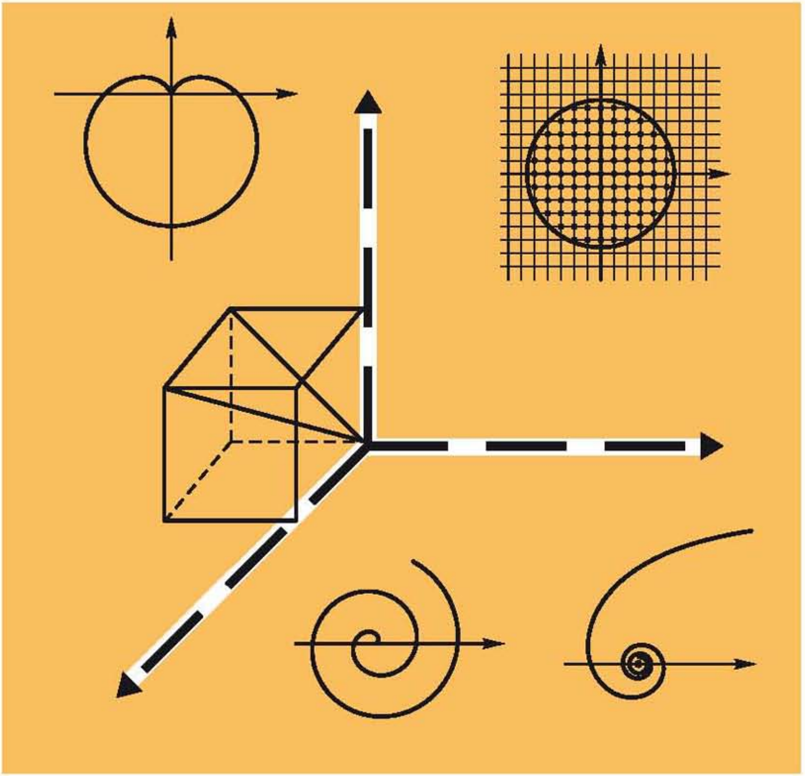
И. М. Гельфанд
Е. Г. Глаголева
А. А. Кириллов

Метод координат



БИБЛИОТЕЧКА ЗАОЧНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

И. М. Гельфанд

Е. Г. Глаголева А. А. Кириллов

МЕТОД КООРДИНАТ

Издание седьмое, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 514.122+37.018.43
ББК 22.1
Г32

Гельфанд И. М., Глаголева Е. Г., Кириллов А. А.
Г32 Метод координат. — 7-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2009. — 184 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-533-7

Книга «Метод координат» является пособием для обучения школьников, проявляющих интерес к математике.

Изложение идет от простейших, знакомых даже младшим школьникам вещей (координаты точки на прямой) и доходит до понятия о четырехмерном пространстве и его свойствах.

Книга содержит большое количество задач разного уровня сложности. Она рассчитана прежде всего на учеников ОЛ ВЗМШ и других заочных математических школ, но будет полезна учителям средних и старших классов при проведении факультативов и в работе на уроках. Простота и ясность изложения делают книгу доступной для всех желающих самостоятельно заниматься математикой.

Предыдущее издание книги вышло в 2007 г.

ББК 22.1

Израиль Моисеевич Гельфанд
Елена Георгиевна Глаголева
Александр Александрович Кириллов

МЕТОД КООРДИНАТ

Редактор Ж. М. Раббот

Подписано в печать 20.07.2009 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография „САРМА“».

ISBN 978-5-94057-533-7

К читателю

Эта книга была написана более 40 лет тому назад — первое издание вышло в свет в сентябре 1964 года. «Метод координат» был первой книгой в серии для школьников, которая была предназначена для учеников Заочной математической школы (теперь ВЗМШ), открывшейся в мае того же года.

В то время — в середине 60-х годов — начали возникать первые математические спецклассы и спецшколы, были открыты школы-интернаты в Москве, Ленинграде и нескольких других крупных городах.

