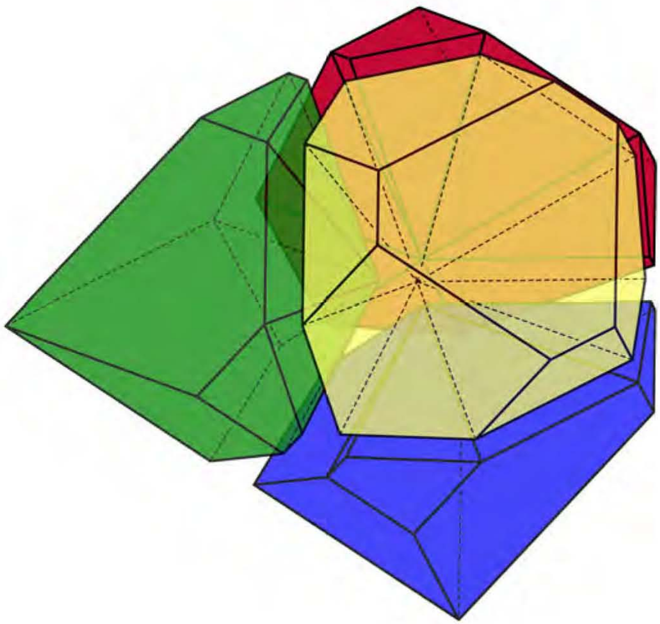
Библиотека
«Математическое просвещение»

А. М. Райгородский

ПРОБЛЕМА БОРСУКА



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2006

Библиотека
«Математическое просвещение»
Выпуск 33

А. М. Райгородский

ПРОБЛЕМА БОРСУКА

Второе издание, исправленное

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2015

УДК 519.1+514.174
ББК 22.135
Р18

Райгородский А. М.

Р18 Проблема Борсука / А. М. Райгородский : 2-е изд., испр. — М. : изд-во МЦНМО, 2015. — 56 с. : ил.
ISBN 978-5-4439-0163-3

Брошюра написана по материалам лекции, прочитанной автором 4 декабря 2004 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов. В ней рассказывается об одной из знаменитых задач комбинаторной геометрии — гипотезе Борсука, которая утверждает, что в n-мерном пространстве всякое ограниченное множество можно разбить на $n+1$ часть меньшего диаметра. Вначале подробно анализируются случаи малых размерностей и доказывается, что при $n=1, 2, 3$ гипотеза верна. Далее приводятся различные оценки сверху для числа Борсука в зависимости от размерности. Кроме того, рассматривается связь гипотезы с другими проблемами и задачами комбинаторной геометрии (проблема освещения, задача Грюнбаума, задача о хроматическом числе). В заключительных главах рассматриваются контрпримеры к гипотезе Борсука и история понижения минимальной размерности, в которой строится контрпример, а также улучшения оценки снизу.

Многие главы снабжены задачами. Некоторые из них — это упражнения, прорешав которые, читатель лучше прочувствует материал. На некоторые задачи опирается основной текст. Сложные задачи отмечены звёздочками (некоторые являются открытыми проблемами).

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей. От читателя потребуется знание элементарных понятий комбинаторики, а кроме того, будет полезным (но не обязательным) знакомство с аналитической геометрией и началами анализа.

1-е изд. — 2006 год.

ББК 22.135

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»
Серия основана в 1999 году

Выпуск 33

Андрей Михайлович Райгородский

ПРОБЛЕМА БОРСУКА

2-е изд., испр.

Редакторы *Д. Вельтищев*, *Т. Караваева*, *Ю. Кузнецова*, *М. Вельтищев*
Рисунки выполнил *Д. Вельтищев* Техн. редактор *М. Вельтищев*

Подписано в печать 28/VIII 2014 года. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Объём 3,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, Борисовская ул., 14.

ISBN 978-5-4439-0163-3

1. ВВЕДЕНИЕ

В этой брошюре мы бы хотели познакомить читателя с одной из наиболее известных, красивых и интригующих задач современной комбинаторной геометрии. Эта задача была предложена в 1933 году замечательным польским математиком Каролем Борсуком*), и за прошедшие 70 лет она сделалась едва ли не самой популярной в своей области. Собственно говоря, комбинаторная геометрия как раз и сформировалась на основе таких ярких задач, как задача о хроматическом числе или, скажем, задача Хелли. И, разумеется, проблема Борсука сыграла в процессе формирования данного раздела математики одну из главных ролей. Именно поэтому мы не станем обсуждать здесь сам термин «комбинаторная геометрия», тем более что мы уже достаточно подробно комментировали его в брошюре «Хроматические числа» (см. [1]). Заметим только, что и геометрия, и комбинаторика будут сопутствовать нам на протяжении всего повествования, а стало быть, в конечном счёте и комментарии окажутся излишними.

