Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

II

Ф. П. Васильев

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ЧАСТЬ II

Оптимизация в функциональных пространствах. Регуляризация. Аппроксимация

Издание новое,
переработанное и дополненное

Допущено Учебно-методическим объединением по классическому университетскому образованию в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности ВПО 010501 «Прикладная математика и информатика»

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.19
В19

Васильев Ф. П.

В19 Методы оптимизации: В 2-х кн. — Новое изд., перераб. и доп. — М.: МЦНМО, 2011.

ISBN 978-5-94057-706-5

Кн. 2. — 433 с. — ISBN 978-5-94057-708-9

В книге изложены численные методы решения задач оптимизации. Приводятся теоретическое обоснование и краткие характеристики этих методов. Рассматриваются задачи минимизации функций в конечномерных и бесконечномерных пространствах, а также задачи оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Для студентов вузов по специальности «Прикладная математика» и специалистов в области задач оптимизации.

Предыдущее издание книги вышло в 2002 г. в издательстве «Факториал».

ББК 22.19

ISBN 978-5-94057-708-9

9 785940 577089 >

ISBN 978-5-94057-706-5
ISBN 978-5-94057-708-9 (кн. 2)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II
ОПТИМИЗАЦИЯ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ. АППРОКСИМАЦИЯ

ГЛАВА 8
МЕТОДЫ МИНИМИЗАЦИИ В ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В части I книги мы занимались задачами минимизации функций конечного числа переменных и задачами оптимального управления процессами, описываемыми системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Наряду с этими задачами большой интерес для практики представляют задачи оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, интегро-дифференциальными уравнениями, задачи наилучшего приближения функций и др. Оказывается, все перечисленные задачи можно трактовать как экстремальные задачи в подходящим образом выбранных функциональных пространствах, и для исследования этих задач использовать аппарат и методы функционального анализа. Такая трактовка позволяет выявить общие закономерности, присущие широким классам экстремальных задач, создавать и исследовать общие методы решения таких задач. Эти проблемы, а также вопросы аппроксимации и регуляризации экстремальных задач в функциональных пространствах составляют основное содержание части II книги.

В гл. 8 мы кратко остановимся на элементах теории экстремальных задач в гильбертовых и банаховых пространствах, на методах их решения, рассмотрим некоторые классы задач оптимального управления процессами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями с частными производными. Определение многих понятий, характеризующих задачи оптимизации (локальный и глобальный минимум, верхняя и нижняя грань функции, минимизирующая последовательность и т. п.), многих понятий выпуклого анализа (выпуклое множество, выпуклая функция, проекция точки, субградиент и т. п.) получаются из определений, приведенных в гл. 1, 2, 4, нужно лишь в них под точкой теперь понимать элементы рассматриваемых банаховых и гильбертовых пространств, а вместо $|u|$, $\langle u, v\rangle$ понимать соответственно норму, скалярное произведение в этих пространствах. Поэтому мы здесь, как правило, не будем заново воспроизводить определения таких понятий и ограничимся ссылками на часть I книги. Многие теоремы, справедливые в конечномерных пространствах, без изменений остаются справедливыми и в бесконечномерных функциональных пространствах, и в таких случаях на соответствующее утверждение мы будем ссылаться в его прежней формулировке, указывая в контексте, о каком пространстве теперь идет речь.

Следует предупредить неопытного читателя, что имеется немало утверждений, справедливых лишь в конечномерных пространствах, и их обобщение на бесконечномерные пространства требует определенной аккуратности и осторожности. В таких случаях мы будем приводить точные формулировки соответствующих утверждений, иллюстрировать их примерами и контрпримерами.

Напомним, что в гл. 6, 7 мы уже рассматривали задачи оптимального управления, в которых управление принадлежит бесконечномерному функциональному пространству, но значения фазовой траектории в каждый фиксированный момент времени являются точкой конечномерного пространства. В задачах оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с частными производными, значения траекторий будут элементами бесконечномерных функциональных пространств. Для сохранения связи с гл. 6, 7 мы далее в основном будем придерживаться обозначений из этих глав: целевую функцию (функционал) будем обозначать через $J(u)$, множество, на котором ищется экстремум этой функции — через U, элементы множества U — через u, фазовые траектории — через x, пространственную переменную — через s, а время, как обычно, будем обозначать через t.

Для понимания содержания излагаемого ниже материала достаточно знания начальных глав функционального анализа и элементов теории функций действительных переменных [258; 350; 357; 371; 393; 444; 705; 768]. Впрочем, заметим, что рассмотрение конкретных классов задач оптимального управления в гл. 8–10 в основном ведется в терминах, связанных с этими задачами, и для понимания не требует знания элементов функционального анализа.