Среди спецклассов и спецшкол были действительно замечательные, но их было очень мало и, главное, они были доступны только немногочисленным «счастливчикам» — школьникам из крупных городов, да еще и не всяких: ведь не везде есть достаточно учителей, которые могли бы показать школьникам, как замечательно интересна, красива и естественна математика.

Заочная школа, по замыслу ее создателей, и должна была хотя бы отчасти скомпенсировать эту несправедливость и дать реальную возможность способным и интересующимся математикой ребятам получать систематическую квалифицированную помощь в углубленных занятиях.

Что же это такое — Заочная математическая школа?

Дадим слово основателю и руководителю ЗМШ Израилю Моисеевичу Гельфанду, одному из крупнейших математиков современности:

«Идея помочь способным и интересующимся математикой ребятам с разных концов нашей страны, живущим часто в местах, где нет возможности получить квалифицированную помощь, была мне особенно близка: я сам те годы, когда я сложился как математик, провел в глухой провинции, где, кроме двух-трех книг и доброго отношения учителей, не имел другой поддержки. Единственные книжки по математике я мог достать только у своего учителя, которому я по сей день чувствую себя обязанным. Я понимаю, как трудно работать в таких условиях и сколько мы теряем из-за этого по-настоящему талантливых людей.

Я считаю, что серьезные и интересующиеся математикой школьники есть не только в крупных городах, а потребность в людях способных и дельных настолько велика, что несколько интернатов не смогут ее удовлетворить.

Поэтому в 1963 году я предложил своему большому другу Ивану Георгиевичу Петровскому, ректору МГУ, организовать при его помощи Заочную математическую школу.

Работу Заочной школы мы старались организовать так, чтобы найти в разных, часто очень отдаленных, местах страны побольше школьников, интересующихся математикой, и научить их серьезно заниматься, помочь подняться на высокий уровень.

Принятым в Заочную школу посылались книги, написанные специально для них, и задания по ним. Ученики, со своей стороны, решали задачи и присылали в школу свои решения. Если кто-то не смог решить задачу или сделал ошибку, его личный учитель помогал ему, но не писал просто правильное решение, а давал такие „подсказки“, чтобы он смог самостоятельно исправить свою работу.

В конце концов большинство учащихся Заочной школы научаются справляться с заданиями. При этом они привыкают не „отбалтываться“, а по-настоящему работать: ведь выполнение заданий требует серьезного труда, а за три года учащиеся должны были выполнить 20—25 таких заданий [1)].

Для работы Заочной школы очень важно писать хорошие книжки. Первые книги для Заочной школы я написал сам со своими учениками и коллегами — одну из них вы держите сейчас в руках. Эти книги были очень популярны и разошлись в сотнях тысяч экземпляров. Вероятно, причиной такого успеха было то, что они были пригодны для самостоятельного изучения и были доступны учащимся.

Мы не рассчитывали на то, что учащиеся, которые окончат нашу Заочную школу, обязательно выберут математику для своей будущей деятельности. Тем не менее, независимо от их дальнейшего выбора, результаты такого обучения останутся с ними. Главное — это будет их первой попыткой суметь сделать что-то самим, полностью самостоятельно.

И я считаю, что надо не столько растить чемпионов, как в большом спорте, сколько заниматься повышением общей культуры. В этом отношении я не спортивный тренер, а скорее физкультурный врач, и считаю, что наиболее важной вещью, которую учащиеся могут получить от занятий математикой, является достижение высокого интеллектуального уровня».

[1)] Как сейчас работает ВЗМШ и как в нее поступить, вы можете прочесть, например, в последнем номере журнала «Квант» (`http://kvant.mccme.ru/`) за каждый год.

Это были выдержки из выступления И. М. Гельфанда перед учителями — участниками работы Заочной школы, в котором он высказал свои взгляды на цель создания ВЗМШ и основные принципы ее работы.

До сих пор мы стараемся им следовать.

Методическая комиссия
математического отделения ВЗМШ

Предисловие

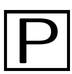
Для чтения и понимания этой книги не требуется никаких специальных знаний, выходящих за рамки школьной программы. И даже более того: многое известное школьникам здесь объясняется еще раз (например, понятие абсолютной величины числа, простейшие примеры решения неравенств и др.).

