

**Г. Ф. БЕЙКЕР**

**АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ**

**Теорема Абеля и связанная с ней  
теория тэта-функций**



# ABELIAN FUNCTIONS

Abel's theorem and the allied theory  
of theta functions

H. F. Baker  
*St John's College, Cambridge*



**CAMBRIDGE**  
UNIVERSITY PRESS

КЛАССИЧЕСКИЕ МОНОГРАФИИ: МАТЕМАТИКА

Г. Бейкер

# АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Теорема Абеля и связанная с ней теория  
тэта-функций

Перевод С. М. Львовского

Предисловие И. М. Кричевера

Москва  
Издательство МЦНМО  
2008

УДК 515.178.2  
ББК 22.147  
Б41

Серия КЛАССИЧЕСКИЕ МОНОГРАФИИ: МАТЕМАТИКА

**Бейкер Г.**  
Б41 Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория  $\theta$ -функций / Перевод с англ. С. М. Львовского. — М.: МЦНМО, 2008. — 736 с.

ISBN 978-5-94057-192-6

Эта книга, оригинал которой впервые вышел в свет в 1897 году, — перевод классической монографии по теории римановых поверхностей и  $\theta$ -функций. Изложение ведется в непривычном современному читателю классическом стиле конца XIX века. Основной упор делается не на изложение общих теорий, а на получение явных формул.

Издание книги на русском языке вызвано тем, что в последние десятилетия XX века многочисленные задачи математической и теоретической физики (например, метод обратной задачи рассеяния и конечнозонного интегрирования, задачи теории автодуальных калибровочных полей и др.) оказались тесно связанными с кругом проблем, которым посвящена книга Бейкера.

Знакомство с этой книгой будет очень полезно всем математикам и физикам, занимающимся алгебраической геометрией или интегрируемыми системами.

ББК 22.147

Translation from the English language edition:  
*Abelian functions. Abel's theorem and the allied theory of theta functions*  
by Henry Frederick Baker. Cambridge University Press, 1995.

ISBN 0-521-49877-5 (англ.)  
ISBN 978-5-94057-192-6

© Cambridge University Press, 1995.  
© МЦНМО, перевод на русск. яз., 2008.

# Оглавление

Предисловие редактора английского издания	15
Литература к предисловию редактора	27
Предисловие автора	28

## Глава 1

### ПРЕДМЕТ ИССЛЕДОВАНИЯ

1	Основная алгебраическая иррациональность . . . . .	31
2, 3	Точки и бесконечно малые на римановой поверхности . . . . .	31
4, 5	При рациональных преобразованиях ситуация не меняется . . . . .	33
6	Инвариантность рода при рациональных преобразованиях; если существует рациональная функция порядка 1, род поверхности равен нулю . . . . .	37
7, 8	Максимальное количество неустранимых параметров равно $3p - 3$ . . . . .	38
9, 10	Геометрическое обоснование теории . . . . .	40
11	Обобщение методов Римана . . . . .	42

## Глава 2

### ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

12	Пока что мы опираемся на теорему существования Римана . . . . .	44
13	Обозначения для нормальных элементарных интегралов второго рода . . . . .	44
14	Обозначения для нормальных элементарных интегралов третьего рода . . . . .	45
15	Выбор нормальных интегралов первого рода . . . . .	45
16	Значение слова «период». Общие замечания . . . . .	46
17	Примеры интегралов и точек поверхности . . . . .	47
18	Периоды нормальных элементарных интегралов второго рода . . . . .	51
19	Интеграл второго рода получается с помощью дифференцирования интеграла третьего рода . . . . .	52
20	Выражение рациональной функции через интегралы второго рода . . . . .	54
21	Специальные рациональные функции, инвариантные при рациональных преобразованиях . . . . .	54
22	Нормальные римановы интегралы зависят от способа разрезания поверхности . . . . .	56

## Глава 3

### ПОЛЮСЫ ОДНОЗНАЧНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

23	Взаимозависимость полюсов рациональной функции . . . . .	57
24, 25	Условие «заданные точки являются полюсами рациональной функции» . . . . .	57
26	Общая форма теоремы Вейерштрасса о лакунах . . . . .	60
27	Предварительная формулировка теоремы Римана—Роха . . . . .	63

28, 29	Случаи слияния полюсов; $p$ критических чисел . . . . .	64
30	Простая геометрическая иллюстрация . . . . .	65
31—33	$(p - 1)p(p + 1)$ точек, являющихся единственными полюсами рациональных функций порядка, меньшего $p + 1$ . . . . .	67
34—36	Из этих точек не менее $2p + 2$ различны . . . . .	70
37	Формулировка теоремы Римана—Роха с примерами . . . . .	74

#### Глава 4

##### ОПИСАНИЕ РИМАНОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОБЩЕГО ВИДА

38	Общие замечания о целых рациональных функциях . . . . .	77
39	Определение размера; базис рациональных функций . . . . .	78
40	Пример с четырехлистной поверхностью . . . . .	82
41	Сумма размеров функций из базиса равна $p + n - 1$ . . . . .	84
42	Базис целых рациональных функций . . . . .	85
43	Основные свойства базиса целых рациональных функций . . . . .	87
44	Определение производного множества специальных функций $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ . . . . .	91
45	Алгебраическое представление элементарных интегралов третьего рода с особенностями в обыкновенных точках, а также интегралов первого рода . . . . .	94
46	Алгебраическая форма элементарного интеграла третьего рода в общем случае . . . . .	98
47	Алгебраическая форма интеграла второго рода: альтернативный вывод . . . . .	100
48	Дискриминант базиса целых функций . . . . .	103
49	Вывод выражения для некоторой рациональной функции в общем случае . . . . .	105
50	Алгебраические результаты этой главы могут заменить римановы теоремы существования . . . . .	107

#### Глава 5

##### О НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

51	Обзор содержания главы . . . . .	109
52	Если $p > 1$ , то существование рациональной функции второго порядка влечет существование $(1, 1)$ -соответствия . . . . .	109
53—55	Из существования рациональной функции второго порядка вытекает гиперэллиптическое уравнение . . . . .	110
56	Базис целых функций и интегралы первого рода . . . . .	113
57	Базис целых функций и интегралы первого рода . . . . .	115
58	Примеры . . . . .	115
59	Число неустраимых параметров в гиперэллиптическом уравнении; преобразование к каноническому виду . . . . .	116
60—63	Каноническое уравнение Вейерштрасса для произвольного рода . . . . .	120
64—66	Фактическое построение уравнения . . . . .	122
67, 68	Примеры к теории целых функций: случай вейерштрассова канонического уравнения . . . . .	128
69—71	Метод может быть серьезно обобщен . . . . .	131
72—79	Нахождение базиса целых функций по Гензелю . . . . .	133

