Г. Ф. БЕЙКЕР

АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций

ABELIAN FUNCTIONS

Abel's theorem and the allied theory of theta functions

H. F. Baker
St John's College, Cambridge

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

КЛАССИЧЕСКИЕ МОНОГРАФИИ: МАТЕМАТИКА

Г. Бейкер

АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ

Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций

Перевод С. М. Львовского

Предисловие И. М. Кричевера

Москва
Издательство МЦНМО
2008

УДК 515.178.2
ББК 22.147
Б41

Серия КЛАССИЧЕСКИЕ МОНОГРАФИИ: МАТЕМАТИКА

Бейкер Г.
Б41 Абелевы функции. Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций / Перевод с англ. С. М. Львовского. — М.: МЦНМО, 2008. — 736 с.
ISBN 978-5-94057-192-6

Эта книга, оригинал которой впервые вышел в свет в 1897 году, — перевод классической монографии по теории римановых поверхностей и тэта-функций. Изложение ведется в непривычном современному читателю классическом стиле конца XIX века. Основной упор делается не на изложение общих теорий, а на получение явных формул.

Издание книги на русском языке вызвано тем, что в последние десятилетия XX века многочисленные задачи математической и теоретической физики (например, метод обратной задачи рассеяния и конечнозонного интегрирования, задачи теории автодуальных калибровочных полей и др.) оказались тесно связанными с кругом проблем, которым посвящена книга Бейкера.

Знакомство с этой книгой будет очень полезно всем математикам и физикам, занимающимся алгебраической геометрией или интегрируемыми системами.

ББК 22.147

Translation from the English language edition:
Abelian functions. Abel's theorem and the allied theory of theta functions
by Henry Frederick Baker. Cambridge University Press, 1995.

ISBN 0-521-49877-5 (англ.)
ISBN 978-5-94057-192-6

Оглавление

Глава 4
ОПИСАНИЕ РИМАНОВЫХ ИНТЕГРАЛОВ ОБЩЕГО ВИДА

Глава 5
О НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ ФОРМАХ УРАВНЕНИЯ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Глава 6
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РАССМОТРЕНИЯ

Глава 7
КООРДИНАЦИЯ ПРОСТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ОДНОЗНАЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 8

ТЕОРЕМА АБЕЛЯ; ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ АБЕЛЯ

Глава 9

ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ЯКОБИ

Глава 10

РИМАНОВЫ ТЭТА-ФУНКЦИИ. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Глава 11

РИМАНОВЫ ТЭТА-ФУНКЦИИ В ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

Глава 12

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Глава 13
О КОРНЯХ ИЗ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Глава 14
ФАКТОРИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Глава 15

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ТЭТА-ФУНКЦИЙ: ВВЕДЕНИЕ

Глава 16

ПРЯМОЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ СООТНОШЕНИЙ МЕЖДУ ТЭТА-ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ

Глава 17

ТЭТА-СООТНОШЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НЕКОТОРЫМИ ГРУППАМИ ХАРАКТЕРИСТИК

Глава 18

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРИОДОВ, И В ОСОБЕННОСТИ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Глава 19

О СИСТЕМАХ ПЕРИОДОВ И ОБОБЩЕННЫХ ЯКОБИЕВЫХ ФУНКЦИЯХ

Глава 20

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТЭТА-ФУНКЦИЙ

Глава 21

КОМПЛЕКСНОЕ УМНОЖЕНИЕ ТЭТА-ФУНКЦИЙ. СООТВЕТСТВИЯ ТОЧЕК НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Глава 22

ВЫРОЖДЕННЫЕ АБЕЛЕВЫ ИНТЕГРАЛЫ

Приложение 1
ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ КРИВЫХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Приложение 2
О МАТРИЦАХ

Предисловие редактора английского издания

Классическая алгебраическая геометрия, неразрывно связанная с именами Абеля, Римана, Вейерштрасса, Пуанкаре, Клебша, Якоби и других выдающихся математиков XIX века, являлась главным образом аналитической теорией. В XX веке она обогатилась методами и идеями топологии и коммутативной алгебры и превратилась в одну из основных математических дисциплин.