Однако книга написана не для легкого чтения, а для серьезного изучения. Поэтому, чтобы понять ее, нужно терпеливо работать над текстом и, главное, над задачами и упражнениями, которых в книге много.

Все задачи, которые даны в тексте с решениями (они нумеруются арабскими и римскими цифрами, обозначающими параграф и порядковый номер задачи), нужно обязательно разобрать, так как их результаты будут использоваться в дальнейшем.

Большую роль играют рисунки. Большинство из них помогают лучше понять текст, некоторые подсказывают решение, содержат поясняющие примеры, ответы к упражнениям.

Чтобы облегчить вам путь по книге, мы помещаем на полях «дорожные знаки» [1]. При чтении обращайте на них внимание.



Знаком «Стоянка» отмечены места, содержащие сведения, необходимые для понимания дальнейшего: определения, формулы и т. д. Около такого знака надо остановиться, прочитать это место несколько раз и обязательно запомнить.

Знак «Крутой подъем» стоит там, где содержится более трудный материал. Если это мелкий шрифт, то при первом чтении это место можно пропустить.

Особенно внимательны будьте около знака «Опасный поворот». Часто он стоит на таком месте, где на первый взгляд все кажется легким и простым. Однако если здесь как следует не разобраться, это может привести к серьезным ошибкам в дальнейшем.

Кроме «дорожных знаков», есть еще два значка. Один — знак «⊠» — стоит около задач, к которым есть ответы, подсказки и т. п. в соответствующем разделе в конце книги. Другой знак — $\oplus$ с номером (например, $\oplus 7$) — означает, что к этому месту текста имеются примечания или дополнения в разделе «Дополнения, примечания

[1] «Дорожные знаки» предложил редактор первого издания книги профессор МГУ Б. В. Шабат.

и комментарии», а число рядом — это порядковый номер этого материала в разделе.

Желаем вам успешных занятий!

Предисловие к шестому изданию

Предыдущее издание «Метода координат» вышло в 1973 г. С тех пор сильно изменились условия обучения в Заочной школе, расширился круг читателей книги. В связи с этим в новое издание были внесены довольно объемные дополнения.

В главу I был включен написанный по указанию И. М. Гельфанда параграф о делении отрезка в данном отношении. Этот параграф отмечен звездочкой как дополнительный.

В главе II расширен параграф о прямой на плоскости (в частности, рассмотрен вопрос о перпендикулярности прямых, что сделало возможным более доступное изложение параграфа 10). Дополнительный параграф 11 (о других системах координат) расширен, в основном за счет задач (в предыдущих изданиях их не было совсем).

В главу III включен материал о прямых и плоскостях в пространстве (частично этот материал отмечен как дополнительный).

Текст главы IV изменен только за счет мелких редакционных поправок. Список задач, включенных в ее текст, не изменился.

В целом в книге значительно увеличено число задач. Чтобы не перегружать основной текст, некоторое число их перенесено в отдельный параграф (§ 20 «Разные задачи»).

Добавлены также разделы «Дополнения, примечания и комментарии» и, наконец, «Ответы, решения и указания».

Следует заметить, что основной целью переработки и дополнения книги являлось приведение ее в соответствие изменившимся за 40 лет потребностям Заочной школы. Поэтому, а главное, потому, что в этой работе, к сожалению, не принимали участие И. М. Гельфанд и А. А. Кириллов, книга потеряла в компактности, стройности, изящности, которые всегда отмечали читатели предыдущих изданий. Вина за это и за другие недостатки лежит, безусловно, на мне, и я буду очень благодарна за все замечания и предложения, которые выскажут читатели.

Пользуюсь случаем поблагодарить Е. М. Раббота, Н. Е. Сохор и А. Марачева, которые помогли мне подготовить это издание.

Е. Г. Глаголева

Вступление

Метод координат — это способ перевода геометрических образов в формулы (тогда как в другом выпуске серии — «Функции и графики» — рассказывается, как переводить формулы в рисунки).