## Глава 6 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ

80	Сравнение теории рациональных функций с теорией пересечений кривых	143
81—83	Набросок элементарной теории	143
84	Метод, используемый в этой главе	147
85	Как мы будем рассматривать бесконечность. Возможность использования однородных координат	148
86	Ранг целого многочлена; число членов; обобщенные нули	150
87	Присоединенные многочлены; определение индекса точки	151
88	Плюккерovy уравнения; связь с теорией дискриминанта	153
89, 90	Выражение рациональных функций через присоединенные многочлены	155
91	Выражение интегралов первого рода	157
92	Число слагаемых в присоединенном многочлене; выражение элементарного интеграла третьего рода	158
93	Линейные системы присоединенных многочленов; теорема взаимности	163
94, 95	Определения множества точек, линейной системы, а также вынужденных, эквивалентных и совычетных множеств	166
96, 97	Теорема о совычетных множествах; алгебраическая основа этой теоремы	167
98	Рациональная функция порядка $< p + 1$ выразима через $\varphi$ -многочлены	169
99, 100	Критика этой теории; теорема Кэли	170
101—104	Рациональные преобразования с помощью $\varphi$ -многочленов	173
105—108	Приложения специальных множеств	178
109	Гиперэллиптическая поверхность; преобразование к каноническому виду	184
110—114	Всю рациональную теорию можно построить с помощью инвариантных отношений $\varphi$ -многочленов; число соотношений, связывающих эти многочлены	185
115—119	Элементарные соображения, относящиеся к пространственным кривым	192

## Глава 7 КООРДИНАЦИЯ ПРОСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ОДНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

120	Предмет этой главы	202
121	Обозначения для интегралов первого рода	202
122, 123	Выражение функции $\psi(x, a; z, c_1, \dots, c_p)$ через римановы интегралы	203
124	Выражение для одной фундаментальной функции	205
125	Приложения этой функции к рациональным функциям и интегралам	206
126—128	Функция $\psi(x, a; z, c)$ ; ее использование для выражения рациональных функций	208
129	Модифицированная фундаментальная функция; ее использование для выражения рациональных функций	210
130, 131	Алгебраические формулы для функций $\psi(x, a; z, c_1, \dots, c_p)$ и $\psi(x, a; z, c)$	211
132	Примеры этих функций; из этих функций получаются алгебраические выражения для элементарных интегралов	212
133, 134	Построение канонического интеграла третьего рода, в котором можно переставлять аргумент и параметр; алгебраическое выражение для такого интеграла; его связь с римановым элементарным нормальным интегралом	216
135	Алгебраическая теорема, равносильная перестановочности аргумента и параметра	219

136	Элементарные канонические интегралы второго рода . . . . .	220
137	Приложения. Канонические интегралы третьего рода, получаемые из функции $\psi(x, a; z, c_1, \dots, c_p)$ . Модификации для функции $\psi(x, a; z, c)$ . . . . .	221
138	Ассоциированные интегралы первого и второго рода. Новые канонические интегралы. Алгебраическая теория гиперэллиптических интегралов в одной формуле . . . . .	227
139, 140	Вывод вейерштрассовых и римановых соотношений для периодов интегралов первого и второго рода . . . . .	230
141	Эквивалентность соотношений Римана и Вейерштрасса . . . . .	232
142	Другие доказательства вейерштрассовых и римановых соотношений между периодами . . . . .	233
143	Выражение однозначных трансцендентных функций через функцию $\psi(x, a; z, c)$ . . . . .	235
144, 145	Теорема Миттаг-Левфлера . . . . .	236
146	Разложение однозначной трансцендентной функции на простейшие множители . . . . .	239
147	Перестановка аргумента и параметра в общем виде (по Абелю) . . . . .	240

### Глава 8

#### ТЕОРЕМА АБЕЛЯ; ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

148—150	Примерное описание теоремы Абеля . . . . .	242
151	Формулировка теоремы . . . . .	245
152	Редукция общей теоремы к двум более простым . . . . .	246
153, 154	Доказательство теоремы и ее аналитическая формулировка . . . . .	247
155	Замечание; формулировка на языке многочленов . . . . .	249
156	Исчезновение логарифма в правой части формулы . . . . .	251
157	Приложения теоремы. Оригинальное доказательство Абеля . . . . .	252
158, 159	Количество алгебраически независимых уравнений, задаваемых теоремой. Теорема, обратная к теореме Абеля . . . . .	257
160, 161	Интегрирование дифференциальных уравнений Абеля . . . . .	260
162	Точно такое же доказательство теоремы Абеля для пространственных кривых . . . . .	266

### Глава 9

#### ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ЯКОБИ

163	Формулировка проблемы . . . . .	270
164	Единственность общего решения . . . . .	270
165	Необходимость использования сравнений, а не уравнений . . . . .	271
166, 167	Исключение из рассмотрения функций с бесконечно малыми периодами . . . . .	272
168, 169	Доказательство существования решения . . . . .	274
170—172	Построение функций, задающих решения; связь с тэта-функциями . . . . .	276

### Глава 10

#### РИМАНОВЫ ТЭТА-ФУНКЦИИ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

173	Исторический очерк: как появились тэта-функции . . . . .	280
174	Сходимость. Обозначения. Введение матричных обозначений . . . . .	280
175, 176	Периодичность тэта-функций. Нечетные и четные функции . . . . .	282



177	Число нулей равно $p$ . . . . .	286
178	Расположение нулей в простом случае . . . . .	287
179	Точки $m_1, \dots, m_p$ . . . . .	289
180	Расположение нулей в произвольном случае . . . . .	290
181	Тэта-функции, тождественно обращающиеся в нуль . . . . .	292
182, 183	Основные свойства. Геометрический смысл точек $m_1, \dots, m_p$ . . . . .	293
184—186	Геометрические рассуждения; специальная проблема обращения; кон- тактные кривые . . . . .	301
187	Решение проблемы обращения Якоби с помощью отношений тэта-функций . . . . .	308
188	Тэта-функции, тождественно обращающиеся в нуль: общая теория; вы- ражение $\wp$ -многочленов через тэта-функции . . . . .	309
189—191	Общая форма тэта-функции. Основные формулы. Периодичность . . . . .	317
192	Определение $\zeta$ -функций. Обобщение эллиптической формулы . . . . .	322
193	Выражение разности двух $\zeta$ -функций через алгебраические интегралы и рациональные функции . . . . .	323
194—196	Дальнейшее развитие теории. Выражение одной $\zeta$ -функции через алгеб- раические интегралы . . . . .	323
197, 198	Определение $\wp$ -функций. Выражение через рациональные функции . . . . .	327

## Глава 11

### РИМАНОВЫ ТЭТА-ФУНКЦИИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

199	Гиперэллиптический случай иллюстрирует общую теорию . . . . .	331
200	Точки $m_1, \dots, m_p$ . Правило полупериодов . . . . .	331
201, 202	Базис характеристик, определяемый точками ветвления . . . . .	334
203	Обозначения; какие общие теоремы мы будем иллюстрировать . . . . .	336
204, 205	Таблицы, иллюстрирующие общую теорию . . . . .	337
206—213	Алгебраическое выражение для отношений гиперэллиптических тэта-функций. Решение проблемы обращения в гиперэллиптическом случае . . . . .	343
214, 215	Выражение одной $\zeta$ -функции через алгебраические интегралы и рацио- нальные функции . . . . .	353
216	Рациональное выражение для $\wp$ -функции. Связь с отношениями тэта- функций. Решение проблемы обращения с помощью $\wp$ -функции . . . . .	358
217	Рациональное выражение для $\wp$ -функции . . . . .	362
218—220	Алгебраический вывод формулы сложения для тэта-функций в случае $p = 2$ ; обобщение формулы $\sigma(u+v)\sigma(u-v) = \sigma^2(u)\sigma^2(v)(\wp(u) - \wp(v))$ . . . . .	366
221	Примеры для случая $p = 2$ . Гёпелево биквадратичное соотношение . . . . .	374