Традиционный эклектизм (в лучшем значении этого слова) алгебраической геометрии всегда был источником ее многочисленных приложений к другим областям математики. Роль алгебраической геометрии как «прикладной науки» чрезвычайно возросла в последние 15—20 лет, когда были найдены ее новые приложения к нелинейным уравнениям и квантовой теории поля.

Механика, математическая и теоретическая физика могут быть названы «новыми» сферами приложения алгебраической геометрии. Впрочем, эти области нетрадиционны только для второй трети XX века — периода, когда казалось, что абстрактный язык гротендиковских схем навсегда заменил довольно наивный язык классической алгебраической геометрии.

Результаты последних лет, среди которых особо стоит отметить решение проблемы Римана—Шоттки и приложения топологической гравитации к теории пересечений на пространствах модулей алгебраических кривых, показывают, что теперь, как и в XIX веке, отношения между алгебраической геометрией и физикой ни в коей мере не являются односторонними.

Когда число ученых, для которых алгебраическая геометрия стала рабочим инструментом, стало быстро расти, обнаружилась нехватка подходящей для них математической литературы. Почти все книги по этой теме, доступные современному читателю, написаны на языке абстрактной алгебры. Идея максимальной общности, заложенная в теорию схем, мешает читателю, желающему быстро войти в курс дела, особенно если этот читатель — физик.

Было бы преувеличением сказать, что подходящая литература отсутствует полностью. Некоторые книги последних десятилетий, такие как «Принципы алгебраической геометрии» Гриффитса и Харриса, «Лекции о тэта-функциях» Мамфорда и «Theta-functions» Дж. Фея (J. Fay), написаны в отчетливо неоклассическом стиле.

Несомненно, книга Бейкера занимает особое место в этом списке, благодаря хотя бы тому, что ее первое издание датировано концом XIX века. Но это — не единственная ее особенность. Книга на удивление современна и, более того, содержит результаты, которые до сих пор выходят за рамки современных учебников. Замечательно, что именно эти результаты тесно связаны с приложениями алгебраической геометрии к современной математической физике, упоминавшимися выше.

При всем многообразии результатов, полученных в рамках классической алгебраической геометрии, ее ядро состоит из сравнительно небольшого числа основных определений и теорем. В их список входят теорема Римана—Роха, понятие якобиана алгебраической кривой, теорема Абеля и якобиево решение проблемы обращения с помощью тэта-функций.

Хотя автор этой книги вынес в заголовок лишь теорему Абеля и теорию тэта-функций, скромные слова «и связанная с ней теория» означают «все остальное». Это «остальное», кроме теорем, перечисленных выше, включает в себя элементы теории униформизации алгебраических кривых и связанную с ней теорию автоморфных форм, а также модель Шоттки алгебраических кривых. Очень важны для современных приложений разделы, посвященные «факториальным функциям».

Необходимо подчеркнуть еще одно — возможно, основное — достоинство этой книги. В ней проявляется характерная черта классической алгебраической геометрии — стремление выразить конечный результат в виде явной аналитической формулы. Это предполагает определение минимального класса новых трансцендентных функций — «кирпичей», из которых может быть построено все здание.

Чтобы продемонстрировать это, мы кратко изложим основные моменты теории так называемого конечнозонного (или алгебро-геометрического) интегрирования нелинейных уравнений. При этом мы сможем отдать дань уважения автору этой книги, чье имя увековечено в названии функции Бейкера—Ахиезера, играющей ключевую роль в разнообразных современных приложениях алгебраической геометрии к нелинейной физике.

Алгебро-геометрическая схема интегрирования нелинейных уравнений применима ко всем уравнениям, рассматриваемым в рамках метода обратной задачи. К таковым относятся уравнение Кортевега—де Фриза (КдФ)

$$u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx} = 0, \tag{0.1}$$

его двумерное обобщение — уравнение Кадомцева—Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4}u_{yy} = \left(u_t - \frac{3}{2}uu_x + \frac{1}{4}u_{xxx}\right)_x, \tag{0.2}$$

нелинейное уравнение Шрёдингера

$$i\psi_t = \psi_{xx} + |\psi|^2\psi, \tag{0.3}$$

уравнение sin-Гордон

$$u_{tt} - u_{xx} = \sin u, \tag{0.4}$$

а также многие другие фундаментальные уравнения современной математической физики.