Этот метод был придуман выдающимся французским философом и математиком Рене Декартом более 350 лет назад. Это было великое открытие, оказавшее огромное влияние не только на математику, но и на другие науки. В наши дни метод координат используется повсеместно. Например, в компьютере или телевизоре при передаче рисунка из одного места в другое используется преобразование визуальной информации в цифровую и наоборот.

Прежде всего мы познакомимся с методом координат как со способом определять положение точки или фигуры с помощью чисел или каких-нибудь символов.

Числа, задающие положение точки, называются *координатами* точки.

Хорошо известные вам географические координаты позволяют найти положение точки на поверхности Земли — каждая точка на земной поверхности имеет две координаты: широту и долготу.

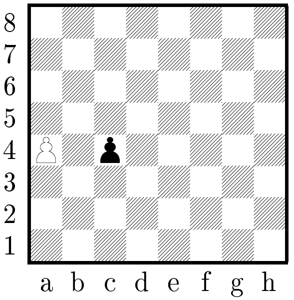
Чтобы определить положение точки в пространстве, нужны уже не два числа, а три. Например, чтобы найти положение спутника, нужно знать его высоту над поверхностью Земли, а также широту и долготу точки, над которой он находится.

Если же известна траектория спутника, т. е. линия, по которой он движется, то, чтобы определить положение спутника на этой линии, достаточно указать одно число, например расстояние, пройденное спутником от некоторой точки траектории.

Точно так же для определения положения точки на линии железной дороги указывают номер километрового столба. Этот номер и является координатой точки на железнодорожной линии. Например, в названии «Платформа 42-й километр» число 42 — это координата станции.

Иногда говорят, что линия имеет одно измерение, поверхность — два измерения, а пространство — три. При этом под числом измерений линии, поверхности или пространства понимают число координат, определяющих положение точки на них.

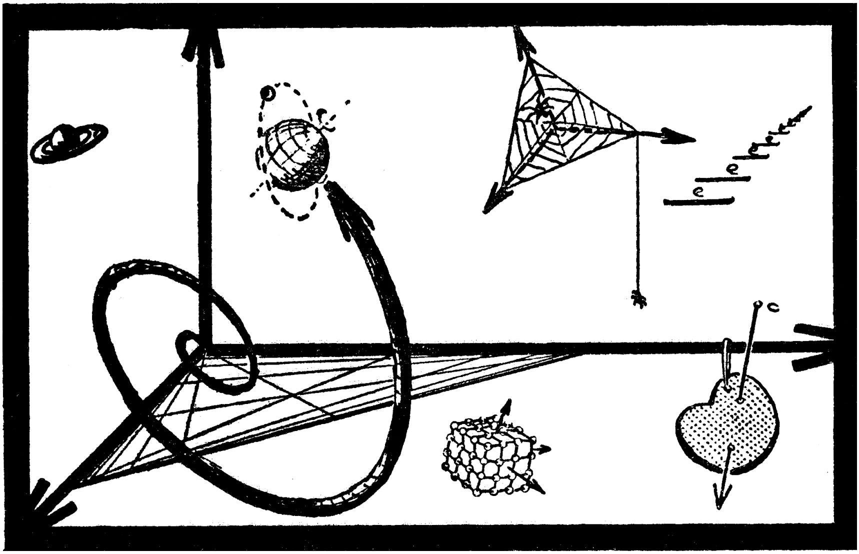
Своеобразные координаты используются в шахматах, где положение фигуры на доске определяется с помощью буквы и числа. Вертикальные ряды клеток обозначаются буквами латинского алфавита, горизонтальные ряды — цифрами. Каждой клетке доски соответствует буква, указывающая вертикальный ряд, в котором стоит клетка, и цифра, указывающая горизонтальный ряд. На нашем рисунке белая пешка стоит на клетке a4, черная — на c4. Таким образом, a4 можно считать координатами белой пешки, c4 — координатами черной.



Применение координат в шахматах позволяет играть в шахматы по переписке. Чтобы сообщить ход, не нужно рисовать доску и расположение фигур. Достаточно, например, сказать: «Гроссмейстер сыграл e2—e4», и всем уже известно, как начата партия.