## Глава 12

### ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

222	Эта глава посвящена некоторой замене независимой переменной и неко- торой специальной функции . . . . .	380
223—225	Определение группы подстановок; основные свойства . . . . .	380
226, 227	Сходимость некоторого ряда; функции, ассоциированные с группой . . . . .	386
228—232	Основные функции. Сравнение с теорией, развиваемой далее в этой книге . . . . .	389
233—235	Определение и периодичность фундаментальной функции Шоттки . . . . .	396

236, 237	Ее связь с зэта-функциями . . . . .	401
238	Еще одна функция, связанная с функцией Шоттки . . . . .	404
239	Гиперэллиптический случай . . . . .	409

### Глава 13

#### О КОРНЯХ ИЗ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

240	Введение . . . . .	411
241, 242	Выражение корня из рациональной функции через римановы интегралы и через зэта-функции . . . . .	412
243	Корни из рациональных функций как обобщение рациональных функций . . . . .	414
244, 245	Характеристики радикальных функций . . . . .	414
246—249	Бикасательные к плоской кватерике . . . . .	418
250, 251	Решение проблемы обращения с помощью радикальных функций . . . . .	426

### Глава 14

#### ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

252	Формулировка результатов. Обозначения . . . . .	430
253	Разрезание римановой поверхности, необходимое для наших целей . . . . .	431
254	Определение факториальной функции (в частности, и радикальной функции). Примарные и ассоциированные системы факториальных функций . . . . .	432
255	Факториальные интегралы из примарной и ассоциированной систем . . . . .	434
256	Факториальные интегралы, конечные всюду, кроме фиксированных точек. Определение чисел $\varpi$ и $\sigma + 1$ . . . . .	436
257	Если $\sigma + 1 > 0$ , то имеется $\sigma + 1$ всюду конечная факториальная функция из ассоциированной системы . . . . .	437
258	Другой подход к вопросу о существовании всюду конечных факториальных функций из ассоциированной системы. Различные случаи, возникающие в зависимости от значений $\sigma + 1$ и $\sigma' + 1$ . . . . .	438
259	Выражение этих функций через всюду конечные интегралы . . . . .	440
260	Общие замечания о периодах факториальных интегралов . . . . .	441
261, 262	Теорема Римана—Роха для факториальных функций. Если $\sigma' + 1 = 0$ , то наименьшее количество произвольно заданных полюсов для функции из примарной системы равно $\varpi' + 1$ . . . . .	442
263	Построение факториальных функций из примарной системы с $\varpi' + 1$ произвольным полюсом . . . . .	444
264, 265	Построение факториального интеграла, имеющего особенностями только полюсы. Для интеграла из примарной системы наименьшее количество таких полюсов равно $\sigma + 2$ . . . . .	445
266	Факториальный интеграл можно упростить (по аналогии с римановым нормальным интегралом второго рода) . . . . .	448
267	Выражение факториальной функции с $\varpi' + 1$ полюсами через факториальный интеграл с $\sigma + 2$ полюсами. Аналогия между факториальными функциями и функциями $\psi(x, a; z, c_1, \dots, c_p)$ . . . . .	449
268	Проверка теории в одном очень частном случае . . . . .	451
269	Радикальные функции как частный случай факториальных функций . . . . .	457
270	Факториальные функции без существенных особенностей, мультипликаторы которых являются произвольными константами . . . . .	458

271, 272	Исследование общей формулы, связывающей факториальные функции и тэта-функции . . . . .	459
273	Функция Шоттки—Клейна в некотором виде . . . . .	464
274	Выражение тэта-функции через радикальные функции как частный случай результата из п. 272 . . . . .	468
275, 276	Формула из п. 272 для случая рациональных функций . . . . .	469
277	Формула из п. 272 позволяет алгебраически определить гиперэллиптическую тэта-функцию и ее тэта-характеристику . . . . .	472
278	Выражение произвольной факториальной функции через простые тэта-функции; примеры . . . . .	476
279	Связь теории факториальных функций с теорией автоморфных форм . . . . .	478

### Глава 15

#### СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ТЭТА-ФУНКЦИЙ: ВВЕДЕНИЕ

280	План этой и двух последующих глав . . . . .	482
281	Однозначная целая аналитическая функция от $p$ переменных, периодическая по каждой переменной в отдельности, представляется в виде ряда из экспонент . . . . .	482
282, 283	Доказательство того, что $2^{2p}$ тэта-функций с полужелыми характеристиками линейно независимы . . . . .	485
284, 285	Определение общей тэта-функции порядка $r$ ; ее линейное выражение через $r^p$ тэта-функций. Любые $p + 2$ тэта-функции одного порядка и с одинаковыми периодами и характеристиками связаны однородным полиномиальным соотношением . . . . .	486
286	Теорема сложения для гиперэллиптических тэта-функций, а также для общего случая, если $p < 4$ . . . . .	495
287, 288	Число линейно независимых тэта-функций порядка $r$ , имеющих одну и ту же четность . . . . .	501
289	Примеры. Гёпелево биквадратичное соотношение . . . . .	504

### Глава 16

#### ПРЯМОЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ТЭТА-ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ

290	Обзор содержания главы . . . . .	511
291	Теорема сложения, получаемая при перемножении двух тэта-функций . . . . .	511
292	Теорема сложения, получаемая при перемножении четырех тэта-функций . . . . .	514
293	Общая формула, получаемая при перемножении произвольного количества тэта-функций . . . . .	518

### Глава 17

#### ТЭТА-СООТНОШЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НЕКОТОРЫМИ ГРУППАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

294	Сокращенные обозначения; определения понятий «соединенный» и «разъединенный»; литературные ссылки (см. также с. 331) . . . . .	528
295	Одна подготовительная лемма . . . . .	529
296	Определение гёпелевой группы характеристик . . . . .	531
297	Определение гёпелевой системы характеристик . . . . .	532
298, 299	Определение гёпелевых систем постоянной четности; число таких систем . . . . .	534
300—303	Определение базисного набора гёпелевых систем . . . . .	536
304, 305	Сводка полученных результатов и простейшие приложения . . . . .	545

306—308	Число линейно независимых тэта-функций второго порядка, имеющих некоторый определенный вид. Явная формулировка одного важного тождества . . . . .	548
309—311	Самые важные формулы этой главы. Общая теорема сложения. Выражение $\wp$ -функции через отношения тэта-функций . . . . .	554
312—317	Другие применения идей этой главы. Представление функции $\vartheta(nv)$ в виде целого многочлена степени $n^2$ от $2^n$ функций $\vartheta(v)$ . . . . .	561