Все уравнения, рассматриваемые в рамках обратной задачи, могут быть представлены в виде условий совместимости для переопределенной системы вспомогательных линейных задач.

К примеру, для уравнения Кортевега—де Фриза (0.1) эта система имеет вид

$$L\psi = 0, \quad \partial_t \psi = A\psi, \tag{0.5}$$

где L и A равны

$$L = -\partial_x^2 + u(x,t), \quad A = \partial_x^3 - \frac{3}{2}u\partial_x - \frac{3}{4}u_x. \tag{0.6}$$

Из совместимости системы (0.5) следует, что

$$[\partial_t - A, L] = 0 \Leftrightarrow L_t = [A, L]. \tag{0.7}$$

Операторное уравнение (0.7) называется *уравнением Лакса*. Широкий класс нелинейных уравнений может быть представлен в виде (0.7), где L и A — обыкновенные дифференциальные операторы от x с матричными или скалярными коэффициентами, зависящими от переменных x и t:

$$L = \sum_{i=1}^{n} u_i(x,t)\partial_x^i, \quad A = \sum_{i=1}^{m} v_i(x,t)\partial_x^i. \tag{0.8}$$

Всякое уравнение Лакса является бесконечномерным аналогом вполне интегрируемой системы. В частности, оно может быть включено в бесконечную иерархию коммутирующих потоков. Для уравнения Кортевега—де Фриза они имеют вид

$$\partial_n u = f_n(u, u_x, \ldots, u^{(2n+1)}), \quad u = u(x, t, t_3, t_4, \ldots), \quad \partial_n = \frac{\partial}{\partial t_n}, \tag{0.9}$$

и эквивалентны операторному уравнению

$$\partial_n L = [A_{2n+1}, L], \tag{0.10}$$

где L — оператор Шрёдингера, а A_{2n+1} — дифференциальный оператор порядка $2n+1$.

Первоначальное определение n-зонных решений уравнения Кортевега—де Фриза было предложено Новиковым, который рассматривал ограничение этого уравнения на пространство стационарных решений уравнения (0.10):

$$f_n(u, u_x, \ldots, u^{(2n+1)}) = 0 \Leftrightarrow [L, A_{2n+1}] = 0. \tag{0.11}$$

Операторное уравнение (0.11) является частным случаем более общей задачи: классификации пар коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов L_n и L_m порядков n и m соответственно. В чисто алгебраическом виде эта задача была рассмотрена и частично решена в выдающихся работах Берчналла и Чоунди [1, 2] в 1920-х гг. Они доказали, что для всякой пары таких операторов существует многочлен $R(\lambda, \mu)$ от двух переменных, для которого

$$R(L_n, L_m) = 0. \tag{0.12}$$

Если порядки n и m этих операторов взаимно просты, то каждой точке $Q = (\lambda, \mu)$ кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}^2$, заданной уравнением $R(\lambda, \mu) = 0$, соответствует единственная (с точностью до умножения на скаляр) общая собственная функция $\psi(x,Q)$ операторов L_n и L_m:

$$L_n\psi(x,Q)=\lambda\psi(x,Q);\quad L_m\psi(x,Q)=\mu\psi(x,Q). \tag{0.13}$$

Логарифмическая производная $\psi_x\psi^{-1}$ является мероморфной функцией на Г. В общем положении (когда кривая Г гладкая) она имеет g полюсов $\gamma_1(x),\ldots$ $\ldots,\gamma_g(x)$ в аффинной части кривой, где g — род кривой Г. Коммутирующие операторы L_n, L_m (в случае взаимно простых порядков) однозначно определены многочленом R и множеством из g точек $\{\gamma_1(x_0),\ldots,\gamma_g(x_0)\}$ на кривой Г.