§ 1. Предварительные сведения. Обозначения

Здесь мы не будем приводить определения линейных, метрических, нормированных, банаховых и гильбертовых пространств — эти определения, а также основные свойства этих пространств читатель может найти в [393]. Ограничимся рассмотрением лишь вещественных банаховых и гильбертовых пространств, не оговаривая этого в дальнейшем. Элементы этих пространств часто будем называть точкой или вектором. Норму элемента в банаховом пространстве B будем обозначать через $\|u\|_B$, скалярное произведение двух элементов u, v из гильбертова пространства H — через $\langle u, v\rangle_H$. Напоминаем, что всякое гильбертово пространство H является банаховым пространством с нормой $\|u\|_H = (\langle u, v\rangle_H)^{1/2}$. Во всяком банаховом пространстве B можно ввести метрику, взяв в качестве расстояния $\rho(u, v)$ между точками $u, v \in B$ величину $\rho(u, v) = \|u - v\|_B$. В тех случаях, когда ясно, о каком банаховом или гильбертовом пространстве идет речь, знаки B и H в обозначениях $\|u\|_B$, $\langle c, u\rangle_H$ будем опускать и писать просто $\|u\|$, $\langle c, u\rangle$. Всюду ниже такие понятия, как ограниченность, сходимость, замкнутость, полунепрерывность сверху или снизу, компактность, будут пониматься в сильном смысле, т. е. в смысле нормы или метрики рассматриваемых банаховых пространств. Если эти понятия будут употребляться в слабом смысле, то будем говорить о слабой сходимости, слабой замкнутости, слабой полунепрерывности сверху или снизу, слабой компактности. Определение некоторых из этих понятий мы приведем и кратко поясним ниже по мере необходимости.

Кратко остановимся на понятии отображения. Пусть X и Y — два произвольных множества. Говорят, что на X определено *отображение*, если каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие некоторый однозначно определяемый элемент $y \in Y$. Для обозначения отображения F из X в Y часто пользуются записью $y = F(x)$ или $y = Fx$ или $F\colon X \to Y$. В зависимости от того, какова природа множеств X и Y, вместо общего термина «отображение» в соответствии с установившимися традициями часто употребляются термины «функция», «функционал», «оператор» и т. д. В частности, если Y представляет собой множество на числовой оси E^1, то отображение $F\colon X \to E^1$ часто называют *функцией*. В классическом вариационном исчислении, когда в роли X выступают различные функциональные пространства, вместо термина «функция» часто употребляют термин «функционал». Мы ниже будем отождествлять термины «функция» и «функционал» — это позволит нам без изменения формулировок пользоваться многими определениями и теоремами из части I и в тех случаях, когда X представляет собой множество из метрического или банахова пространства.

Через B^* будем обозначать пространство, сопряженное к банахову пространству B. Напоминаем, что B^* состоит из линейных ограниченных функций (функционалов), определенных на B. Значение линейной функции $c \in B^*$ в точке $u \in B$ будем обозначать через $\langle c, u\rangle_B$ или $\langle c, u\rangle$. По определению, линейная ограниченная функция c такова, что

$$\langle c, \alpha u + \beta v\rangle = \alpha\langle c, u\rangle + \beta\langle c, v\rangle, \quad |\langle c, u\rangle| \leqslant M\|u\|$$

при всех $u, v \in B$ и всех вещественных числах α, β; M — неотрицательная постоянная, зависящая от функции c, но не зависящая от $u \in B$. Сопряженное пространство B^* само является банаховым с нормой $\|c\|_{B^*} = \sup\langle c, u\rangle_B$, где верхняя грань берется по единичному шару $\|u\|_B \leqslant 1$. Отсюда следует, что $|\langle c, u\rangle_B| \leqslant \|c\|_{B^*}\|u\|_B$ при всех $u \in B$, $c \in B^*$.

Если H — гильбертово пространство, то для всякой линейной ограниченной функции на H найдется элемент $c \in H$ такой, что значение этой функции в любой точке $u \in H$ можно представить в виде скалярного произведения $\langle c, u\rangle_H$ [393]. Поэтому пространство H^*, сопряженное к гильбертову пространству H, можно отождествить с самим H, причем такое отождествление будет изометричным, т. е. $\|c\|_{H^*} = \sup\limits_{\|u\|_H \leqslant 1} \langle c, u\rangle_H = \|c\|_H$. Последнее равенство вытекает из *неравенства Коши–Буняковского*

$$|\langle u, v\rangle_H| \leqslant \|u\|_H\|v\|_H, \quad u, v \in H.$$

Гиперплоскостью в банаховом пространстве B называют множество

$$\Gamma = \{u \colon \langle c, u\rangle = \gamma\},$$

где $c \neq 0$ — фиксированный элемент из B^*, называемый *нормальным вектором гиперплоскости*, а γ — некоторое вещественное число.

Если X и Y — два банаховых пространства, то прямое произведение $B = X \times Y$ также является банаховым пространством с нормой $\|u\|_B = \|x\|_X + \|y\|_Y$ элемента $u = (x, y) \in B$, и сопряженное к B пространство B^* представимо в виде $B^* = X^* \times Y^*$.

В банаховых пространствах наряду с понятием сходимости по норме, или, как еще говорят, сильной сходимости, важную роль играет понятие слабой сходимости. Напомним

Определение 1. Говорят, что последовательность $\{u_k\}$ из банахова пространства B *сходится к точке* $u \in B$ *слабо* в B, если

$$\lim_{k\to\infty} \langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle \quad \text{при всех} \quad c \in B^*.$$

Если последовательность $\{u_k\}$ сходится к точке u сильно в B, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \|u_k - u\| = 0$, то $\{u_k\}$ сходится к той же точке также и слабо в B, так как

$$|\langle c, u_k\rangle - \langle c, u\rangle| = |\langle c, u_k - u\rangle| \leqslant \|c\|_B\|u_k - u\| \to 0$$

при $k \to \infty$. Обратное неверно: из слабой сходимости последовательности, вообще говоря, не следует ее сильная сходимость.