### Глава 18

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРИОДОВ, И В ОСОБЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

318	Общие соображения по поводу теории преобразований . . . . .	574
319—323	Общая теория преобразования петель периодов на римановой поверхности . . . . .	575
324	Аналитическая теория преобразования периодов и характеристик тэта-функции . . . . .	580
325	Сходимость ряда для преобразованной функции . . . . .	584
326	Специализация формул для случая линейного преобразования . . . . .	585
327	Преобразование тэта-характеристик; четных характеристик; соединенных характеристик . . . . .	586
328	Характеристики периодов и тэта-характеристики . . . . .	589
329	Нахождение линейного преобразования, переводящего данную четную характеристику в нулевую . . . . .	590
330, 331	Линейное преобразование одной разъединенной системы тэта-характеристик в другую . . . . .	592
332	Композиция двух преобразований различного порядка; дополнительные преобразования . . . . .	597
333, 334	Построение $p + 2$ элементарных линейных преобразований, обладающих тем свойством, что всякое линейное преобразование представимо в виде их композиции; нахождение постоянных множителей для каждого из этих преобразований . . . . .	598
335	Постоянный множитель для произвольного линейного преобразования . . . . .	603
336	Всякое линейное преобразование соответствует замене петель периодов на римановой поверхности . . . . .	605
337, 338	Линейные преобразования точек $m_1, \dots, m_p$ . . . . .	607
339	Линейное преобразование характеристик радикальной функции . . . . .	609
340	Нахождение точек $m_1, \dots, m_p$ на римановой поверхности с заданными разрезами . . . . .	611
341	Линейное преобразование отношений гиперэллиптических тэта-функций . . . . .	613
342	Удобный выбор петель периодов для гиперэллиптических поверхностей специального вида. Вейерштрассовы числовые обозначения для полуцелых характеристик . . . . .	614

### Глава 19

#### О СИСТЕМАХ ПЕРИОДОВ И ОБОБЩЕННЫХ ЯКОБИЕВЫХ ФУНКЦИЯХ

343	Предмет этой главы . . . . .	617
344—350	Столбцы периодов. Исключение бесконечно малых периодов. Выражение произвольного столбца периодов через конечное число таких столбцов, с целыми коэффициентами . . . . .	617

- 351—356 Определение общих якобиевых функций, сравнение с тэта-функциями . . . 624  
 357—362 Выражение якобиевой функции через тэта-функции. Всякие  $p + 2$  якобиевы функции с одинаковыми периодами и параметром связаны однородным полиномиальным соотношением . . . . . 634

### Глава 20

#### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

- 363 Обзор содержания главы и литературные ссылки . . . . . 646  
 364, 365 Элементарная теория преобразований второго порядка . . . . . 647  
 366, 367 Одна общая формула, из которой выводится формула для преобразования нечетного порядка . . . . . 653  
 368, 369 Общая теорема о преобразованиях нечетного порядка . . . . . 657  
 370 Преобразования второго порядка в общем случае . . . . . 664  
 371 Два этапа нахождения постоянных коэффициентов . . . . . 666  
 372 Первый этап нахождения коэффициентов . . . . . 667  
 373 Замечания и примеры в связи со вторым этапом . . . . . 669  
 374 Преобразование периодов с нецелыми коэффициентами . . . . . 672  
 375 Ссылки на алгебраические приложения теории . . . . . 675

### Глава 21

#### КОМПЛЕКСНОЕ УМНОЖЕНИЕ ТЭТА-ФУНКЦИЙ. СООТВЕТСТВИЯ ТОЧЕК НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

- 376 Предмет настоящей главы . . . . . 676  
 377, 378 Необходимые условия для существования комплексного умножения (специального преобразования) тэта-функций . . . . . 676  
 379—382 Доказательство того, что в одном из случаев условия достаточны . . . . . 679  
 383 Пример: эллиптический случай . . . . . 683  
 384 Определение  $(r, s)$ -соответствия на римановой поверхности . . . . . 687  
 385 Соотношения, необходимые для существования соответствия . . . . . 687  
 386 Алгебраическое задание соответствия на общей римановой поверхности . . . . . 689  
 387 неподвижные точки. Примеры с бикасательными и перегибами плоской кривой . . . . . 693  
 388 Условия на  $(1, s)$ -соответствие на специальной римановой поверхности . . . . . 696  
 389 Если  $p > 1$ , то всякое  $(1, 1)$ -соответствие периодически... . . . . . 697  
 390 ...и его наличие влечет ограничения на вид уравнения римановой поверхности . . . . . 698  
 391—393 При  $p > 1$  не бывает бесконечно много  $(1, 1)$ -соответствий . . . . . 699  
 394 Примеры для случая  $p = 1$  . . . . . 702

### Глава 22

#### ВЫРОЖДЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ

- 395 Пример эффекта, о котором пойдет речь . . . . . 704  
 396 Теорема Вейерштрасса. Связь с преобразованием, в результате которого тэта-функция распадается в произведение . . . . . 704  
 397 Теоремы Вейерштрасса и Пикара. Связь с линейным преобразованием, для которого  $\tau''_{1,2} = r$  . . . . . 705  
 398 При  $p = 2$  существование одного вырожденного интеграла влечет существование второго . . . . . 706

399, 400	Случай $p = 2$ : связь с теорией специальных преобразований . . . . .	707
401—403	Условия на уравнение римановой поверхности. Литературные ссылки . . .	708

### Приложение 1

#### ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

404	Формальное доказательство того, что на всякой алгебраической кривой в пространстве реализуются соотношения, связывающие три рациональные функции на римановой поверхности . . . . .	710
-----	---	-----

### Приложение 2

#### О МАТРИЦАХ

405—410	Вводные замечания . . . . .	712
411—415	Разложение абелевой матрицы . . . . .	715
416	Один частный результат . . . . .	720
417, 418	Леммы . . . . .	720
419, 420	Обоснование результатов, принятых без доказательства в п. 396, 397 . . .	721
<b>Предметный указатель</b>		723
<b>Список некоторых обозначений</b>		729
<b>Указатель имен</b>		731

## Предисловие редактора английского издания

Классическая алгебраическая геометрия, неразрывно связанная с именами Абеля, Римана, Вейерштрасса, Пуанкаре, Клебша, Якоби и других выдающихся математиков XIX века, являлась главным образом аналитической теорией. В XX веке она обогатилась методами и идеями топологии и коммутативной алгебры и превратилась в одну из основных математических дисциплин.

Традиционный эклектизм (в лучшем значении этого слова) алгебраической геометрии всегда был источником ее многочисленных приложений к другим областям математики. Роль алгебраической геометрии как «прикладной науки» чрезвычайно возросла в последние 15–20 лет, когда были найдены ее новые приложения к нелинейным уравнениям и квантовой теории поля.