В таком виде решение задачи имеет чисто классификационный характер: устанавливается взаимно однозначное соответствие между двумя множествами, но не делается даже попытки получить точную формулу для коэффициентов коммутирующих операторов. Бейкер предложил сделать план эффективным, указав, что собственная функция ψ обладает аналитическими свойствами функций, введенных Клебшем, Горданом и им самим в качестве аналога экспоненты для римановых поверхностей.

Авторы работ [1, 2] не сочли нужным действовать согласно плану Бейкера (см. добавление к статье Бейкера [3]), и эти результаты были забыты на долгие годы.

Приведем набросок доказательства этих результатов. Так как L_n и L_m коммутируют, пространство $\mathcal{L}(\lambda)$ решений уравнения

$$L_ny(x)=\lambda y(x) \tag{0.14}$$

инвариантно относительно оператора L_m. Матричные элементы L_m^{ij}, $i,j=0,\ldots$ $\ldots,n-1$, соответствующего оператора $L_m(\lambda)$,

$$L_m|_{\mathcal{L}(\lambda)}=L_m(\lambda)\colon\ \mathcal{L}(\lambda)\to\mathcal{L}(\lambda), \tag{0.15}$$

в каноническом базисе

$$c_i(x,\lambda,x_0)\in\mathcal{L}(\lambda),\quad c_i(x,\lambda,x_0)|_{x=x_0}=\delta_{ij}, \tag{0.16}$$

являются многочленами от λ. Они зависят от выбора точки $x=x_0$, т.е. $L_m^{ij}=$ $=L_m^{ij}(\lambda,x_0)$. Характеристический многочлен

$$R(\lambda,\mu)=\det(\mu-L_m^{ij}(\lambda,x_0)) \tag{0.17}$$

является многочленом от обеих переменных λ и μ и не зависит от x_0.

Согласно свойству характеристического многочлена имеем

$$R(L_n,L_m)y(x,\lambda)=0. \tag{0.18}$$

Здесь $R(L_n,L_m)$ — это обыкновенный дифференциальный оператор. Поэтому, если он не является нулевым, его ядро имеет конечную размерность. Стало быть, равенство (0.18) влечет (0.12), и первое утверждение из [1, 2] доказано.

Уравнение

$$R(\lambda,\mu)=0 \tag{0.19}$$

определяет аффинную часть алгебраической кривой $\Gamma\subset\mathbb{C}^2$.

Удивительным образом изложение материала в настоящей книге параллельно решению этой задачи. В первых строках мы читаем: «Эта книга посвящена разделу теории алгебраических иррациональностей, относящемуся к случаю, когда величина y выражается через величину x с помощью уравнения вида

$$a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_{n-1}y + a_n = 0 \ldots \text{»} \tag{0.20}$$

Возможно, такая формулировка с последующим подробным обсуждением того, что такое точка на римановой поверхности, выглядит для современного читателя довольно наивной, но она имеет и свои преимущества, так как позволяет с самого начала подойти к основным вопросам теории. Вся структура книги такова, что от конкретных определений автор переходит к общей теории, а затем возвращается к конкретным вопросам. Например, в гл. 1 сразу после определения алгебраических иррациональностей (0.20) вводится понятие их рациональной эквивалентности и доказывается инвариантность рода (дефекта) иррациональностей при рациональных преобразованиях, а в конце этой главы устанавливается, что «максимальное число неустранимых параметров» для алгебраической иррациональности рода g равно $3g-3$ (говоря современным языком, это число является размерностью пространства модулей алгебраических кривых рода g) — и все это на тринадцати страницах[1]!

