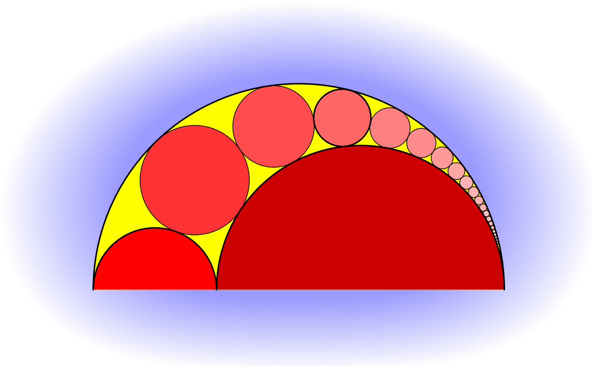
Библиотека
«Математическое просвещение»

И. Д. Жижилкин

ИНВЕРСИЯ



Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2009

Серия основана в 1999 году.

Библиотека
«Математическое просвещение»

Выпуск 35

И. Д. Жижилкин

ИНВЕРСИЯ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва • 2009

УДК 511.1
ББК 22.130
Ж70

Жижилкин И. Д.

Ж70 Инверсия. — М.: Изд-во МЦНМО, 2009. — 72 с.

ISBN 978-5-94057-448-4

Инверсия — отображение плоскости на себя, которое может переводить окружности в прямые. С одной стороны, это помогает решать «школьные» геометрические задачи, особенно те, в которых речь идёт о многих пересекающихся или касающихся окружностях. В то же время знакомство с инверсией необходимо для дальнейшего изучения таких разделов математики, как комплексный анализ и геометрия Лобачевского.

После определения и вывода основных свойств инверсии в брошюре разбираются классические задачи Архимеда, Паппа, Аполлония. Рассказывается также об инверсии пространства, стереографической проекции сферы на плоскость, пучках окружностей и сфер, что приводит к доказательству знаменитой теоремы Понселе.

Материал брошюры рассчитан на старшеклассников, учителей математики и всех интересующихся элементарной геометрией.

Брошюра написана по мотивам лекции, прочитанной автором на Малом мехмате 28 февраля 2004 года.

ББК 22.130

Серия «Библиотека „Математическое просвещение“»

Жижилкин Игорь Дмитриевич

ИНВЕРСИЯ

Выпуск 35

Серия основана в 1999 году

Редактор *М. Г. Быкова*
Тех. редактор *Д. Е. Щербаков*

Подписано к печати 20/IV 2009 г. Формат $60 \times 84\frac{1}{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Объём 4,50 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241 74 83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

ISBN 978-5-94057-448-4

ВСТУПЛЕНИЕ

В школьном курсе планиметрии рассматривают два вида преобразований плоскости: движения и преобразования подобия (гомотетию). Как гомотетия, так и движения являются линейными преобразованиями, то есть такими, при которых прямые переходят в прямые. Или, другими словами, в декартовой системе координат эти преобразования задаются линейными уравнениями.

Безусловно, класс линейных преобразований плоскости гораздо шире и отнюдь не исчерпывается лишь движениями и гомотетиями. Однако иногда бывает полезно рассмотреть и нелинейные преобразования. При таких преобразованиях прямая может перейти в какую-либо кривую. Правда в средней школе на уроках геометрии мы привыкли встречаться с одной-единственной кривой — окружностью. Не будем нарушать эту традицию, идущую ещё от Евклида, и рассмотрим замечательное преобразование плоскости, которое называется инверсией. При инверсии некоторые прямые переходят в окружности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим на плоскости окружность ω с центром O и радиусом R и произвольную точку A_1, отличную от центра O. Дадим следующее определение (рис. 1).

> **Определение.** Точка A_2 называется *симметричной точке A_1 относительно окружности ω* с центром O и радиусом R, если точка A_2 лежит на луче OA_1 и $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$.

Из определения непосредственно следуют следующие утверждения.

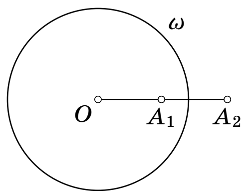


Рис. 1

1. Для каждой точки плоскости, кроме центра O, существует единственная точка, симметричная ей относительно окружности ω.

2. Для центра O симметричной точки не существует.

3. Если точка A_2 симметрична точке A_1 относительно окружности ω, то и точка A_1 симметрична точке A_2 относительно окружности ω.

4. Каждая точка, лежащая на окружности ω, симметрична сама себе.

5. Если A_1 и A_2 — различные симметричные точки, то одна из них лежит внутри окружности ω, а другая — снаружи.