Пример 1. Пусть H — гильбертово пространство, пусть $\{e_k\}$ — некоторая бесконечная ортонормированная система в H, т. е. $\langle e_i, e_k\rangle = 0$ при $i \neq k$ и $\langle e_k, e_k\rangle = 1$, где $i, k = 1, 2, \ldots$ Возьмем произвольный элемент $c \in H^* = H$. Тогда числа $c_k = \langle c, e_k\rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, представляют собой коэффициенты Фурье элемента c по системе $\{e_k\}$. Согласно неравенству Бесселя [393, с. 151] $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leqslant \|c\|^2$, т. е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2$ сходится. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \lim\limits_{k\to\infty} \langle c, e_k\rangle = 0 = \langle c, 0\rangle$ при всех $c \in H$. Это значит, что последовательность $\{e_k\}$ слабо в H сходится к нулю. Однако $\|e_k - e_m\|^2 = 2$ при любых $k \neq m$, поэтому последовательность $\{e_k\}$ не является фундаментальной в H и не может сильно сходиться в H.

В частности, пусть $H = L_2[a, b]$ — пространство Лебега функций $u = u(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, с нормой

$$\|u\|_{L_2} = \left(\int\limits_a^b |u(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

и со скалярным произведением $\langle u, v\rangle_{L_2} = \int\limits_a^b u(t)v(t)\, dt$. Тогда ортонормированные системы

$$\left\{e_k = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \frac{\pi k(t-a)}{b-a}\right\}, \quad \left\{e_k = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \frac{\pi k(t-a)}{b-a}\right\}$$

слабо в $L_2[a, b]$ сходятся к нулю, т. е. $\int\limits_a^b c(t)e_k(t)\, dt \to 0$ при $k \to \infty$ для любой функции $c(t) \in L_2[a, b]$.

Так как сопряженное пространство B^* само является банаховым, то в свою очередь можно рассматривать второе сопряженное пространство $(B^*)^* = B^{**}$, состоящее из линейных ограниченных функций на B^*. Каждому элементу $u \in B$ можно поставить в соответствие линейную ограниченную функцию $\langle c, u\rangle$ переменной $c \in B^*$, т. е. некоторый элемент из B^{**}. Оказывается, это соответствие таково, что норма $\|u\|_B$ совпадает с нормой порожденной им функции $\langle c, u\rangle$, $c \in B^*$. Поэтому, отождествляя элемент из B с порожденной им функцией из B^{**}, получаем изометричное вложение пространства B в пространство B^{**}. В общем случае указанное вложение $B \subset B^{**}$ является строгим, т. е. возможно, что $B \neq B^{**}$. В тех случаях, когда это вложение таково, что $B = B^{**}$, банахово пространство B называется *рефлексивным*. Всякое гильбертово пространство H рефлексивно, так как $H = H^* = H^{**}$ [393; 705].

Отображение $A\colon X \to Y$, где X, Y — банаховы пространства, называют *линейным оператором*, если $A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$ для всех $x, y \in X$ и всех вещественных чисел α, β. Линейный оператор $A\colon X \to Y$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $M \geqslant 0$ такая, что $\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X$ для всех $x \in X$. Если для каждого линейного ограниченного оператора A определить норму $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X \leqslant 1} \|Ax\|_Y$, то линейное пространство таких операторов превращается в банахово пространство, которое принято обозначать через $\mathcal{L}(X \to Y)$. Для каждого оператора $A \in \mathcal{L}(X \to Y)$ равенство

$$\langle c, Ax\rangle = \langle A^*c, x\rangle, \quad x \in X, \quad c \in Y^*,$$

однозначно определяет оператор $A^* \in (Y^* \to X^*)$, называемый *сопряженным* к оператору A. Можно показать, что $\|A^*\| = \|A\|$ [393; 705].

Если $X = Y = H$ — гильбертово пространство, то $H = H^* = H^{**}$ и при каждом $A \in \mathcal{L}(H \to H)$ сопряженный оператор A^*, определяемый равенством $\langle Au, v\rangle_H = \langle u, A^*v\rangle_H$, также действует из H в H. Поэтому здесь возможно равенство $A = A^*$ — такой оператор A называют *самосопряженным*.

Приведем определения и обозначения некоторых конкретных банаховых и гильбертовых пространств, которые нам понадобятся в дальнейшем.

В конечномерном линейном вещественном пространстве $\mathbb{R}^n$ точек $u = (u^1, \dots, u^n)$ наряду с евклидовой нормой $|u| = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |u^i|^2\Big)^{1/2}$ могут быть введены различные другие нормы. Например, полагая $|u|_p = \Big(\sum\limits_{i=1}^{n} |u^i|^p\Big)^{1/p}$ при $1 \leqslant p < \infty$ или $|u|_\infty = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |u^i|$, получим различные банаховы пространства $\mathbb{R}^n_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Пространства $\mathbb{R}^n_p$ и $\mathbb{R}^n_q$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$ при $1 < p < \infty$, $q = 1$ при $p = \infty$ и $q = \infty$ при $p = 1$, являются взаимно сопряженными. В частности, $(\mathbb{R}^n_2)^* = \mathbb{R}^n_2 = E^n$. Заметим, что все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны, т. е. если $\|u\|_I$ и $\|u\|_{II}$ — какие-либо две нормы в $\mathbb{R}^n$, то найдутся числа $c_1, c_2 > 0$ такие, что $c_1\|u\|_I \leqslant \|u\|_{II} \leqslant c_2\|u\|_I$ при всех $u \in \mathbb{R}^n$. Заметим также, что в любом конечномерном банаховом пространстве понятия сильной и слабой сходимости равносильны.