Вернемся к проблеме классификации коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. Анализ асимптотического поведения алгебраического уравнения (0.19) «на бесконечности» (при $\lambda \to \infty$) показывает, что если порядки n и m операторов L_n и L_m взаимно просты, то аффинная кривая (0.19) компактифицируется одной гладкой точкой, в окрестности которой $\lambda^{-1/n}$ является локальной координатой, т. е. бесконечность является n-кратной точкой ветвления кривой Г. Следовательно, для общего λ уравнение (0.19) имеет n различных корней, и для каждой точки $Q = (\lambda, \mu) \in \Gamma$ существует единственный собственный вектор $h(Q) = (h_1(Q), \ldots, h_n(Q))$ оператора $L_m(\lambda)$:

$$L_m(\lambda)h(Q) = \mu h(Q), \tag{0.21}$$

нормализованный условием $h_1(Q) = 1$. Остальные компоненты h_i этого вектора являются рациональными функциями переменных λ и μ, т. е. мероморфными функциями на Г. Они зависят от выбора точки x_0, так что $h_i = h_i(Q, x_0)$. В аффинной части кривой полюсы h совпадают с нулями минора L_m^{ij}, $i, j = 1, \ldots, n-1$, на кривой Г. Если кривая гладкая, то количество полюсов совпадает с ее родом. Полюсы $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_g(x_0)$ зависят от x_0.

Общая собственная функция $\psi(x, Q)$ операторов L_n и L_m определена с точностью до умножения на скаляр, так что ее логарифмическая производная $\psi_x\psi^{-1}$ определена однозначно. Из определения канонического базиса (0.16) следует, что

$$\psi_x(x, Q)\psi^{-1}(x, Q)|_{x=x_0} = h_1(Q, x_0). \tag{0.22}$$

Это доказывает второе утверждение из [1, 2]. Для того чтобы доказать последнее утверждение, согласно которому коэффициенты многочлена R и дивизор $\gamma_s(x_0)$

[1] Английского оригинала.

на рассматриваемой кривой однозначно определяют коммутирующие операторы, рассмотрим аналитические свойства функции $h_1(Q, x_0)$ на кривой Γ, включая бесконечно удаленную точку P_0. Оказывается, помимо полюсов $\gamma_s(x_0)$ на аффинной части кривой Γ имеется простой полюс в бесконечности вида

$$h_1(Q, x_0) = k + O(k^{-1}), \quad k^n = \lambda, \quad Q = (\lambda, \mu). \tag{0.23}$$

Пусть Γ — гладкая алгебраическая кривая рода g с локальной координатой $k^{-1}(Q)$ в окрестности точки P_0. Тогда согласно теореме Римана—Роха для множества из g общих точек γ_s существует однозначно определенная функция, имеющая полюсы только в этих точках и асимптотику (0.23) в проколотой окрестности точки P_0.

Доказательство этого частного случая теоремы Римана—Роха имеется в гл. 4 настоящей книги. В книге получающаяся функция иногда называется «функцией Вейерштрасса». Это одна из фундаментальных рациональных функций, через которые могут быть выражены все остальные рациональные функции.

Если $z_s(Q)$ — локальная координата в окрестности точки γ_s, то рассматриваемая функция обладает разложением

$$h_1(Q) = \frac{a_s}{z_s(Q) - z_s(\gamma_s)} + O(1). \tag{0.24}$$

Коэффициенты a_s разложения (0.24) однозначно определяются множеством $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_g\}$, так что $a_s = a_s(\gamma_1, \ldots, \gamma_g)$.

Общая собственная функция $\psi(x, Q, x_0)$ операторов L_n, L_m, нормализованная условием $\psi(x = x_0, Q, x_0) = 1$, равна

$$\psi(x, Q, x_0) = \sum_{i=1}^{n} h_i(Q, x_0) c_i(x, \lambda, x_0). \tag{0.25}$$

Функции c_i являются целыми функциями переменной λ. Следовательно, ψ является мероморфной функцией на всей кривой Γ, за исключением бесконечности. Она имеет полюсы в $\gamma_s(x_0)$ и g нулей $\gamma_s(x)$, являющихся полюсами ее логарифмической производной. В их окрестности мы имеем

$$\psi_x \psi^{-1} = \frac{\partial_x z_s(\gamma_s(x))}{z_s(Q) - z_s(\gamma_s)} + O(1). \tag{0.26}$$

Сравнивая соотношения (0.24) и (0.26), получаем

$$\partial_x z_s(\gamma_s(x)) = a_s(\gamma_1(x), \ldots, \gamma_g(x)). \tag{0.27}$$

Уравнения (0.27) составляют корректно определенную систему дифференциальных уравнений первого порядка. Решение этой системы определяется начальными значениями $\gamma_1(x_0), \ldots, \gamma_g(x_0)$. Это доказывает последнее из утверждений Берчналла и Чоунди.