Теперь можно рассмотреть отображение плоскости на себя, которое переводит любую точку, кроме центра O, в точку, симметричную ей относительно окружности ω. Это преобразование и называется *инверсией плоскости относительно окружности* ω. Вопрос о судьбе центра окружности O оставим пока открытым. Будем рассматривать плоскость с выколотой точкой O. На такой «проколотой плоскости» инверсия полностью и однозначно определена для всех точек.

Наглядно представить себе инверсию можно как результат «выворачивания» плоскости через окружность ω. Все точки окружности инверсии остаются на месте, все точки, находившиеся внутри окружности ω, оказываются снаружи, а все точки, располагавшиеся снаружи окружности, попадают внутрь.

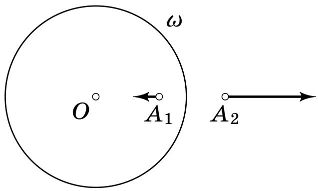


Рис. 2

Если точки A_1 и A_2 меняются при этом местами, то по определению симметричных точек $OA_1 \cdot OA_2 = R^2$, то есть $OA_2 = \dfrac{R^2}{OA_1}$. Значит, чем больше величина OA_1, тем меньше величина OA_2 и наоборот. Чем ближе точка расположена к центру инверсии, тем дальше её образ от этого центра. Если придвигать точку A_1 всё ближе и ближе к центру O, тем самым приближая величину OA_1 к нулю, то величина OA_2 будет неограниченно возрастать и, в конце концов, точка A_2 «уйдёт в бесконечность» (рис. 2).

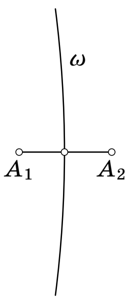


Рис. 3

Уместно также пояснить, почему мы называем точки A_1 и A_2 симметричными. Для этого рассмотрим такую точку A_1, что OA_1 мало отличается от R, то есть точку, лежащую близко к окружности инверсии. Её образ A_2 также лежит недалеко от окружности инверсии, но по другую сторону. Если при этом сделать радиус R очень большим (как говорят, достаточно большим), чтобы видимая часть окружности ω стала весьма похожей на прямую (так же как видимая нами часть земной поверхности весьма похожа на плоскость), то точки A_1 и A_2 станут «весьма похожи» на точки, симметричные относительно этой «почти прямой» (рис. 3).

Ограничимся пока этими расплывчатыми рассуждениями, а в дальнейшем сформулируем и докажем ряд строгих утверждений, придающих смысл словам, взятым в кавычки.

1. Рассмотрим на координатной плоскости точку $A_1(x_1, y_1)$ и окружность ω: $x^2+y^2=R^2$. Найдите координаты точки A_2, симметричной точке A_1 относительно окружности ω.

ПОСТРОЕНИЕ

Из определения симметричных точек следует, что для любой точки плоскости (слова «кроме центра O» будем в дальнейшем пропускать) однозначно определена симметричная ей точка. Хотелось бы, однако, не просто быть уверенным в её существовании, но и уметь достаточно быстро её построить циркулем и линейкой. Самое известное построение вытекает из следующего утверждения.

Утверждение. Пусть точка A лежит снаружи окружности ω с центром O, AM и AN — касательные к окружности ω, прямые OA и MN пересекаются в точке B. Тогда точки A и B симметричны относительно окружности ω (рис. 4).

Доказательство этого утверждения совсем не сложно.

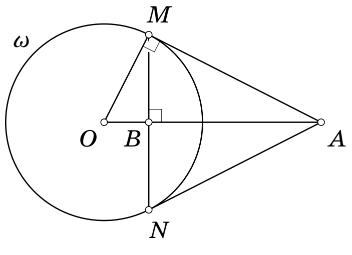


Рис. 4

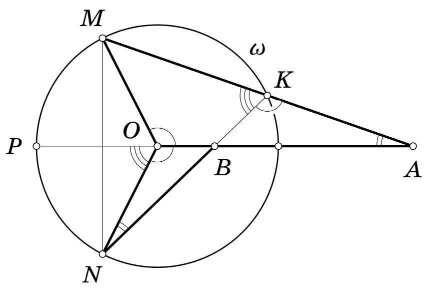


Рис. 5

Из подобия прямоугольных треугольников OMA и OBM следует пропорция $OM/OB = OA/OM$, или $OA \cdot OB = OM^2$, что и требовалось доказать.

Теперь можно построить точку, симметричную любой точке плоскости относительно данной окружности. Это легко сделать по заданной окружности как для точки A, расположенной внутри окружности, так и для точки B, расположенной вне её.