Через l_p, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать банахово пространство последовательностей $u = (u^1, \dots, u^k, \dots)$ с конечной нормой $\|u\|_{l_p} = \Big(\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u^k|^p\Big)^{1/p}$. В случае $p = \infty$ под l_∞ понимают банахово пространство последовательностей $u = (u^1, \dots, u^k, \dots)$ с конечной нормой $\|u\|_{l_\infty} = \sup\limits_k |u^k|$. Можно показать, что $\lim\limits_{p\to\infty} \|u\|_{l_p} = \|u\|_{l_\infty}$ для всех $u \in l_\infty$. Сопряженным для l_p, $1 \leqslant p < \infty$, пространством является пространство l_q, где p, q связаны равенством $p^{-1} + q^{-1} = 1$ при $1 < p < \infty$ и $q = +\infty$ при $p = 1$. Описание сопряженного к l_∞ пространства см. в [258; 371]. Пространство l_p при $1 < p < \infty$ рефлексивно. Пространство l_2 является гильбертовым со скалярным произведением $\langle u, v\rangle_{l_2} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u^i v^i$ и с нормой $\|u\|_{l_2} = (\langle u, u\rangle)^{1/2}$.

Пусть G — некоторое фиксированное измеримое по Лебегу множество из евклидова пространства E^n. Через $L^r_p(G)$, где $1 \leqslant p < \infty$, r — целое положительное число, будем обозначать банахово пространство измеримых вектор-функций $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$, $t \in G$, с конечной нормой

$$\|u\|_p = \left(\int\limits_G |u(t)|^p_{E^r}\, dt\right)^{1/p}.$$

Если $p = \infty$, то через $L^r_\infty(G)$ будем обозначать банахово пространство ограниченных измеримых вектор-функций $u = u(t) = (u^1(t), \dots, u^r(t))$ с нормой

$$\|u\|_{L_\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in G} |u(t)|_{E^r} = \inf_v \sup_{t\in G} |v(t)|_{E^r},$$

где $v = v(t)$ пробегает множество всех измеримых вектор-функций, совпадающих с $u(t)$ почти всюду на G. Можно показать, что $\lim_{p\to\infty} \|u\|_{L_p} = \|u\|_{L_\infty}$ для всех $u \in L_\infty(G)$. Если $r = 1$, то вместо $L_p^r(G)$ будем писать просто $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Если $p = 2$, то пространство $L_2^r(G)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle_{L_2} = \int_G \langle u(t), v(t)\rangle_{E^r}\, dt = \int_G \left(\sum_{i=1}^{r} u^i(t) v^i(t)\right) dt;$$

тогда $\|u\|_{L_2}^2 = \langle u, u\rangle_{L_2}$. Пространство $L_p^r(G)$ при $1 < p < \infty$ является рефлексивным, а при $p = 1$ и $p = \infty$ оно нерефлексивно. Сопряженным для $L_p^r(G)$, $1 < p < \infty$, является пространство $L_q^r(G)$, где $1 < q < \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, для $L_1^r(G)$ сопряженным является пространство $L_\infty^r(G)$; описание сопряженного пространства для $L_\infty^r(G)$ см. в [258; 371].

Через $C(G)$ будем обозначать банахово пространство непрерывных на замкнутом множестве G функций с нормой $\|u\|_C = \max_{t\in G} |u(t)|$; это пространство нерефлексивно; описание сопряженного к нему пространства см. в [258; 371].

Пусть множество G из E^n имеет непустую внутренность. Через $C^\infty(G)$ будем обозначать множество функций, бесконечно дифференцируемых на множестве G. Говорят, что функция $f(s) = f(s_1, \ldots, s_n) \in L_1(G)$ имеет *обобщенную производную* $\partial f(s)/\partial s_i = f_{s_i}(s)$ по переменной s_i в G, если $f_{s_i}(s) \in L_1(G)$ и $\int_G \varphi(s) f_{s_i}(s)\, ds = -\int_G \varphi_{s_i}(s) f(s)\, ds$ для любой функции $\varphi(s) \in C^\infty(G)$, обращающейся в нуль в некоторой приграничной полосе множества G; здесь $\varphi_{s_i}(s)$ — частная производная $\varphi(s)$ по переменной s_i [441; 492; 648].

Через $H^1(G)$ (или $W_2^1(G)$) принято обозначать гильбертово пространство функций $f(s) \in L_2(G)$, обладающих обобщенными производными $f_{s_i}(s) \in L_2(G)$ по всем переменным $s_1, \ldots, s_n$, причем скалярное произведение в этом пространстве определяется так:

$$\langle f, g\rangle_{H^1} = \int_G \left(f(s) g(s) + \sum_{i=1}^{n} f_{s_i}(s) g_{s_i}(s)\right) ds,$$

а норма имеет вид $\|f\|_{H^1} = (\langle f, f\rangle_{H^1})^{1/2}$.

Через $H^m(G)$ (или $W_2^m(G)$) обозначают гильбертово пространство функций $f(s) \in L_2(G)$, обладающих всеми обобщенными частными производными до порядка m включительно, принадлежащими $L_2(G)$; скалярное произведение в $H^m(G)$ определяется равенством

$$\langle f, g\rangle_{H^m} = \int_G \sum_{0\leqslant m_1+\ldots+m_n\leqslant m} \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} f(s)}{\partial s_1^{m_1}\ldots\partial s_n^{m_n}} \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} g(s)}{\partial s_1^{m_1}\ldots\partial s_n^{m_n}}\, ds,$$

а норма имеет вид $\|f\|_{H^m} = (\langle f, f\rangle_{H^m})^{1/2}$ [492; 648; 649].