Механика, математическая и теоретическая физика могут быть названы «новыми» сферами приложения алгебраической геометрии. Впрочем, эти области нетрадиционны только для второй трети XX века — периода, когда казалось, что абстрактный язык гротендиковских схем навсегда заменил довольно наивный язык классической алгебраической геометрии.

Результаты последних лет, среди которых особо стоит отметить решение проблемы Римана—Шоттки и приложения топологической гравитации к теории пересечений на пространствах модулей алгебраических кривых, показывают, что теперь, как и в XIX веке, отношения между алгебраической геометрией и физикой ни в коей мере не являются односторонними.

Когда число ученых, для которых алгебраическая геометрия стала рабочим инструментом, стало быстро расти, обнаружилась нехватка подходящей для них математической литературы. Почти все книги по этой теме, доступные современному читателю, написаны на языке абстрактной алгебры. Идея максимальной общности, заложенная в теорию схем, мешает читателю, желающему быстро войти в курс дела, особенно если этот читатель — физик.

Было бы преувеличением сказать, что подходящая литература отсутствует полностью. Некоторые книги последних десятилетий, такие как «Принципы алгебраической геометрии» Гриффитса и Харриса, «Лекции о  $\theta$ -функциях» Мамфорда и «Theta-functions» Дж. Фея (J. Fay), написаны в отчетливо неоклассическом стиле.

Несомненно, книга Бейкера занимает особое место в этом списке, благодаря хотя бы тому, что ее первое издание датировано концом XIX века. Но это — не единственная ее особенность. Книга на удивление современна и, более того, содержит результаты, которые до сих пор выходят за рамки современных учеб-

ников. Замечательно, что именно эти результаты тесно связаны с приложениями алгебраической геометрии к современной математической физике, упоминавшиеся выше.

При всем многообразии результатов, полученных в рамках классической алгебраической геометрии, ее ядро состоит из сравнительно небольшого числа основных определений и теорем. В их список входят теорема Римана—Роха, понятие якобиана алгебраической кривой, теорема Абеля и якобиево решение проблемы обращения с помощью тэта-функций.

Хотя автор этой книги вынес в заголовок лишь теорему Абеля и теорию тэта-функций, скромные слова «и связанная с ней теория» означают «все остальное». Это «остальное», кроме теорем, перечисленных выше, включает в себя элементы теории униформизации алгебраических кривых и связанную с ней теорию автоморфных форм, а также модель Шоттки алгебраических кривых. Очень важны для современных приложений разделы, посвященные «факториальным функциям».

Необходимо подчеркнуть еще одно — возможно, основное — достоинство этой книги. В ней проявляется характерная черта классической алгебраической геометрии — стремление выразить конечный результат в виде явной аналитической формулы. Это предполагает определение минимального класса новых трансцендентных функций — «кирпичей», из которых может быть построено все здание.

Чтобы продемонстрировать это, мы кратко изложим основные моменты теории так называемого конечнозонного (или алгебро-геометрического) интегрирования нелинейных уравнений. При этом мы сможем отдать дань уважения автору этой книги, чье имя увековечено в названии функции Бейкера—Ахиезера, играющей ключевую роль в разнообразных современных приложениях алгебраической геометрии к нелинейной физике.

Алгебро-геометрическая схема интегрирования нелинейных уравнений применима ко всем уравнениям, рассматриваемым в рамках метода обратной задачи. К таковым относятся уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} = 0, \quad (0.1)$$

его двумерное обобщение — уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \left( u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} \right)_x, \quad (0.2)$$

нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t = \psi_{xx} + |\psi|^2\psi, \quad (0.3)$$

уравнение sin-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u, \quad (0.4)$$

а также многие другие фундаментальные уравнения современной математической физики.

Все уравнения, рассматриваемые в рамках обратной задачи, могут быть представлены в виде условий совместности для переопределенной системы вспомогательных линейных задач.



К примеру, для уравнения Кортевега—де Фриза (0.1) эта система имеет вид

$$L\psi = 0, \quad \partial_t \psi = A\psi, \quad (0.5)$$

где  $L$  и  $A$  равны

$$L = -\partial_x^2 + u(x, t), \quad A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u\partial_x - \frac{3}{4}u_x. \quad (0.6)$$

Из совместимости системы (0.5) следует, что

$$[\partial_t - A, L] = 0 \Leftrightarrow L_t = [A, L]. \quad (0.7)$$

Операторное уравнение (0.7) называется *уравнением Лакса*. Широкий класс нелинейных уравнений может быть представлен в виде (0.7), где  $L$  и  $A$  — обыкновенные дифференциальные операторы от  $x$  с матричными или скалярными коэффициентами, зависящими от переменных  $x$  и  $t$ :

$$L = \sum_{i=1}^n u_i(x, t)\partial_x^i, \quad A = \sum_{i=1}^m v_i(x, t)\partial_x^i. \quad (0.8)$$

Всякое уравнение Лакса является бесконечномерным аналогом вполне интегрируемой системы. В частности, оно может быть включено в бесконечную иерархию коммутирующих потоков. Для уравнения Кортевега—де Фриза они имеют вид

$$\partial_n u = f_n(u, u_x, \dots, u^{(2n+1)}), \quad u = u(x, t, t_3, t_4, \dots), \quad \partial_n = \frac{\partial}{\partial t_n}, \quad (0.9)$$

и эквивалентны операторному уравнению

$$\partial_n L = [A_{2n+1}, L], \quad (0.10)$$

где  $L$  — оператор Шрёдингера, а  $A_{2n+1}$  — дифференциальный оператор порядка  $2n + 1$ .

Первоначальное определение  $n$ -зонных решений уравнения Кортевега—де Фриза было предложено Новиковым, который рассматривал ограничение этого уравнения на пространство стационарных решений уравнения (0.10):

$$f_n(u, u_x, \dots, u^{(2n+1)}) = 0 \Leftrightarrow [L, A_{2n+1}] = 0. \quad (0.11)$$

Операторное уравнение (0.11) является частным случаем более общей задачи: классификации пар коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов  $L_n$  и  $L_m$  порядков  $n$  и  $m$  соответственно. В чисто алгебраическом виде эта задача была рассмотрена и частично решена в выдающихся работах Берчналла и Чоунди [1, 2] в 1920-х гг. Они доказали, что для всякой пары таких операторов существует многочлен  $R(\lambda, \mu)$  от двух переменных, для которого

$$R(L_n, L_m) = 0. \quad (0.12)$$

Если порядки  $n$  и  $m$  этих операторов взаимно просты, то каждой точке  $Q = (\lambda, \mu)$  кривой  $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ , заданной уравнением  $R(\lambda, \mu) = 0$ , соответствует единственная

(с точностью до умножения на скаляр) общая собственная функция  $\psi(x, Q)$  операторов  $L_n$  и  $L_m$ :

$$L_n\psi(x, Q) = \lambda\psi(x, Q); \quad L_m\psi(x, Q) = \mu\psi(x, Q). \quad (0.13)$$

Логарифмическая производная  $\psi_x\psi^{-1}$  является мероморфной функцией на  $\Gamma$ . В общем положении (когда кривая  $\Gamma$  гладкая) она имеет  $g$  полюсов  $\gamma_1(x), \dots, \gamma_g(x)$  в аффинной части кривой, где  $g$  — род кривой  $\Gamma$ . Коммутирующие операторы  $L_n, L_m$  (в случае взаимно простых порядков) однозначно определены многочленом  $R$  и множеством из  $g$  точек  $\{\gamma_1(x_0), \dots, \gamma_g(x_0)\}$  на кривой  $\Gamma$ .