Вообще, история проблемы Борсука носит весьма драматический и в чём-то почти детективный характер. Более того, эта проблема удивительно тонким, изящным и вместе с тем неожиданным образом связана с уже упоминавшейся задачей о хроматическом числе. Обо всём этом нам предстоит постепенно узнать, но в своё время. Сперва нам следует понять, в чём же состоит вопрос Борсука — вопрос, которому суждено было оказать столь существенное влияние на развитие современной науки.

2. ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМЫ БОРСУКА НА ПРЯМОЙ, НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Мы поступим следующим образом: сначала сформулируем задачу, а затем тщательно откомментируем формулировку, содержащую несколько тонких моментов и незнакомых понятий.

Проблема Борсука. *Найти минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито произвольное ограниченное множество в пространстве.*

По-видимому, наиболее непонятным кажется слово «диаметр», применённое не к кругу или шару, а к произвольному множеству. Однако на самом деле неясностей гораздо больше, так что обо всём по порядку.

*) Кароль Бóрсук (8 мая 1905 г. — 24 января 1982 г.) — выдающийся польский математик. Ему принадлежат многочисленные результаты по топологии, дифференциальной геометрии и пр. Его именем даже названа улица в Варшаве.

Прежде всего, что мы понимаем под *пространством*? Вообще говоря, вопрос этот нетривиален, и мы оставим в стороне исчерпывающий ответ на него. Мы пока ограничимся рассмотрением лишь тех ситуаций, которые входят в обычную школьную программу. Но и на этом пути сразу же возникает недоразумение. Действительно, кто ж из нас не знает, что такое пространство? Достаточно поглядеть вокруг себя. Тонкость в том, что математика, будучи наукой, безусловно, живой, тем не менее зачастую использует термины, знакомые нам из повседневной жизни, для обозначения тех объектов, которые мы либо привыкли называть по-другому, либо и вовсе не встречали. В этом состоит элемент абстракции, присущий математике. В нашем случае всё совсем не страшно: просто мы называем пространством, в зависимости от контекста, не только трёхмерное пространство, в котором мы живём, но и плоскость, и прямую. Это разумно, поскольку вполне можно представить себе, например, существо, которое всю жизнь ползает по плоскости и третьего измерения видеть не способно. Для него и плоскость — пространство. При этом, как мы хорошо понимаем, наше пространство трёхмерно, пространство упомянутого существа двумерно, а на прямой только одно измерение. Таким образом (по числу измерений) мы пространства и отличаем.

Будем обозначать прямую через $\mathbb{R}=\mathbb{R}^1$, плоскость — через $\mathbb{R}^2$, а трёхмерное пространство — через $\mathbb{R}^3$. Проще всего мыслить об этих объектах так: $\mathbb{R}$ — это множество всевозможных вещественных (действительных) чисел, $\mathbb{R}^2$ — это множество пар $\vec{x}=(x_1, x_2)$ чисел $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}^3$ — множество троек $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$, где $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Ясно, что пары из $\mathbb{R}^2$ и тройки из $\mathbb{R}^3$ — это то, что мы называем *векторами* или *точками* в соответствующих пространствах. В свою очередь, элементы пар и троек (числа x_1, x_2, x_3) суть координаты наших векторов.

Далее, а что такое п р о и з в о л ь н о е множество в пространстве? Конечно, каждый из нас может вообразить себе уйму разных множеств. Скажем, это могут быть и конечные наборы точек, и какие-нибудь фигуры (если речь идёт о двумерном пространстве) или тела (если мы говорим о трёхмерье), и многое, многое другое (см. рис. 1).