Координаты, применяемые в математике, позволяют определить с помощью чисел положение любой точки пространства, или плоскости, или линии. Это дает возможность «шифровать» различного рода фигуры, записывать их при помощи чисел.

Особенно важен метод координат тем, что он позволяет применять современные вычислительные машины не только к различного рода расчетам, но и к решению геометрических задач, к исследованию любых геометрических объектов и соотношений.



Глава I. Координаты на прямой

Знакомство с координатами мы начнем с разбора самого простого случая: с определения положения точки на прямой.

§ 1. Числовая ось

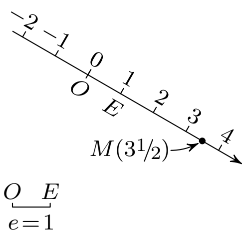


Рис. 1.1

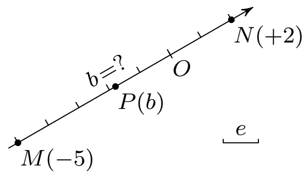
Чтобы можно было определять положение точки на прямой, на этой прямой задают *систему координат*: выбирают *начало отсчета* — некоторую точку (на рис. 1.1 — точка O), *направление*, которое будет считаться положительным (на рис. 1.1 указано стрелкой на прямой), и *единицу измерения* (отрезок OE на рис. 1.1).

P

Прямая, на которой указаны начало координат, единица измерения и положительное направление, называется *координатной прямой* или *числовой осью*.

Как правило, координатную прямую располагают горизонтально и положительным считают направление слева направо.

Для определения положения точки на числовой оси достаточно назвать одно число, например $+2$. Это будет означать, что соответствующая точка N лежит на расстоянии 2 единиц от начала координат в положительном направлении. Если мы укажем отрицательное число, например -5, то соответствующая точка M будет лежать на расстоянии пяти единиц от начала координат в отрицательном направлении (рис. 1.2).



Нарисуйте точку $A(-3)$

Рис. 1.2

Число, определяющее положение точки на числовой оси, называется *координатой* точки на этой оси.

Координата точки на числовой оси равна расстоянию от точки до начала координат, выраженному в выбранных единицах и взятому со знаком плюс, если точка лежит в положительном направлении от начала, и со знаком минус в противном случае. Координата начала координат (точки O) равна нулю.

Употребляют обозначения $M(-5)$, $K(2{,}5)$, $P(b)$ и т. д. Первое из них обозначает точку M с координатой минус пять, второе — точку K с координатой 2,5, третье — точку P с координатой b. Часто говорят коротко: «точка минус пять», «точка b» и т. д.

Таким образом, мы установили соответствие между точками прямой линии и числами. При этом получается, что каждой точке прямой соответствует одно определенное число — ее координата, и каждое число соответствует одной определенной точке. Такое соответствие называется *взаимно однозначным.*

На первый взгляд это кажется совсем простым — установить взаимно однозначное соответстствие между точками прямой и числами. Однако, когда математики задумались над этим, то оказалось, что для выяснения точного смысла слов, входящих в эту фразу, нужно создать большую и сложную теорию. Так, сразу же возникают два «простых» вопроса, на которые следует ответить: что такое число и что следует понимать под точкой?

Эти вопросы относятся к так называемым
$\oplus 1$ основаниям геометрии и к аксиоматике чисел.

Установленное с помощью координат соответствие между числами и точками позволяет видеть за числовыми соотношениями геометрические образы и наоборот.

Проверьте себя: если вы все правильно поняли, то без труда справитесь с этими упражнениями. Если же упражнения у вас не получаются, это значит, что вы что-то пропустили или что-то осталось неясным. Тогда вернитесь и перечитайте этот текст.

Для выполнения первой группы упражнений не нужны никакие правила и формулы. Старайтесь выполнять их, как можно чаще обращаясь к наглядному образу числовой прямой.

1-1. Отметьте на числовой оси точки $A(-2)$, $B\left(\frac{13}{3}\right)$, $C(0)$.