В таком виде решение задачи имеет чисто классификационный характер: устанавливается взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, но не делается даже попытки получить точную формулу для коэффициентов коммутирующих операторов. Бейкер предложил сделать план эффективным, указав, что собственная функция  $\psi$  обладает аналитическими свойствами функций, введенных Клебшем, Горданом и им самим в качестве аналога экспоненты для римановых поверхностей.

Авторы работ [1, 2] не сочли нужным действовать согласно плану Бейкера (см. добавление к статье Бейкера [3]), и эти результаты были забыты на долгие годы.

Приведем набросок доказательства этих результатов. Так как  $L_n$  и  $L_m$  коммутируют, пространство  $\mathcal{L}(\lambda)$  решений уравнения

$$L_n y(x) = \lambda y(x) \quad (0.14)$$

инвариантно относительно оператора  $L_m$ . Матричные элементы  $L_m^{ij}$ ,  $i, j = 0, \dots, n-1$ , соответствующего оператора  $L_m(\lambda)$ ,

$$L_m|_{\mathcal{L}(\lambda)} = L_m(\lambda): \mathcal{L}(\lambda) \rightarrow \mathcal{L}(\lambda), \quad (0.15)$$

в каноническом базисе

$$c_i(x, \lambda, x_0) \in \mathcal{L}(\lambda), \quad c_i(x, \lambda, x_0)|_{x=x_0} = \delta_{ij}, \quad (0.16)$$

являются многочленами от  $\lambda$ . Они зависят от выбора точки  $x = x_0$ , т. е.  $L_m^{ij} = L_m^{ij}(\lambda, x_0)$ . Характеристический многочлен

$$R(\lambda, \mu) = \det(\mu - L_m^{ij}(\lambda, x_0)) \quad (0.17)$$

является многочленом от обеих переменных  $\lambda$  и  $\mu$  и не зависит от  $x_0$ .

Согласно свойству характеристического многочлена имеем

$$R(L_n, L_m)y(x, \lambda) = 0. \quad (0.18)$$

Здесь  $R(L_n, L_m)$  — это обыкновенный дифференциальный оператор. Поэтому, если он не является нулевым, его ядро имеет конечную размерность. Стало быть, равенство (0.18) влечет (0.12), и первое утверждение из [1, 2] доказано.

Уравнение

$$R(\lambda, \mu) = 0 \quad (0.19)$$

определяет аффинную часть алгебраической кривой  $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$ .

Удивительным образом изложение материала в настоящей книге параллельно решению этой задачи. В первых строках мы читаем: «Эта книга посвящена разделу теории алгебраических иррациональностей, относящемуся к случаю, когда величина  $y$  выражается через величину  $x$  с помощью уравнения вида

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \dots + a_{n-1}y + a_n = 0 \dots \rangle \quad (0.20)$$

Возможно, такая формулировка с последующим подробным обсуждением того, что такое точка на римановой поверхности, выглядит для современного читателя довольно наивной, но она имеет и свои преимущества, так как позволяет с самого начала подойти к основным вопросам теории. Вся структура книги такова, что от конкретных определений автор переходит к общей теории, а затем возвращается к конкретным вопросам. Например, в гл. 1 сразу после определения алгебраических иррациональностей (0.20) вводится понятие их рациональной эквивалентности и доказывается инвариантность рода (дефекта) иррациональностей при рациональных преобразованиях, а в конце этой главы устанавливается, что «максимальное число неустраняемых параметров» для алгебраической иррациональности рода  $g$  равно  $3g - 3$  (говоря современным языком, это число является размерностью пространства модулей алгебраических кривых рода  $g$ ) — и все это на тринадцати страницах<sup>1</sup>!

Вернемся к проблеме классификации коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. Анализ асимптотического поведения алгебраического уравнения (0.19) «на бесконечности» (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) показывает, что если порядки  $n$  и  $m$  операторов  $L_n$  и  $L_m$  взаимно просты, то аффинная кривая (0.19) компактифицируется одной гладкой точкой, в окрестности которой  $\lambda^{-1/n}$  является локальной координатой, т. е. бесконечность является  $n$ -кратной точкой ветвления кривой  $\Gamma$ . Следовательно, для общего  $\lambda$  уравнение (0.19) имеет  $n$  различных корней, и для каждой точки  $Q = (\lambda, \mu) \in \Gamma$  существует единственный собственный вектор  $h(Q) = (h_1(Q), \dots, h_n(Q))$  оператора  $L_m(\lambda)$ :

$$L_m(\lambda)h(Q) = \mu h(Q), \quad (0.21)$$

нормализованный условием  $h_1(Q) = 1$ . Остальные компоненты  $h_i$  этого вектора являются рациональными функциями переменных  $\lambda$  и  $\mu$ , т. е. мероморфными функциями на  $\Gamma$ . Они зависят от выбора точки  $x_0$ , так что  $h_i = h_i(Q, x_0)$ . В аффинной части кривой полюсы  $h$  совпадают с нулями минора  $L_m^{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, n - 1$ , на кривой  $\Gamma$ . Если кривая гладкая, то количество полюсов совпадает с ее родом. Полюсы  $\gamma_1(x_0), \dots, \gamma_g(x_0)$  зависят от  $x_0$ .

Общая собственная функция  $\psi(x, Q)$  операторов  $L_n$  и  $L_m$  определена с точностью до умножения на скаляр, так что ее логарифмическая производная  $\psi_x \psi^{-1}$  определена однозначно. Из определения канонического базиса (0.16) следует, что

$$\psi_x(x, Q)\psi^{-1}(x, Q)|_{x=x_0} = h_1(Q, x_0). \quad (0.22)$$

Это доказывает второе утверждение из [1, 2]. Для того чтобы доказать последнее утверждение, согласно которому коэффициенты многочлена  $R$  и дивизор  $\gamma_s(x_0)$

<sup>1</sup>Английского оригинала.

на рассматриваемой кривой однозначно определяют коммутирующие операторы, рассмотрим аналитические свойства функции  $h_1(Q, x_0)$  на кривой  $\Gamma$ , включая бесконечно удаленную точку  $P_0$ . Оказывается, помимо полюсов  $\gamma_s(x_0)$  на аффинной части кривой  $\Gamma$  имеется простой полюс в бесконечности вида

$$h_1(Q, x_0) = k + O(k^{-1}), \quad k^n = \lambda, \quad Q = (\lambda, \mu). \quad (0.23)$$

Пусть  $\Gamma$  — гладкая алгебраическая кривая рода  $g$  с локальной координатой  $k^{-1}(Q)$  в окрестности точки  $P_0$ . Тогда согласно теореме Римана—Роха для множества из  $g$  общих точек  $\gamma_s$  существует однозначно определенная функция, имеющая полюсы только в этих точках и асимптотику (0.23) в проколотой окрестности точки  $P_0$ .