Ниже нам понадобятся пространства $H_r^m(G)$, $m \geqslant 1$, представляющие собой обобщение пространств $H^m(G)$ на случай r-мерных вектор-функций. Приведем соответствующие определения для случая, когда $G = [a, b] = \{t \in E^1 \colon a \leqslant t \leqslant b\}$, $a < b$. Через $H_r^m[a, b]$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций $u = u(t) = (u^1(t), \ldots, u^r(t)) \in L_2^r[a, b]$, обладающих обобщенными производными $\dfrac{d^i u(t)}{dt^i} = \left(\dfrac{d^i u^1(t)}{dt^i}, \ldots, \dfrac{d^i u^r(t)}{dt^i}\right)$, $i = 1, \ldots, m$, принадлежащими $L_2^r[a, b]$; скалярное произведение в этом пространстве определяется равенством

$$\langle u, v\rangle_{H_r^m} = \int\limits_a^b \left(\langle u(t), v(t)\rangle_{E^r} + \sum_{i=1}^m \left\langle \frac{d^i u(t)}{dt^i}, \frac{d^i v(t)}{dt^i} \right\rangle_{E^r}\right) dt,$$

норма равна

$$\|u\|_{H_r^m} = (\langle u, u\rangle_{H_r^m})^{1/2} = \left(\int\limits_a^b \left(|u(t)|^2_{E^r} + \sum_{i=1}^m \left|\frac{d^i u(t)}{dt^i}\right|^2_{E^r}\right) dt\right)^{1/2}.$$

Удобно считать, что $H_r^0[a, b] = L_2^r[a, b]$. Можно показать [95; 535; 649], что если $u(t) \in H_r^m[a, b]$, $m \geqslant 1$, то $u(t)$, $\dfrac{du(t)}{dt}, \ldots, \dfrac{d^{m-1}u(t)}{dt^{m-1}}$ представляют собой абсолютно непрерывные вектор-функции на отрезке $[a, b]$.

При $r = 1$ пространство $H_r^m[a, b]$, как и выше, будем обозначать просто $H^m[a, b]$. Подпространство функций из $H^m[a, b]$ со свойством $\dfrac{d^i u(a)}{dt^i} = 0$, $\dfrac{d^i u(b)}{dt^i} = 0$, $i = 1, \ldots, m-1$, будем обозначать через $H_0^m[a, b]$. Подпространство $H_0^m[a, b]$ замкнуто в $H^m[a, b]$ и поэтому само является гильбертовым пространством. В $H_0^m[a, b]$ наряду со скалярным произведением и нормой, индуцированными из $H^m[a, b]$, можно ввести скалярное произведение $\langle u, v\rangle_{H_0^m} = \int\limits_a^b \dfrac{d^m u(t)}{dt^m} \dfrac{d^m v(t)}{dt^m}\, dt$ и норму $\|u\|_{H_0^m} = \left(\int\limits_a^b \left(\dfrac{d^m u(t)}{dt^m}\right)^2 dt\right)^{1/2}$, эквивалентную норме $\|u\|_{H^m}$, т. е. $c_1\|u\|_{H^m} \leqslant \|u\|_{H_0^m} \leqslant \|u\|_{H^m}$, $c_1 = \mathrm{const} > 0$.

Пополнение $L_2[a, b]$ в норме $\sup\limits_{\varphi \in H_0^1[a,b]} \dfrac{\langle f, \varphi\rangle_{L_2[a,b]}}{\|\varphi\|_{H_0^1}}$ обозначают через $H^{-1}[a, b]$. Можно показать [458; 557], что получающееся гильбертово пространство $H^{-1}[a, b]$ изометрично пространству $(H_0^1[a, b])^*$, поэтому можно считать, что $H^{-1}[a, b] = (H_0^1[a, b])^*$. Пространство $H^{-1}[a, b]$ состоит из обобщенных функций (распределений), являющихся производными функций из $L_2[a, b]$ в смысле обобщенных функций (например, известная δ-функция Дирака, являющаяся производной функции скачка Хевисайда, принадлежит $H^{-1}[a, b]$).

Пусть $Q = G \times \{0 \leqslant t \leqslant T\}$, $G \subseteq E^n$, T — заданное положительное число. Через $H^{m,q}(Q)$ будем обозначать пространство функций $f(s, t) \in L_2(Q)$, обладающих обобщенными частными производными $\dfrac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} f(s,t)}{\partial s_1^{i_1} \ldots \partial s_n^{i_n}} \in L_2(Q)$; $0 \leqslant i_1 + \ldots + i_n \leqslant m$, $\dfrac{\partial^i f(s,t)}{\partial t^i} \in L_2(Q)$, $i = 1, \ldots, q$; это пространство является гильбертовым со скалярным произведением

$$\langle f, g\rangle_{H^{m,q}} = \int\limits_0^T \langle f(\cdot,t), g(\cdot,t)\rangle_{H^m}\,dt + \iint\limits_Q \sum_{i=1}^q \frac{\partial^i f(s,t)}{\partial t^i}\frac{\partial^i g(s,t)}{\partial t^i}\,ds\,dt$$

и нормой $\|f\|_{H^{m,q}} = (\langle f, g\rangle_{H^{m,q}})^{1/2}$.

