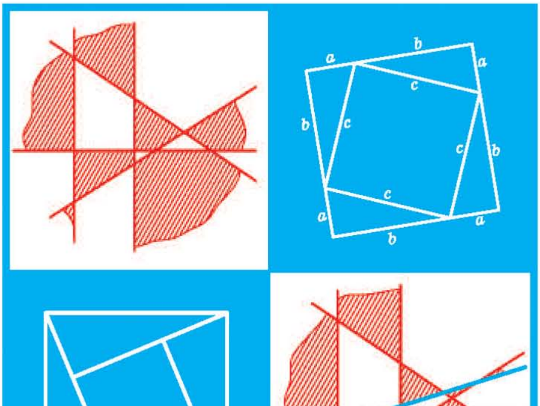
Библиотека
«Математическое просвещение»

В. А. Успенский

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 34

В. А. Успенский

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Второе издание, стереотипное

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2012

УДК 511.1
ББК 22.130
У77

Успенский В. А.

У77 Простейшие примеры математических доказательств. — 2-е изд., стереотипное. — М.: Изд-во МЦНМО, 2012. — 56 с.

ISBN 978-5-94057-879-6

В брошюре доступным неспециалистам языком рассказывается о некоторых из основополагающих принципов, на которых строится наука математика: чем понятие математического доказательства отличается от понятия доказательства, принятого в других науках и в повседневной жизни, какие простейшие приёмы доказательства используются в математике, как менялось со временем представление о «правильном» доказательстве, что такое аксиоматический метод, в чём разница между истинностью и доказуемостью.

Для очень широкого круга читателей, начиная со школьников старших классов.

Первое издание книги вышло в 2009 году.

ББК 22.130

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Успенский Владимир Андреевич

ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДОКАЗАТЕЛЬСТВ

Выпуск 34

Серия основана в 1999 году

Редактор *М. Г. Быкова*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано к печати 13/IX 2011 г. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Объём 3,50 (вкл.) печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-879-6

МАТЕМАТИКА И ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Даже незнакомый с математикой человек, взяв в руки книгу по математике, может, как правило, сразу определить, что эта книга действительно по математике, а не по какому-нибудь другому предмету. И дело не только в том, что там обязательно будет много формул: формулы есть и в книгах по физике, по астрономии или по мостостроению. Дело в том, что в любой серьёзной книге по математике непременно присутствуют *доказательства*. Именно доказуемость математических утверждений, наличие в математических текстах доказательств — вот что нагляднее всего отличает математику от других областей знания.

Первую попытку охватить единым трактатом всю математику предпринял древнегреческий математик Евклид в III веке до нашей эры. В результате появились знаменитые «Начала» Евклида. А вторая попытка состоялась только в XX веке н. э., и принадлежит она французскому математику Николя́ Бурбаки́[1], начавшему в 1939 году издавать многотомный трактат «Начала математики». Вот какой фразой открывает Бурбаки свой трактат: «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“». Таким образом, «математика» и «доказательство» — эти два слова объявляются почти синонимами.

Казалось бы, можно возразить, что доказательства встречаются и в других сферах — скажем, в юриспруденции. Например, в суде каждая из спорящих сторон предъявляет свои доказательства (причём доказательства одной стороны нередко противоречат доказательствам другой стороны). Однако все согласны, что математические доказательства гораздо убедительнее тех, которые произносятся в судах.

Доказательства, собственно, встречаются во всех науках, даже в науках гуманитарных. Приведу два примера: первый из исторической науки, второй — из филологии.