Доказательство этого частного случая теоремы Римана—Роха имеется в гл. 4 настоящей книги. В книге получающаяся функция иногда называется «функцией Вейерштрасса». Это одна из фундаментальных рациональных функций, через которые могут быть выражены все остальные рациональные функции.

Если  $z_s(Q)$  — локальная координата в окрестности точки  $\gamma_s$ , то рассматриваемая функция обладает разложением

$$h_1(Q) = \frac{a_s}{z_s(Q) - z_s(\gamma_s)} + O(1). \quad (0.24)$$

Коэффициенты  $a_s$  разложения (0.24) однозначно определяются множеством  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_g\}$ , так что  $a_s = a_s(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ .

Общая собственная функция  $\psi(x, Q, x_0)$  операторов  $L_n, L_m$ , нормализованная условием  $\psi(x = x_0, Q, x_0) = 1$ , равна

$$\psi(x, Q, x_0) = \sum_{i=1}^n h_i(Q, x_0) c_i(x, \lambda, x_0). \quad (0.25)$$

Функции  $c_i$  являются целыми функциями переменной  $\lambda$ . Следовательно,  $\psi$  является мероморфной функцией на всей кривой  $\Gamma$ , за исключением бесконечности. Она имеет полюсы в  $\gamma_s(x_0)$  и  $g$  нулей  $\gamma_s(x)$ , являющихся полюсами ее логарифмической производной. В их окрестности мы имеем

$$\psi_x \psi^{-1} = \frac{\partial_x z_s(\gamma_s(x))}{z_s(Q) - z_s(\gamma_s)} + O(1). \quad (0.26)$$

Сравнивая соотношения (0.24) и (0.26), получаем

$$\partial_x z_s(\gamma_s(x)) = a_s(\gamma_1(x), \dots, \gamma_g(x)). \quad (0.27)$$

Уравнения (0.27) составляют корректно определенную систему дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы определяется начальными значениями  $\gamma_1(x_0), \dots, \gamma_g(x_0)$ . Это доказывает последнее из утверждений Берншалла и Чоунди.

В статье [3] предлагалось рассматривать аналитические свойства общей собственной функции  $\psi$  на компактифицированной кривой  $\Gamma$ . С чисто алгебраической точки зрения, это «неправильная» функция, так как она имеет существенную особенность в бесконечно удаленной точке  $P_0$ . Но эта существенная особенность

имеет очень специальный вид: это особенность экспоненциального типа. Из соотношения (0.23) следует, что

$$\psi(x, Q, x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^x h_1(Q, x) dx\right) = e^{k(x-x_0)} \left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, x_0) k^{-s}\right), \quad (0.28)$$

$$\lambda = k^n(Q) \rightarrow \infty.$$

Теория подобных функций, рассматриваемых как естественное обобщение экспоненты на римановы поверхности, имеет глубокие связи с теорией так называемых *факториальных* функций из гл. 14. Эти функции однозначны на поверхности, разрезанной вдоль циклов, а их значения на разных сторонах разрезов удовлетворяют некоторым условиям. На современном языке эти функции суть решения задачи Римана—Гильберта на римановой поверхности. Выражение таких функций через зэта-функции Римана является одной из основных задач этой главы.

Бейкер отмечал, что с помощью этих результатов возможно найти точную формулу для коэффициентов коммутирующих операторов взаимно простых порядков. Однако же этот план был реализован только в статьях [4], [5] (хотя в это время автор не знал о выдающихся результатах Берчналла, Чоунди и Бейкера), в которых коммутирующие пары обыкновенных дифференциальных операторов рассматривались в связи с задачей построения решения уравнения Кадомцева—Петвиашвили.

Общая собственная функция коммутирующих операторов является частным примером общего понятия многоточечной функции Клебша—Гордана—Бейкера—Ахиезера от нескольких переменных (или, попросту, функции Бейкера—Ахиезера). Именно, пусть  $\Gamma$  — невырожденная алгебраическая кривая рода  $g$  с  $N$  выколотыми точками  $P_\alpha$  и фиксированными локальными параметрами  $k_\alpha^{-1}(Q)$  в окрестности этих точек. Для произвольного множества точек  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  в общем положении существует единственная (с точностью до умножения на скаляр  $c(t_{\alpha,i})$ ) функция  $\psi(t, Q)$ , где  $t = (t_{\alpha,i})$ ,  $\alpha = 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , для которой:

1) функция  $\psi$  (рассматриваемая как функция переменной  $Q \in \Gamma$ ) мероморфна всюду, кроме точек  $P_\alpha$ , и имеет простые полюсы только в точках  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$  (если все они различны);

2) в окрестности точки  $P_\alpha$  функция  $\psi$  имеет вид

$$\psi(t, Q) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{\alpha,i} k_\alpha^i\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{s,\alpha}(t) k_\alpha^{-s}\right), \quad k_\alpha = k_\alpha(Q). \quad (0.29)$$

Видно, что функция Бейкера—Ахиезера  $\psi$  зависит от переменных  $t = \{t_{1,i}, \dots, t_{n,i}\}$  и от внешних параметров.

Из единственности функции Бейкера—Ахиезера следует, что для каждой пары  $(\alpha, n)$  существует единственный оператор  $L_{\alpha,n}$  вида

$$L_{\alpha,n} = \partial_{\alpha,1}^n + \sum_{j=1}^{n-1} u_j^{(\alpha,n)}(t) \partial_{\alpha,1}^j \quad (0.30)$$

(где  $\partial_{\alpha,i} = \partial/\partial t_{\alpha,i}$ ), для которого

$$(\partial_{\alpha,i} - L_{\alpha,n})\psi(t, Q) = 0. \quad (0.31)$$

Идея доказательства теорем такого типа, предложенная в [4], универсальна.

Для любого формального ряда вида (0.29) существует единственный оператор  $L_{\alpha,n}$  вида (0.30), для которого

$$(\partial_{\alpha,i} - L_{\alpha,n})\psi(t, Q) = O(k^{-1}) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{\alpha,i} k^i\right). \quad (0.32)$$

Коэффициенты  $L_{\alpha,n}$  являются дифференциальными многочленами относительно  $\xi_{s,\alpha}$ . Они могут быть найдены после подстановки ряда (0.29) в (0.32).

Оказывается, если ряд (0.29) является не формальным, но разложением функции Бейкера—Ахиезера в окрестности  $P_\alpha$ , то сравнение (0.32) превращается в равенство. Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi_1 = (\partial_{\alpha,n} - L_{\alpha,n})\psi(t, Q). \quad (0.33)$$

Она имеет те же аналитические свойства, что и  $\psi$ , за одним исключением: разложение этой функции в окрестности  $P_\alpha$  начинается с  $O(k^{-1})$ . Из единственности функции Бейкера—Ахиезера следует, что  $\psi_1 = 0$ , так что равенство (0.31) доказано.