При постановках краевых задач для уравнений с частными производными и связанных с ними задач оптимального управления важное значение имеет понятие следа функции, обобщающее понятие значения функции для классов разрывных функций. Мы здесь ограничимся следующим определением (более общие определения см. в [95; 492]).

Определение 2. Пусть $Q = \{(s,t)\colon 0 \leqslant s \leqslant l,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ и пусть функция $z = z(s,t) \in L_1(Q)$. Функция $g(s) \in L_1[0,l]$ называется *следом* функции $z(s,t)$ при $t = \tau$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для почти всех $t \in [0,T]$, для которых $|t-\tau| < \delta$, имеет место неравенство

$$\int\limits_0^l |z(s,t) - g(s)|\,ds < \varepsilon.$$

Если след функции $z(s,t)$ при $t = \tau$ существует, то его будем обозначать через $z(s,\tau)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, или $z(\cdot,\tau)$. Аналогично определяется след $z(s,\cdot) = z(s,t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, при каждом фиксированном $s \in [0,l]$. Можно показать, что если след функции существует, то он определяется единственным образом.

Если функция $z(s,t)$ непрерывна на Q, то след $z(\cdot,t)$ этой функции при каждом $t \in [0,T]$ совпадает со значением этой функции, представляющим собой функцию $z(s,t)$ переменной $s \in [0,l]$ при фиксированном t.

Пусть $z = z(s,t) \in L_1(Q)$. Напоминаем, что под элементом из $L_1(Q)$ понимается не одна функция, а класс эквивалентных функций, т. е. функций, отличающихся друг от друга на множестве нулевой меры. Поскольку двумерная мера множества $U_\tau = \{(s,t)\colon 0 \leqslant s \leqslant l,\ t = \tau\}$ равна нулю, то эквивалентные функции на этом множестве могут принимать произвольные значения или даже могут быть не определены. Поэтому говорить о значениях функции $z(s,t) \in L_1(Q)$ при фиксированном t или s не имеет смысла, а введенное выше понятие следа функции естественным образом обобщает понятие значения функции для функций из $L_1(Q)$.

Однако в общем случае нельзя ожидать, что функция из $L_1(Q)$ будет иметь след при всех значениях $t \in [0,T]$ или $s \in [0,l]$.

Пример 2. Пусть $z(s,t) = 0$ при $0 \leqslant s \leqslant l$, $T/(2k) < t \leqslant T/(2k-1)$, $k = 1,2,\ldots$, $z(s,t) = 1$ при $0 \leqslant s \leqslant l$; $T/(2k+1) < t \leqslant T/(2k)$, $k = 1,2,\ldots$ Эта функция принадлежит $L_1(Q)$, но при $t = 0$ не имеет следа.

Для того чтобы функция $z = z(s,t) \in L_1(Q)$ имела след при всех $t \in [0,T]$, на нее нужно наложить дополнительные ограничения. Например, функция $z(s,t) \in L_1(Q)$, обладающая обобщенной производной $z_t(s,t) \in L_1(Q)$, имеет след при каждом $t \in [0,T]$, и ее можно изменить на множестве двумерной меры нуль так, что она при всех $t \in [0,T]$ будет иметь значения, совпадающие со следом почти всюду на отрезке $0 \leqslant s \leqslant l$. Замечательно то, что в этом случае справедлива формула, обобщающая формулу Ньютона–Лейбница:

$$\int\limits_a^b z_t(s,t)\,dt = z(s,b) - z(s,a),$$

где $z(s,b)$, $z(s,a)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, — следы функции $z(s,t)$ при $t = b$ и $t = a$ соответственно; a, b — любые числа из отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$, причем в формуле равенство имеет место для почти всех $s \in [0,l]$. Если дополнительно известно, что $z(s,t)$, $z_t(s,t) \in L_p(Q)$, $1 \leqslant p < \infty$, то следы такой функции принадлежат $L_p[0,l]$ и непрерывны по t в метрике $L_p[0,l]$, т. е.

$$\lim_{t\to\tau} \int\limits_0^l |z(s,t) - z(s,\tau)|^p\,ds = 0$$

при всех $\tau \in [0,T]$. В частности, если $z(s,t) \in H^1(Q)$, то такая функция имеет следы $z(\cdot,t) \in L_2[0,l]$ при всех $t \in [0,T]$ и $z(s,\cdot) \in L_2[0,T]$ при всех $s \in [0,l]$, причем указанные следы непрерывно зависят в метрике $L_2[0,l]$ и $L_2[0,T]$ соответственно [492; 648; 649].

Если для функции $z(s,t) \in L_2(Q)$ существует последовательность $\{z_k(s,t)\} \in C^\infty(Q)$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \int\limits_0^l |z_k(s,t) - z(s,t)|^2\,ds = 0,$$

то $z(s,t)$ также имеет след $z(\cdot,t) \in L_2[0,l]$ при каждом $t \in [0,T]$, причем существует эквивалентная функция, значения которой совпадают со следом $z(\cdot,t)$ при всех $t \in [0,T]$ [95; 492].

Остальные обозначения, определения и факты из функционального анализа будем приводить ниже по мере надобности.