Однако несмотря на простоту построения оно, пожалуй, обладает определённым недостатком. Точки A и B названы симметричными относительно окружности, а вот само построение в каком-то смысле «несимметрично». Действительно, если точка A лежит снаружи окружности ω, то для построения надо сначала провести касательную, а потом опустить на прямую OA перпендикуляр из точки касания. Если же данная точка лежит внутри окружности, то построение ведётся в обратном порядке; сначала — перпендикуляр, потом — касательная.

Хотелось бы найти такое построение, чтобы оно действовало совершенно одинаковым образом, независимо от того, как именно расположена исходная точка: внутри или вне окружности. Это построение получается из следующей важной задачи.

2. Пусть K, M, N — произвольные точки на окружности, p — серединный перпендикуляр к отрезку MN. Тогда прямые KM и KN пересекают прямую p в точках A и B, симметричных относительно окружности (рис. 5).

Решение. Пусть P — та точка пересечения прямой p с окружностью, которая лежит вне отрезка AB. Так как угол MKN — вписанный, а угол PON равен половине соответствующего ему центрального угла, значит, $\angle MKN = \angle PON$ и $\angle BKA = \angle BON$. Поэтому в треугольниках ONB и KAB все углы соответственно равны. Следовательно, равны и соответственные углы треугольников BON и MOA.

Из подобия треугольников BON и MOA получаем:

$$\frac{OA}{ON} = \frac{OM}{OB}, \quad OA \cdot OB = OM \cdot ON = R^2.$$

Используя полученный результат, строим точку, симметричную данной точке A, следующим образом (рис. 6):

1) проведём прямую OA и произвольную секущую, проходящую через точку A и пересекающую окружность ω в точках M и K;

2) опустим из точки M перпендикуляр на прямую OA и продолжим его до пересечения с окружностью в точке N.

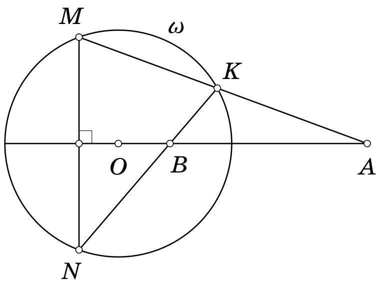


Рис. 6

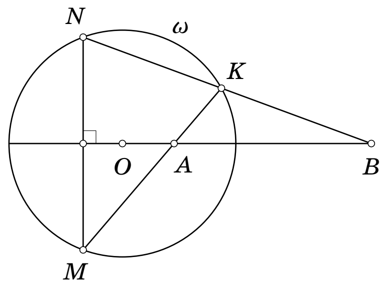


Рис. 7

Прямая KN пересекает OA в искомой точке B.

Легко видеть, что если на нашем чертеже просто поменять местами буквы A и B, а также M и N, то описание построения вообще не изменится (рис. 7). Последовательность действий останется той же самой, поскольку произвольную секущую KM можно провести как из внутренней точки окружности, так и из внешней, а для построения безразлично — лежит исходная точка A на отрезке KM или на его продолжении.

Заметим также, что первый способ построения (рис. 4) является вырожденным случаем второго, при котором точки M и K сливаются, а секущая превращается в касательную. Если попытаться аккуратно провести все построения циркулем и линейкой, то преимущества второго способа становятся очевидными. Действительно, отрезок MN можно заменить подходящей дугой окружности с центром, лежащим на прямой OA. Тогда для построения надо провести всего три прямые и одну окружность.

Сравнение явно не в пользу первого способа, где по ходу построения надо проводить перпендикуляры или делить отрезок пополам, что требует проведения дополнительных прямых и окружностей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Фото П. М. Юрьева.

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

— Учреждён Московским комитетом образования, префектурой Центрального административного округа Москвы, Отделением математики РАН, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН, Московским государственным унвиреситетом им. М. В. Ломоносова, Независимым Московским университетом.

— Ставит своей целью сохранение и развитие традиций математического образования в Москве, организацию и поддержку различных форм внеклассной работы со школьниками, методическую помощь руководителям кружков и преподавателям классов с углублённым изучением математики.

— Является некоммерческой организацией и не стремится к извлечению прибыли. Обучение школьников, студентов, аспирантов и преподавателей средней школы в рамках программ МЦНМО является бесплатным.

— Совместно с МИОО организует курсы повышения квалификации московских учителей математики.

— Организует математические и физические кружки, конкурсы, олимпиады и турниры для школьников, участвует в организации классов с углублённым изучением математики.

— Осуществляет информационную поддержку большинства московских олимпиад для школьников, информация о них представлена на сервере МЦНМО http://www.mccme.ru/olympiads

ISBN 978-5-94057-448-4

Адрес МЦНМО: 119002, Москва,
Бол. Власьевский пер., 11.
Телефон для справок: (499) 241 05 00.