В качестве следствия мы получаем, что оператор  $L_{\alpha,n}$  удовлетворяет условиям совместимости

$$[\partial_{\alpha,n} - L_{\alpha,n}, \partial_{\alpha,m} - L_{\alpha,m}] = 0. \quad (0.34)$$

Уравнения (0.34) калибровочно инвариантны: для произвольной функции  $g(t)$  операторы

$$\bar{L}_{\alpha,n} = gL_{\alpha,n}g^{-1} + (\partial_{\alpha,n}g)g^{(-1)} \quad (0.35)$$

также имеют вид (0.30) и удовлетворяют тем же уравнениям (0.34). Калибровочное преобразование (0.35) соответствует калибровочному преобразованию функции Бейкера—Ахиезера

$$\psi_1(t, Q) = g(t)\psi(t, Q). \quad (0.36)$$

В одноточечном случае функция Бейкера—Ахиезера имеет экспоненциальную особенность в единственной точке  $P_1$  и зависит от одного набора переменных. Нормализуем функцию Бейкера—Ахиезера с помощью условия  $\xi_{1,0} = 1$ , т. е. потребуем, чтобы ее разложение в окрестности точки  $P_1$  имело вид

$$\psi(t_1, t_2, \dots, t_Q) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i k^i\right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(t) k^{-s}\right). \quad (0.37)$$

В этом случае оператор  $L_n$  имеет вид

$$L_n = \partial_1^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i^{(n)} \partial_1^i. \quad (0.38)$$

Если мы обозначим  $t_1, t_2, t_3$  через  $x, y, t$  соответственно, то из условия (0.34) (для  $n = 2, m = 3$ ) следует, что  $u(x, y, t, t_4, \dots)$  удовлетворяет уравнению Кадомцева—Петвиашвили (0.2). Точная формула для этих решений в терминах тэта-функции Римана получается из точной формулы для функции Бейкера—Ахиезера.

Зафиксируем на  $\Gamma$  базис циклов  $a_i, b_i, i = 1, \dots, g$ , с канонической матрицей пересечений:

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Базис нормализованных голоморфных дифференциалов  $\omega_j(Q), j = 1, \dots, g$ , определяется из условий

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}; \quad (0.39)$$

$b$ -периоды этих дифференциалов определяют так называемую матрицу Римана

$$B_{kj} = \oint_{b_j} \omega_k. \quad (0.40)$$

Базисные векторы  $e_k$  пространства  $\mathbb{C}^g$  и векторы  $B_k$ , являющиеся столбцами матрицы (0.40), порождают решетку  $\mathcal{B}$  в  $\mathbb{C}^g$ , а  $g$ -мерный комплексный тор

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g / \mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = \sum n_k e_k + m_k B_k, \quad n_k, m_k \in \mathbb{Z}, \quad (0.41)$$

называется многообразием Якоби кривой  $\Gamma$ . Вектор с координатами

$$A_k(Q) = \int_{q_0}^Q \omega_k \quad (0.42)$$

определяет отображение Абеля

$$A: \Gamma \rightarrow J(\Gamma), \quad (0.43)$$

зависящее от выбора исходной точки  $q_0$ .

Мнимая часть матрицы Римана положительно определена. Целая функция от  $g$  переменных

$$\theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(z, m) + \pi i(Bm, m)}, \quad (0.44)$$

$$z = (z_1, \dots, z_n), \quad m = (m_1, \dots, m_n), \quad (z, m) = z_1 m_1 + \dots + z_n m_n,$$

называется тэта-функцией Римана. Она удовлетворяет следующим свойствам монодромии:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z), \quad \theta(z + B_k) = e^{-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}} \theta(z). \quad (0.45)$$

Функция  $\theta(A(Q) - Z)$  является многозначной функцией от  $Q$ , но из соотношений (0.45) следует, что нули этой функции корректно определены. Для  $Z$  в общем положении уравнение

$$\theta(A(Q) - Z) = 0 \quad (0.46)$$

имеет  $g$  нулей  $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ . Вектор  $Z$  и дивизор этих нулей связаны соотношением

$$Z_k = \sum_{s=1}^g A(\gamma_s) + \mathcal{K}, \quad (0.47)$$

где вектор  $\mathcal{K}$  есть константа Римана.

Введем нормализованные абелевы дифференциалы  $d\Omega_{\alpha,i}$  второго рода. Дифференциал  $d\Omega_{\alpha,i}$  голоморфен на всей кривой  $\Gamma$ , за исключением  $P_\alpha$ . В окрестности этой точки он имеет вид

$$d\Omega_{\alpha,i} = d(k_\alpha^i + O(1)). \quad (0.48)$$

«Нормализованный» в данном случае означает, что дифференциал имеет нулевые  $a$ -периоды

$$\oint_{a_j} d\Omega_{\alpha,i} = 0. \quad (0.49)$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{E}(t, Q) = \exp \left\{ \sum_{\alpha,j} t_{\alpha,j} \int_{q_0}^Q d\Omega_{\alpha,j} \right\}. \quad (0.50)$$

Она обладает такими же экспоненциальными особенностями вида (0.29) в выколотых точках, что и функция Бейкера—Ахиезера, но эта функция однозначна на кривой  $\Gamma$ , разрезанной только вдоль  $a$ -циклов. Ее значения на разных сторонах цикла  $a_i$  отличаются на множитель

$$e^{2\pi i U_i} = \exp \left\{ \sum_{\alpha,j} t_{\alpha,j} U_{\alpha,j}^i \right\}, \quad (0.51)$$

где

$$U_{\alpha,j}^i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_i} d\Omega_{\alpha,j}. \quad (0.52)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(V, Q) = \frac{\theta(A(Q) + V - Z)}{\theta(A(Q) - Z)}, \quad (0.53)$$

где  $V$  — вектор с координатами  $V_1, \dots, V_g$ . Эта функция мероморфна на кривой  $\Gamma$ , разрезанной вдоль  $a$ -циклов, и имеет  $g$  полюсов (зависящих от  $Z$ ). Из свойств монодромии (0.45) следует, что граничные значения  $\varphi$  на двух сторонах от циклов  $a_i$  удовлетворяют соотношению

$$\varphi^+ = e^{-2\pi i V_i} \varphi^-. \quad (0.54)$$

В книге такие многозначные функции называются факториальными функциями.

Из равенств (0.50)–(0.54) следует, что

$$\psi(t, Q) = \mathcal{E}(t, Q) \frac{\theta\left(A(Q) + \sum_{\alpha,j} t_{\alpha,j} U_{\alpha,j} - Z\right)}{\theta(A(Q) - Z)} \quad (0.55)$$



*Генри Фредерик Бейкер*

АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ  
Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций

Подписано в печать 8.04.2008 г. Формат  $70 \times 100 \frac{1}{16}$ . Бумага офсетная № 1.  
Печать офсетная. Печ. л. 46. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра  
непрерывного математического образования  
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».  
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

---

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,  
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 241–72–85. E-mail: [biblio@mccme.ru](mailto:biblio@mccme.ru)

---