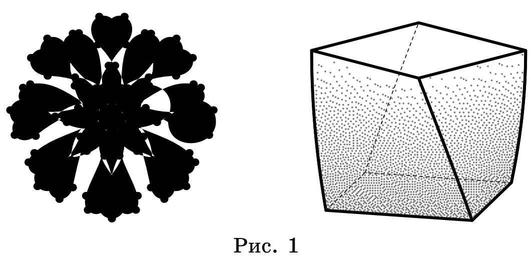


Рис. 1

Небольшая неприятность состоит в том, что иной раз в науке возникают чрезвычайно хитрые множества, которые и описать-то толком не удаётся. Мы не станем забираться здесь в теоретико-множественные дебри, так как ничего нового нам это не принесёт. Взамен мы предложим читателю представлять себе те множества, какие он сам посчитает возможным. Без сомнения, этого уже хватит с запасом, ведь, как мы увидим позже, даже с конечными наборами векторов возиться весьма и весьма непросто.

Теперь об ограниченности множеств. Пусть $n \leqslant 3$. Множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ называется *ограниченным*, если существует отрезок (при $n=1$), круг (при $n=2$) или шар (при $n=3$), целиком содержащий множество $\mathscr{A}$.

Наконец, очередь дошла и до диаметра. Естественно, дабы определить его, мы должны уметь измерять расстояния. Соответствующие формулы всем хорошо известны:

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2},$$

коль скоро $\vec{x}=(x_1, x_2)$, $\vec{y}=(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, и

$$|\vec{x}-\vec{y}|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}$$

в аналогичных обозначениях для $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$. На прямой всё совсем просто.

Зафиксируем произвольное ограниченное множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ при $n \leqslant 3$. Будем перебирать всевозможные пары точек $\vec{x}, \vec{y} \in \mathscr{A}$ и измерять расстояния между ними. Получится некоторый (не исключено, что бесконечный) набор чисел. Нам бы хотелось найти в нём максимальный элемент и назвать его диаметром множества $\mathscr{A}$. В самом деле, такое определение диаметра вполне коррелировало бы с общеизвестным: и для круга, и для шара диаметр — это расстояние между максимально удалёнными друг от друга точками. К сожалению, всё не так легко. Представим себе, что $\mathscr{A}=(a, b) \subset \mathbb{R}$ — это обычный интервал. Рассмотрим в нём пары точек вида $a+1/k$, $b-1/k$. Понятно, что с увеличением k расстояние между точками становится всё ближе и ближе к $b-a$. Однако в $\mathscr{A}$ нет точек, расстояние между которыми в точности равнялось бы $b-a$. Стало быть, искомый максимум не существует. Если знать теорию пределов, то трудность ничего не стоит преодолеть, заменяя максимум на так называемый *супремум* (точную верхнюю грань). Мы не станем вдаваться здесь в подобные детали. С одной стороны, как правило, и без того ясно, чем заменить максимум, коль скоро его найти не удалось (скажем, для интервала диаметр — это всё равно его длина), а с другой стороны, можно опять-таки ограничиться изучением только тех множеств, для которых такой проблемы нет (см. задачи).

Итак, диаметр множества — это, говоря не совсем строго, расстояние между наиболее удалёнными его точками. Понятно, что у ограниченного множества диаметр всегда конечен. Будем обозначать диаметр множества $\mathscr{A}$ через diam $\mathscr{A}$.

Вернёмся к проблеме Борсука и попробуем проинтерпретировать её с учётом накопленной информации. Пусть дано какое-то множество $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$, где $n \leqslant 3$. Попытаемся представить $\mathscr{A}$ в виде

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{A}_f,$$

предполагая, что $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i < \operatorname{diam} \mathscr{A}$ для каждого i, $1 \leqslant i \leqslant f$. Обозначим через $f(\mathscr{A})$ минимум среди всех f, для которых такое представление имеет место. Понятно, что $f(\mathscr{A})$ — это и есть минимальное число частей меньшего диаметра, на которые может быть разбито*) множество $\mathscr{A}$. Определим $f(n)$ как максимум по всем $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}^n$ величин $f(\mathscr{A})$. В свою очередь, на $f(n)$ частей меньшего диаметра разбивается уже произвольное ограниченное множество в n-мерном пространстве, причём существует такое множество в $\mathbb{R}^n$, которое нельзя разбить на $f(n)-1$ часть. Таким образом, проблема Борсука состоит в отыскании числа $f(n)$.

1. Является ли ограниченным множество всех целых чисел на прямой?

2. Найдите диаметры множеств, изображенных на рис. 2.