В статье [3] предлагалось рассматривать аналитические свойства общей собственной функции ψ на компактифицированной кривой Γ. С чисто алгебраической точки зрения, это «неправильная» функция, так как она имеет существенную особенность в бесконечно удаленной точке P_0. Но эта существенная особенность имеет очень специальный вид: это особенность экспоненциального типа. Из соотношения (0.23) следует, что

$$\psi(x, Q, x_0) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} h_1(Q, x)\, dx\right) = e^{k(x-x_0)}\left(1 + \sum_{s=1}^{\infty} \xi_s(x, x_0) k^{-s}\right), \qquad \lambda = k^n(Q) \to \infty. \tag{0.28}$$

Теория подобных функций, рассматриваемых как естественное обобщение экспоненты на римановы поверхности, имеет глубокие связи с теорией так называемых *факториальных* функций из гл. 14. Эти функции однозначны на поверхности, разрезанной вдоль циклов, а их значения на разных сторонах разрезов удовлетворяют некоторым условиям. На современном языке эти функции суть решения задачи Римана—Гильберта на римановой поверхности. Выражение таких функций через тэта-функции Римана является одной из основных задач этой главы.

Бейкер отмечал, что с помощью этих результатов возможно найти точную формулу для коэффициентов коммутирующих операторов взаимно простых порядков. Однако же этот план был реализован только в статьях [4], [5] (хотя в это время автор не знал о выдающихся результатах Берчналла, Чоунди и Бейкера), в которых коммутирующие пары обыкновенных дифференциальных операторов рассматривались в связи с задачей построения решения уравнения Кадомцева—Петвиашвили.

Общая собственная функция коммутирующих операторов является частным примером общего понятия многоточечной функции Клебша—Гордана—Бейкера—Ахиезера от нескольких переменных (или, попросту, функции Бейкера—Ахиезера). Именно, пусть Γ — невырожденная алгебраическая кривая рода g с N выколотыми точками P_α и фиксированными локальными параметрами $k_\alpha^{-1}(Q)$ в окрестности этих точек. Для произвольного множества точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ в общем положении существует единственная (с точностью до умножения на скаляр $c(t_{\alpha,i})$) функция $\psi(t, Q)$, где $t = (t_{\alpha,i})$, $\alpha = 1, \ldots, N$, $i = 1, 2, \ldots$, для которой:

1) функция ψ (рассматриваемая как функция переменной $Q \in \Gamma$) мероморфна всюду, кроме точек P_α, и имеет простые полюсы только в точках $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$ (если все они различны);

2) в окрестности точки P_α функция ψ имеет вид

$$\psi(t, Q) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{\alpha,i} k_\alpha^i\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_{s,\alpha}(t) k_\alpha^{-s}\right), \quad k_\alpha = k_\alpha(Q). \tag{0.29}$$

Видно, что функция Бейкера—Ахиезера ψ зависит от переменных $t = \{t_{1,i}, \ldots, t_{n,i}\}$ и от внешних параметров.

Из единственности функции Бейкера—Ахиезера следует, что для каждой пары (α, n) существует единственный оператор $L_{\alpha,n}$ вида

$$L_{\alpha,n} = \partial_{\alpha,1}^n + \sum_{j=1}^{n-1} u_j^{(\alpha,n)}(t) \partial_{\alpha,1}^j \tag{0.30}$$

(где $\partial_{\alpha,i} = \partial/\partial t_{\alpha,i}$), для которого

$$(\partial_{\alpha,i} - L_{\alpha,n})\psi(t,Q) = 0. \tag{0.31}$$

Идея доказательства теорем такого типа, предложенная в [4], универсальна.

