интегральную кривую уравнения (1.1) в интегральную кривую уравнения (1.21). В этом случае отображение H называется *сопряжением* уравнения (1.1) с уравнением (1.21).

Два дифференциальных уравнения называются *голоморфно эквивалентными* в фиксированных областях, если для них существует биголоморфное сопряжение.

Понятно, что голоморфно эквивалентные уравнения неразличимы, пока речь идёт о свойствах, инвариантных относительно выбора координат. Значит, большое значение имеет приведение уравнения к более простому виду с помощью биголоморфного сопряжения.

Теорема 1.17 (теорема о выпрямлении). *Для любого голоморфного дифференциального уравнения* (1.1) *в достаточно малой окрестности любой точки существует биголоморфное отображение* $H\colon (t, z) \mapsto (t, h(t, z))$, *которое сопрягает его с простейшим уравнением*
$$\dot{w} = 0 \tag{1.22}$$
и сохраняет независимую переменную t.