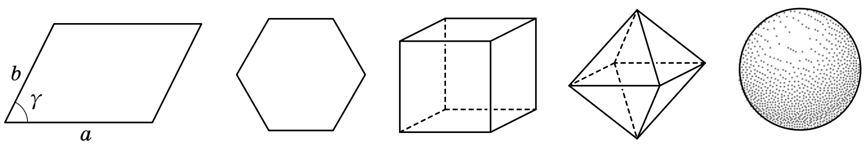


Рис. 2

3. Разбейте множества с рис. 2 на части меньшего диаметра. Постарайтесь сделать это максимально экономно.

4. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если вместо произвольных ограниченных множеств разбивать произвольные множества фиксированного диаметра — например, диаметра 1.

5*. Множество в $\mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя своими точками оно целиком содержит соединяющий их отрезок. Докажите, что величина $f(n)$ не изменится, если вместо произвольных ограниченных множеств разбивать произвольные ограниченные выпуклые множества.

---

*) Вообще говоря, для пущей корректности следовало бы потребовать, чтобы множества $\mathscr{A}_i$ попарно не пересекались. Иначе не совсем правильно употреблять слово «разбиение». Однако несложно проверить, что упомянутое дополнительное требование никак не влияет на $f(\mathscr{A})$.

3. ПРОБЛЕМА БОРСУКА НА ПРЯМОЙ

Сейчас мы попробуем разобраться с тем, как поэкономнее разбивать на части меньшего диаметра одномерные множества. Иными словами, мы постараемся определить значение $f(1)$.

Для начала заметим, что неравенство $f(1) \geqslant 2$ практически очевидно. В самом деле, нелепо же пытаться разбить какое-либо множество на о д н у часть меньшего диаметра. Это то, что принято называть «contradictio in adjecto», т. е. противоречие внутри определения. Мы, однако, утверждаем большее, а именно: $f(1) \leqslant 2$, так что в конечном счёте $f(1)=2$. Если мы наше утверждение докажем, то проблема Борсука на прямой будет решена.

Рассмотрим произвольное (ограниченное) множество $\mathscr{A}$ в $\mathbb{R}$. Мы ничего, по сути, не потеряем, если будем полагать $\operatorname{diam} \mathscr{A}=1$ (см. задачу 4 из предыдущей главы). Возьмём в множестве $\mathscr{A}$ «крайнюю левую» и «крайнюю правую» точки. Конечно, кавычки не случайны, ведь, как мы уже знаем, такие точки вовсе не обязаны существовать. Например, если речь идёт об интервале (a, b), то мы возвращаемся к ситуации, когда точки $a+1/k$ и $b-1/k$ с увеличением k становятся всё ближе и ближе к «краям», краёв этих ни при каких условиях не достигая. Интуитивно смысл «крайних точек» понятен, а для строгости нужно опять-таки сослаться на теорию пределов: там роль «крайне левого» будет играть *инфимум* (точная нижняя грань), а «крайне правого» — *супремум* (точная верхняя грань). Итак, пусть найденные нами точки суть a и b. Ясно, что они «диаметрально противоположны», т. е. что на них-то как раз и достигается диаметр $\mathscr{A}$, равный единице. Таким образом, $b-a=1$. С другой стороны, отрезок $[a, b]$, безусловно, содержит внутри себя множество $\mathscr{A}$ или, как ещё говорят, *покрывает* это множество. Рассмотрим разбиение

$$[a, b]=\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cup\left[\frac{a+b}{2}, b\right].$$

Разумеется, диаметр каждой из частей в данном разбиении отрезка равен $\frac{1}{2}$. Более того, если $\mathscr{A}_1=\left[a, \frac{a+b}{2}\right] \cap \mathscr{A}$, а $\mathscr{A}_2=\left[\frac{a+b}{2}, b\right] \cap \mathscr{A}$, то $\mathscr{A}=\mathscr{A}_1 \cup \mathscr{A}_2$ и $\operatorname{diam} \mathscr{A}_i \leqslant 1/2$. В результате $f(\mathscr{A}) \leqslant 2$, а значит, то же верно и для $f(1)$.

Отметим, что мы доказали даже чуть больше, чем требовалось. Ведь мы не просто знаем, что каждое множество диаметра 1 на прямой разбивается на части абы какого меньшего диаметра; мы знаем сверх того, что оно разбивается на части в д в о е меньшего диаметра. В данном отношении дальнейшего усиления нам не добиться. Иначе говоря, слово «вдвое» ничем лучшим мы не заменим: ни «втрое», ни «в 2,1 раза», ни «в 2,0001 раза» и т. д. нам

ОГЛАВЛЕНИЕ