Для любого формального ряда вида (0.29) существует единственный оператор $L_{\alpha,n}$ вида (0.30), для которого

$$(\partial_{\alpha,i} - L_{\alpha,n})\psi(t,Q) = O(k^{-1}) \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_{\alpha,i} k_\alpha^i\right). \tag{0.32}$$

Коэффициенты $L_{\alpha,n}$ являются дифференциальными многочленами относительно $\xi_{s,\alpha}$. Они могут быть найдены после подстановки ряда (0.29) в (0.32).

Оказывается, если ряд (0.29) является не формальным, но разложением функции Бейкера—Ахиезера в окрестности P_α, то сравнение (0.32) превращается в равенство. Действительно, рассмотрим функцию

$$\psi_1 = (\partial_{\alpha,n} - L_{\alpha,n})\psi(t,Q). \tag{0.33}$$

Она имеет те же аналитические свойства, что и ψ, за одним исключением: разложение этой функции в окрестности P_α начинается с $O(k^{-1})$. Из единственности функции Бейкера—Ахиезера следует, что $\psi_1 = 0$, так что равенство (0.31) доказано.

В качестве следствия мы получаем, что оператор $L_{\alpha,n}$ удовлетворяет условиям совместимости

$$[\partial_{\alpha,n} - L_{\alpha,n}, \partial_{\alpha,m} - L_{\alpha,m}] = 0. \tag{0.34}$$

Уравнения (0.34) калибровочно инвариантны: для произвольной функции $g(t)$ операторы

$$\bar{L}_{\alpha,n} = gL_{\alpha,n}g^{-1} + (\partial_{\alpha,n}g)\,g^{(-1)} \tag{0.35}$$

также имеют вид (0.30) и удовлетворяют тем же уравнениям (0.34). Калибровочное преобразование (0.35) соответствует калибровочному преобразованию функции Бейкера—Ахиезера

$$\psi_1(t,Q) = g(t)\psi(t,Q). \tag{0.36}$$

В одноточечном случае функция Бейкера—Ахиезера имеет экспоненциальную особенность в единственной точке P_1 и зависит от одного набора переменных. Нормализуем функцию Бейкера—Ахиезера с помощью условия $\xi_{1,0} = 1$, т. е. потребуем, чтобы ее разложение в окрестности точки P_1 имело вид

$$\psi(t_1, t_2, \ldots, t_Q) = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i k^i\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \xi_s(t) k^{-s}\right). \tag{0.37}$$

В этом случае оператор L_n имеет вид

$$L_n = \partial_1^n + \sum_{i=0}^{n-2} u_i^{(n)} \partial_1^i. \tag{0.38}$$

Если мы обозначим t_1, t_2, t_3 через x, y, t соответственно, то из условия (0.34) (для $n=2$, $m=3$) следует, что $u(x, y, t, t_4, \ldots)$ удовлетворяет уравнению Кадомцева—Петвиашвили (0.2). Точная формула для этих решений в терминах тэта-функции Римана получается из точной формулы для функции Бейкера—Ахиезера.

Зафиксируем на Γ базис циклов a_i, b_i, $i=1, \ldots, g$, с канонической матрицей пересечений:

$$a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0, \quad a_i \circ b_j = \delta_{ij}.$$

Базис нормализованных голоморфных дифференциалов $\omega_j(Q)$, $j=1, \ldots, g$, определяется из условий

$$\oint_{a_i} \omega_j = \delta_{ij}; \tag{0.39}$$

b-периоды этих дифференциалов определяют так называемую матрицу Римана

$$B_{kj} = \oint_{b_j} \omega_k. \tag{0.40}$$

Базисные векторы e_k пространства $\mathbb{C}^g$ и векторы B_k, являющиеся столбцами матрицы (0.40), порождают решетку $\mathcal{B}$ в $\mathbb{C}^g$, а g-мерный комплексный тор

$$J(\Gamma) = \mathbb{C}^g/\mathcal{B}, \quad \mathcal{B} = \sum n_k e_k + m_k B_k, \quad n_k, m_k \in \mathbb{Z}, \tag{0.41}$$

называется многообразием Якоби кривой Γ. Вектор с координатами

$$A_k(Q) = \int_{q_0}^{Q} \omega_k \tag{0.42}$$

определяет отображение Абеля

$$A\colon\ \Gamma \to J(\Gamma), \tag{0.43}$$

зависящее от выбора исходной точки q_0.