§ 2. Теорема Вейерштрасса в функциональных пространствах

1. Пусть U — некоторое множество, а $J(u)$ — функция, определенная на этом множестве и принимающая на нем конечные вещественные значения. Для обозначения задачи минимизации [максимизации] функции $J(u)$ на множестве U, как и выше, будем пользоваться следующей краткой символической записью:

$$J(u) \to \inf, \quad u \in U \quad [J(u) \to \sup, \quad u \in U]. \tag{1}$$

Воспроизведем определения некоторых понятий, которые в гл. 1, 2 были введены для задачи (1), когда множество U принадлежит конечномерному пространству E^n. Функция $J(u)$ называется *ограниченной снизу* [*сверху*] на множестве U, если существует число A такое, что $J(u) \geqslant A$ [$J(u) \leqslant A$] для всех $u \in U$. Функция $J(u)$ *не ограничена снизу* [*сверху*] на U, если существует последовательность $\{u_k\} \in U$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = -\infty$ $\Big[\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = +\infty\Big]$.

Пусть функция $J(u)$ ограничена снизу [сверху] на U. Тогда существует число a, называемое *нижней* [*верхней*] *гранью* функции $J(u)$ на множестве U и обладающее свойствами: 1) $J(u) \geqslant a$ $[J(u) \leqslant a]$ при всех $u \in U$; 2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $u_\varepsilon \in U$, для которой $J(u_\varepsilon) < a + \varepsilon$ $[J(u_\varepsilon) > a - \varepsilon]$. Если $J(u)$ не ограничена снизу [сверху], то в качестве нижней [верхней] грани $J(u)$ на U, по определению, принимают $a = -\infty$ $[a = +\infty]$. Нижнюю [верхнюю] грань $J(u)$ на U будем обозначать

$$\inf_U J(u) = J_* \quad \Big[\sup_U J(u) = J^*\Big].$$

Если $J_* > -\infty$ $[J^* < \infty]$, то можно ввести множества

$$U_* = \{u \in U\colon J(u) = J_*\} \quad [U^* = \{u \in U\colon J(u) = J^*\}].$$

Если $U_* \neq \varnothing$ $[U^* \neq \varnothing]$, то говорят, что нижняя [верхняя] грань в задаче (1) достигается, а точки $u_* \in U_*$ $[u^* \in U^*]$ называются *точками глобального минимума* [*максимума*] функции $J(u)$ на U.

Последовательность $\{u_k\} \in U$ называют *минимизирующей* [*максимизирующей*] для функции $J(u)$ на множестве U, если

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J_* \quad \Big[\lim_{k\to\infty} J(u_k) = J^*\Big].$$

Поскольку задача максимизации $J(u) \to \sup$, $u \in U$ равносильна задаче минимизации $(-J(u)) \to \inf$, $u \in U$, в дальнейшем мы будем рассматривать в основном задачи минимизации.

Как и в гл. 2, теоремами Вейерштрасса будем называть теоремы, содержащие утверждение о достижении нижней грани некоторой функции на каком-либо множестве.

2. Сначала приведем теорему Вейерштрасса, обобщающую теорему 2.1.1 на случай метрических пространств. Для ее формулировки нам понадобятся понятия компактного множества и полунепрерывности снизу функции в метрическом пространстве. Напоминаем [371; 393; 705], что множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре элементов $u, v \in M$ соответствует вещественное число $\rho(u,v)$, называемое расстоянием между элементами u и v, которое удовлетворяет условиям (аксиомам): 1) $\rho(u,v) \geqslant 0$ $\forall\, u, v \in M$, причем $\rho(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$; 2) $\rho(u,v) = \rho(v,u)$ $\forall\, u, v \in M$; 3) $\rho(u,v) \leqslant \rho(u,w) + \rho(w,v)$ $\forall\, u, v, w \in M$. Такая функция $\rho\colon M \times M \to \mathbb{R}$ называется *метрикой*.

Каждое банахово (и гильбертово) пространство B является линейным метрическим пространством с метрикой $\rho(u,v) = \|u - v\|_B$. Однако не каждое метрическое пространство M линейно. Множество $O(u,\varepsilon) = \{v \in M\colon \rho(v,u) < \varepsilon\}$ называется *ε-окрестностью точки* u. Точка $u \in M$ называется *предельной точкой* множества $U \subseteq M$, если любая окрестность точки u содержит хотя бы одну точку из U, отличную от u. Говорят, что последовательность точек $\{u_k\}$, $u_k \in M$, $k = 1, 2, \ldots$, *сходится* к точке u, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, u) = 0$. Точка u является предельной точкой множества U тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{u_k\} \in U$, $u_k \neq u$, $k = 1, 2, \ldots$, сходящаяся к u. Множество U называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Множество U замкнуто тогда и только тогда, если любая точка u, к которой сходится хотя бы одна последовательность $\{u_k\} \in U$, принадлежит самому множеству U. Множество U называется *ограниченным*, если существует шар $S(u_0, R) = \{u \in M\colon \rho(u, u_0) \leqslant R\}$ радиуса R с центром в точке $u_0 \in M$, такой, что $U \subseteq S(u_0, R)$.

Определение 1. Множество U из метрического пространства M называется *относительно компактным* в метрике этого пространства, если из любой последовательности $\{u_k\} \in U$ можно выбрать хотя бы одну подпоследовательность $\{u_{k_m}\}$, которая сходится к некоторой точке $v \in M$. Если при этом любая такая точка v принадлежит самому множеству U, то такое множество U называется *компактным* в M.