---

[1] На самом деле такого математика не существует. Николя́ Бурбаки́ — это коллективный псевдоним группы математиков, подобно тому как «Козьма Прутков» — коллективный псевдоним группы писателей (но только, в отличие от группы Бурбаки, группы постоянного состава). Сказанное не послужило препятствием ни тому, чтобы г-н Бурбаки имел свой почтовый ящик на Международном съезде математиков в Москве в 1966 г. (причём почта из ящика исправно забиралась), ни тому, чтобы он получил гонорар, выписанный ему издательством «Мир» за осуществлённое в 1965 г. издание русского перевода первого тома его трактата. Рассказывают, что когда Американское математическое общество выпустило справочник, в котором Бурбаки был назван псевдонимом группы математиков, возмездие последовало незамедлительно: в одной из публикаций Бурбаки президент Американского математического общества был назван точно так же.

Первые шаги в науке великого российского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903—1987) были сделаны не в математике, а в истории[1] и относились к истории Новгородской земли XV века.

Колмогоровские разыскания содержали, в числе других достижений, ответ на вопрос, как брался налог с селений Новгородской земли — с селения в целом или же с каждого его двора. Опровергая господствующее мнение, Колмогоров доказал, что налог брался с селения в целом. Доказательство состояло в том, что в противном случае правило налогообложения должно было бы быть чересчур сложным. Проведённый Колмогоровым анализ новгородских писцовых книг, в которых наряду с другими сведениями записывались сведения о налогообложении, привёл к следующим результатам. Налог с больших селений всегда брался в целых единицах, к тому же в большинстве случаев — в круглых цифрах. Налог со средних селений брался, в основном, также в целых единицах. Налог с небольших селений мог составлять как целое, так и дробное число налоговых единиц, но это дробное число всегда имело вид целого числа с половиной. Более того, во многих случаях, когда налог с небольших селений брался в целых единицах, дворов в селении оказывалось больше, чем число налоговых единиц, взымаемых с селения. Кажется невероятным, чтобы налог был подворным и его ставки были столь хитроумны, чтобы достигнуть таких числовых эффектов!

Теперь пример из филологии. Долгое время предметом ожесточённых спекуляций служил вопрос о подлинности «Слова о полку Игореве», то есть вопрос о том, создано ли оно в XII—XIV веках, что и означает подлинность, или же является подделкой, относящейся, скорее всего, к XVIII веку. Андрей Анатольевич Зализняк (только личное знакомство с ним мешает мне назвать его великим лингвистом) доказал подлинность «Слова». Доказательство опирается на анализ раскрытых Зализняком тончайших закономерностей древнерусского языка. Невероятно, чтобы мог

[1] Над рукописями своих исторических исследований Колмогоров начал работать, когда ему было семнадцать с половиной лет, а закончил их в 1922 г., когда ему ещё не было девятнадцати. В то время он был студентом Московского университета. Эти рукописи долгое время считались утерянными, они были найдены и опубликованы лишь после смерти Колмогорова в книге: *Колмогоров А. Н. Новгородское землевладение XV в. Бассалыго Л. А. Коммментарий к писцовым книгам Шелонской пятины*. — М.: Физматлит, 1994. (Да, книга имеет такое сложное библиографическое описание. Она состоит из двух самостоятельных сочинений, имеющих каждое своего автора.) После опубликования колмогоровские рукописи по истории получили высокую оценку специалистов.

существовать такой фальсификатор, который не только знал бы эти закономерности, иные из коих были обнаружены лишь недавно, но и скрыл своё знание от современников! (Это при том, что, как известно, незнание можно скрыть, знание скрыть невозможно.)

В обоих наших рассказах о доказательствах в гуманитарных науках мы употребили слово *невероятно*, а не слово *невозможно*. Дело в том, что в обоих случаях всё-таки остаётся некоторая, пусть весьма малая, вероятность того, что в действительности налог был подворным, а «Слово» — подделкой. Требуется ли ещё уменьшать эту вероятность? На мой взгляд, в приведённых примерах не требуется — но этот взгляд субъективен. И если кто-нибудь потребует сделать вероятность опровержения открытий, сделанных Колмогоровым и Зализняком, ещё ничтожнее, против этого будет трудно возразить. Вот, например, как реагировал на сообщение Колмогорова известный историк С. В. Бахрушин, когда работа была рассказана на занятиях его семинара в Московском университете. Пишет известный археолог, руководитель новгородской археологической экспедиции В. Л. Янин:

> Когда работа была доложена им [Колмогоровым] на семинаре, руководитель семинара профессор С. В. Бахрушин, одобрив результаты, заметил, однако, что выводы молодого исследователя не могут претендовать на окончательность, так как «в исторической науке каждый вывод должен быть обоснован несколькими доказательствами»(!). Впоследствии, рассказывая об этом, Андрей Николаевич добавлял: «И я решил уйти в науку, в которой для окончательного вывода достаточно одного доказательства». История потеряла гениального исследователя, математика навсегда приобрела его.

Думается, позиция Бахрушина имеет следующее объяснение. Он привык к тому, что обычно применяемые в исторической науке доказательства допускают, каждое в отдельности, ощутимую вероятность того, что доказанное утверждение не соответствует действительности; а посему, для уменьшения этой вероятности, требуется несколько доказательств. Возможно, он впервые услышал доказательство, уже в единственном числе делающее указанную вероятность пренебрежимо малой, — услышал, но не осознал.

Вернёмся, однако, к математике. Математические доказательства повсеместно признаются эталоном бесспорности. Выражения вроде «я тебе докажу математически», встречающиеся в русской классической литературе, призваны продемонстрировать доказательство, которое нельзя оспорить.

Но что же такое доказательство? Доказательство — это рассуждение, которое убеждает того, кто его воспринял, настолько, что он делается готовым убеждать других *с помощью этого же рассуждения*. Так понимается доказательство всюду — и в истории, и в филологии, и в математике. Во избежание недоразумений и возможного возмущения просвещённых читателей (если таковые найдутся среди читателей этого текста) отметим, что есть и другое понимание того, что такое доказательство. По Бурбаки, например, доказательство — это цепочка символов, организованная по определённым правилам. Мы обсудим это другое понимание в заключительном разделе книги. Полагаем, однако, что наше понимание не является чем-то оригинальным, а отражает то стандартное употребление слова *доказательство*, которое имеет место и в средней, и в высшей школе. Те математические объекты, которые называет доказательствами Бурбаки, разумно называть *формальными доказательствами* — в отличие от содержательных, психологических доказательств, о которых мы здесь говорим. Формальные доказательства составляют предмет изучения математической логики. Заметим ещё, что, на наш взгляд, и Бурбаки не может избежать содержательных доказательств: ведь чтобы убедиться, что данная цепочка символов является формальным доказательством, требуется провести содержательное рассуждение, то есть именно психологическое доказательство.

Отличие математического доказательства от доказательств в других науках состоит в том, что в математике порог убедительности значительно выше. Можно сказать, что математические и нематематические доказательства имеют разные амбиции. Нематематические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с подавляющей вероятностью, а предположение, что это не так, невероятно. Математические доказательства претендуют на то, чтобы убедить в следующем: доказываемое утверждение имеет место с необходимостью, а предположение, что это не так, невозможно. Так, уже отмечалось, что в приведённых выше примерах из истории и филологии оставалась возможность, пусть совершенно невероятная, что в действительности дело обстояло иным образом. И даже демонстрация нескольких доказательств, как того требовал Бахрушин, всего лишь повысила бы степень невероятности, но не превратила бы её в невозможность. В математических же доказательствах *невероятность* противоположного эффекта — то есть допущения того, что доказанное утверждение неверно, — заменяется на *невозможность*. Поэтому в математических доказательствах убедительность должна быть абсолютной, не оставляющей никакой возможности для противоположного суждения.