Мнимая часть матрицы Римана положительно определена. Целая функция от g переменных

$$\begin{gathered} \theta(z) = \theta(z|B) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{2\pi i(z,\,m) + \pi i(Bm,\,m)}, \\ z = (z_1, \ldots, z_n), \quad m = (m_1, \ldots, m_n), \quad (z, m) = z_1 m_1 + \ldots + z_n m_n, \end{gathered} \tag{0.44}$$

называется тэта-функцией Римана. Она удовлетворяет следующим свойствам монодромии:

$$\theta(z + e_k) = \theta(z), \quad \theta(z + B_k) = e^{-2\pi i z_k - \pi i B_{kk}} \theta(z). \tag{0.45}$$

Функция $\theta(A(Q) - Z)$ является многозначной функцией от Q, но из соотношений (0.45) следует, что нули этой функции корректно определены. Для Z в общем положении уравнение

$$\theta(A(Q) - Z) = 0 \tag{0.46}$$

имеет g нулей $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$. Вектор Z и дивизор этих нулей связаны соотношением

$$Z_k = \sum_{s=1}^{g} A(\gamma_s) + \mathcal{K}, \tag{0.47}$$

где вектор $\mathcal{K}$ есть константа Римана.

Введем нормализованные абелевы дифференциалы $d\Omega_{\alpha, i}$ второго рода. Дифференциал $d\Omega_{\alpha, i}$ голоморфен на всей кривой Γ, за исключением P_α. В окрестности этой точки он имеет вид

$$d\Omega_{\alpha, i} = d(k_\alpha^i + O(1)). \tag{0.48}$$

«Нормализованный» в данном случае означает, что дифференциал имеет нулевые a-периоды

$$\oint_{a_j} d\Omega_{\alpha, i} = 0. \tag{0.49}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathcal{E}(t, Q) = \exp\left\{ \sum_{\alpha, j} t_{\alpha, j} \int_{q_0}^{Q} d\Omega_{\alpha, j} \right\}. \tag{0.50}$$

Она обладает такими же экспоненциальными особенностями вида (0.29) в выколотых точках, что и функция Бейкера—Ахиезера, но эта функция однозначна на кривой Γ, разрезанной только вдоль a-циклов. Ее значения на разных сторонах цикла a_i отличаются на множитель

$$e^{2\pi i U_i} = \exp\left\{ \sum_{\alpha, j} t_{\alpha, j} U_{\alpha, j}^i \right\}, \tag{0.51}$$

где

$$U_{\alpha, j}^i = \frac{1}{2\pi i} \oint_{b_i} d\Omega_{\alpha, j}. \tag{0.52}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(V, Q) = \frac{\theta(A(Q) + V - Z)}{\theta(A(Q) - Z)}, \tag{0.53}$$

где V — вектор с координатами $V_1, \ldots, V_g$. Эта функция мероморфна на кривой Γ, разрезанной вдоль a-циклов, и имеет g полюсов (зависящих от Z). Из свойств монодромии (0.45) следует, что граничные значения φ на двух сторонах от циклов a_i удовлетворяют соотношению

$$\varphi^+ = e^{-2\pi i V_j} \varphi^-. \tag{0.54}$$

В книге такие многозначные функции называются факториальными функциями.

Из равенств (0.50)–(0.54) следует, что

$$\psi(t, Q) = \mathcal{E}(t, Q) \frac{\theta\Big(A(Q) + \sum\limits_{\alpha, j} t_{\alpha, j} U_{\alpha, j} - Z\Big)}{\theta(A(Q) - Z)} \tag{0.55}$$

Генри Фредерик Бейкер

АБЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ
Теорема Абеля и связанная с ней теория тэта-функций

Подписано в печать 8.04.2008 г. Формат 70×100 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 46. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.