Компактное множество замкнуто, а относительно компактное множество необязательно замкнуто. Если множество U относительно компактно, то его замыкание $\overline{U}$, которое получается присоединением к U всех его предельных точек, компактно.

Определение 2. Функцию $J(u)$, определенную на множестве U из метрического пространства M, называют *полунепрерывной снизу* [*сверху*] в точке $u \in U$, если для любой последовательности $\{u_k\} \in U$, сходящейся к точке u, имеет место неравенство

$$\varliminf_{k\to\infty} J(u_k) \geqslant J(u) \quad \Big[\varlimsup_{k\to\infty} J(u_k) \leqslant J(u)\Big]. \tag{2}$$

Функция $J(u)$ называется *полунепрерывной снизу* [*сверху*] на множестве U, если она полунепрерывна снизу [сверху] в каждой точке $u \in U$. Функция $J(u)$ называется *непрерывной в точке* $u \in U$ [*на множестве* U], если она полунепрерывна снизу и сверху в точке u [на множестве U].

Определение 3. Говорят, что последовательность $\{u_k\} \in M$ сходится к множеству $U \subseteq M$, если $\lim\limits_{k\to\infty} \rho(u_k, U) = 0$, где $\rho(u, U) = \inf\limits_{v\in U} \rho(u, v)$ — расстояние от точки u до множества U.

Заметим, что определения 1, 2, 3 обобщают соответствующие определения 2.1.1, 2.1.3, 1.1.5 на случай метрических пространств. Нетрудно убедиться, что леммы 2.1.1, 2.1.2 сохраняют силу и в метрических пространствах. Справедлива

Теорема 1. *Пусть U — компактное множество из метрического пространства M, функция $J(u)$ определена и полунепрерывна снизу на U. Тогда $J_* = \inf\limits_{U} J(u) > -\infty$, множество $U_* = \{u \in U\colon J(u) = J_*\}$ непусто, компактно и любая минимизирующая последовательность $\{u_k\}$ сходится к множеству U_*.*

Эта теорема доказывается так же, как и аналогичная теорема 2.1.1.

Для применения теоремы 1 к конкретным задачам минимизации полезно иметь критерии компактности и относительной компактности в наиболее часто встречающихся в приложениях функциональных пространствах. Например, в пространствах $C(G)$, $L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, где G — ограниченное замкнутое множество из E^n, критерий компактности может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Замкнутое множество U в пространствах $C(G)$, $L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, компактно тогда и только тогда, когда*

1) *множество U равномерно ограничено, т. е.* $\sup\limits_{u \in U} \|u\| < \infty$;

2) *множество U равностепенно непрерывно, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что* $\sup\limits_{u \in U} \|u(t + \Delta t) - u(t)\| < \varepsilon$ *для всех t, $t + \Delta t \in G$, $|\Delta t| < \delta$; здесь $\|u\|$ означает норму пространства $C(G)$ или $L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$.*

Если в сформулированной теореме откажемся от требования замкнутости множества U, то получим критерий относительной компактности в указанных пространствах; доказательство этого утверждения в $C(G)$ см., например, [371; 393; 705] (теорема Арцела), в $L_p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, см. в [371; 492; 648]. Критерии относительной компактности и компактности в различных других функциональных пространствах читатель может найти в [95; 258; 393; 535; 648; 649; 772]; некоторые такие критерии будут обсуждаться ниже в § 2.2.

В евклидовом пространстве E^n множество компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено. Доказательство этого факта существенно опирается на известную теорему Больцано–Вейерштрасса, согласно которой из любой ограниченной последовательности $\{u_k\} \in E^n$ можно выбрать хотя бы одну сходящуюся подпоследовательность. Однако такая теорема в метрических пространствах, вообще говоря, неверна. По этой причине, оказывается, в метрических пространствах замкнутости и ограниченности множества, вообще говоря, недостаточно для его компактности.

Пример 1. Пусть H — гильбертово пространство, $S_1 = \{u \in H \colon \|u\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в H, пусть $\{e_k\}$ — некоторая бесконечная ортонормированная система в H. Из последовательности $\{e_k\} \in S_1$ невозможно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к какой-нибудь точке в метрике H. В самом деле, если бы такая последовательность $\{e_{k_m}\}$ существовала, то она была бы фундаментальной в H [393; 705]. Однако $\|e_k - e_m\|^2 = 2 \ \forall\, m \neq k$, и последовательность $\{e_k\}$ не может иметь ни одной фундаментальной подпоследовательности. Это означает, что шар в любом бесконечномерном гильбертовом пространстве H не может быть компактным в метрике H.

Пример 2. Пусть $U = \{u = u(t) \in L_2[0,1] \colon |u(t)| \leqslant 1$ почти всюду на $[0,1]\}$. Это множество не является компактным в метрике $L_2[0,1]$. В самом деле, возьмем последовательность $u_k = \sin \pi k t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots$ В примере 1.1 было замечено, что $\{u_k\} \to 0$ слабо в $L_2[0,1]$. Однако

$$\|u_k - u_m\|^2_{L_2} = \int\limits_0^1 |\sin \pi k t - \sin \pi m t|^2\, dt = 1 \quad \forall\, k \neq m,$$

поэтому из $\{u_k\}$ нельзя выбрать подпоследовательность, которая по норме $L_2[0,1]$ сходилась бы к нулю. Значит, U некомпактно в метрике $L_2[0,1]$.

Фёдор Павлович Васильев

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ
Книга 2

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 09.01.2011 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 27. Тираж 1500. Заказ №   .

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.