Предвидим протест или, по меньшей мере, удивление некоторых читателей. Как же так, такое важное математическое понятие, как доказательство, а имеет такое нечёткое определение — да и вообще не определение, а описание, пояснение. На это у нас два возражения. Во-первых, даже и в математике всё определить невозможно: ведь одни понятия определяются через другие, другие через третьи, и т. д. Но этот процесс не может продолжаться бесконечно. Поэтому мы вынуждены где-то остановиться. Во-вторых, понятие доказательства не есть математическое понятие (подобное, скажем, понятию действительного числа или понятию многоугольника); по отношению к математике оно не *внутреннее*, а *внешнее* и принадлежит не математике, а психологии (и отчасти лингвистике). Однако невозможно представить себе современную математику без повсеместного использования этого понятия.

Можно ли предложить разумную классификацию всевозможных доказательств, то есть убедительных рассуждений? Вряд ли. Тем более, что доказательство, как правило, состоит из нескольких (иногда очень многих) этапов, и на каждом этапе применяется свой способ убеждения. Можно, однако, среди схем доказательства выделить несколько часто повторяющихся; ниже некоторые из таких схем будут изложены. Чтобы не дезориентировать читателя, сделаем два предупреждения.

Предупреждение первое. Было бы глубоким заблуждением считать, что других методов доказательства не бывает! Да и само выделение схем достаточно условно. Ведь нередко случается, что одна схема «залезает» внутрь другой — скажем, внутри доказательства по индукции может встретиться доказательство от противного или наоборот.

Предупреждение второе. Все примеры, которые будут приведены ниже, содержат лишь очень простые и короткие доказательства. Многие доказательства, встречающиеся в математической науке, и гораздо сложнее, и гораздо длиннее: их длина может измеряться десятками, сотнями и даже тысячами страниц. Поясним, откуда могут взяться эти тысячи. Дело в том, что каждое доказательство опирается на какие-то факты, и если включить в него и полные доказательства всех этих фактов, то тут-то и могут потребоваться тысячи страниц.

О ТОЧНОСТИ И ОДНОЗНАЧНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Прежде чем продолжить разговор о доказательствах, необходимо сказать несколько слов о математической терминологии.

Убедительность математических доказательств поддерживается отчётливостью, недвусмысленностью математических утверждений. Когда, например, говорят, что один общественный строй более прогрессивен, чем другой, то не вполне ясно, что в точности это означает. А вот когда говорят, что две прямые пересекаются, то ни у кого не возникает сомнения в смысле этих слов.

Для того чтобы математические суждения воспринимались как точные и недвусмысленные, необходимо, прежде всего, чтобы таковыми были те понятия, которые в этих суждениях используются. Суждения облекаются в словесную форму в виде предложений, а понятия — в виде терминов. Таким образом, каждый термин должен иметь ровно один точно очерченный смысл. Скажем несколько слов о том, что происходит в реальности с математическими терминами.

Надо признать, что точность смысла реально достигается лишь в профессиональных и высокоучёных математических текстах, в повседневной же практике — отнюдь не всегда. Чем точнее очерчен смысл термина — тем убедительнее использующие этот термин доказательства. Однозначности значений терминов также, к сожалению, не наблюдается.

Возьмём, к примеру, такой распространённый термин, как *многоугольник*. Он понимается по-разному — и как любая замкнутая ломаная, и как несамопересекающая замкнутая ломаная (и то, и другое ещё надо определять!), и как часть плоскости, ограниченная ломаной. Если вдуматься, то слова «часть плоскости, ограниченная ломаной» нуждаются в разъяснении, а тот факт, что такая часть существует, — ещё и в доказательстве, каковое оказывается довольно непростым (сам этот факт представляет собой частный случай так называемой *теоремы Жордана*, говорящей не только о ломаных, но и о замкнутых линиях вообще). Тем не менее именно в таком, достаточно наглядном и потому оставляемом без разъяснения, смысле термин *многоугольник* понимается в этой книге (а потому все приведённые здесь рассуждения о многоугольниках убедительны лишь постольку, поскольку ясен смысл термина).

ОГЛАВЛЕНИЕ