1-2. Некоторая точка K находится от точки $M(2)$ на расстоянии трех единиц. Чему равна координата этой точки K? ⊠[1]

1-3. Чему равны расстояния между точками:

а) $P(5)$ и $Q(3)$; б) $S(-5)$ и $R(-3)$; в) $P(5)$ и $R(-3)$; г) $Q(3)$ и $S(-5)$?

1-4. Нарисуйте на числовой оси точки $A(-5)$ и $B(7)$. Найдите координату середины отрезка AB.

1-5. Не рисуя точек на числовой оси, скажите, какая из двух точек правее:

а) $A(3)$ или $B(-4)$?

---

[1] Напоминаем, что значок ⊠ означает, что к этому упражнению имеется ответ (или замечание, подсказка и проч.) в разделе «Ответы, замечания...» — см. с. 171.

б) $A(3)$ или $C(4)$?

в) $D(-3)$ или $C(4)$?

г) $D(-3)$ или $B(-4)$?

д) $U(-3{,}5)$ или $V(-4)$?

е) $M\left(1\dfrac{1}{9}\right)$ или $N\left(1\dfrac{1}{8}\right)$?

ж) $L(0{,}1001)$ или $K(0{,}0999)$?

з) $P\left(\dfrac{10}{9}\right)$ или $Q\left(\dfrac{11}{10}\right)$? $\boxtimes$

и) $R\left(\dfrac{1001}{1002}\right)$ или $S\left(\dfrac{1002}{1003}\right)$?

Следующая порция упражнений — чуть посложнее, потому что их условия содержат не только числовые, но и буквенные данные, т. е. параметры. При решении таких задач в случае затруднений полезно использовать примеры, подставляя вместо букв различные числа: положительные, отрицательные, большие единицы, меньшие единицы и т. д. (не забывайте про нуль!).

Например, возьмем такой вопрос: какая из двух точек правее: $A(a)$ или $B(-a)$?

Однозначного ответа на этот вопрос дать нельзя. Действительно, если, например, $a = 3$, то A правее B. А что будет, если $a = -3$? Ведь тогда получатся такие две точки: $A(-3)$ и $B(-(-3))$, т. е. $B(+3)$, и $B(+3)$ окажется правее $A(-3)$! А если $a = 0$?

Как отвечать на такие вопросы, показано в «Ответах» на примере упражнения 1-6, а).

1-6. Подумайте, какая из двух точек правее:

а) $M(x)$ или $N(2x)$; $\boxtimes$

б) $A(c)$ или $B(c+2)$;

в) $A(x)$ или $B(x^2)$;

г) $A(x)$ или $B(x-a)$;

д) $A(x)$ или $B(-3x)$;

е) $A(x+a)$ или $B(x+2a)$.

1-7. Множества точек числовой прямой задаются следующими соотношениями:

а) $x < 2$; б) $x \leqslant 5$;

в) $2 < x < 5$; г) $-3 \leqslant x$;

д) $-5 < x \leqslant 1$; ⊠ е) $x - 3 < 5$;
ж) $x^2 \geqslant 4$; з) $1 > x^2$.

1) Отметьте на числовой прямой эти множества.

2) Опишите их.

В задаче 1-7 требовалось «перевести» алгебраические соотношения в геометрические образы, т. е. перейти с языка чисел на геометрический. Теперь решите обратную задачу: «словесно-геометрическое» описание множеств замените алгебраическими соотношениями.

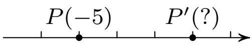


Рис. 1.3

1-8. На прямой взяты точки $A(3)$ и $B(-5)$.

1) Придумайте соотношения, определяющие множества точек а)—е):

а) луч AB, включая начало;

б) луч BA, исключая начало;

в) луч, дополнительный к лучу AB;

г) отрезок AB, включая концы;

д) отрезок AB без концов;

е) отрезок AB без левого конца.

2) Изобразите эти множества на числовой оси.

1-9. Точка $M(2)$ сдвинулась по оси на -3, т. е. на 3 единицы в отрицательном направлении. Какой стала координата точки M?

1-10. Точка $P(-5)$ сдвинулась на $+3$, т. е. на три единицы в положительном направлении. Какой стала координата точки P (рис. 1.3)?

1-11. Точка A' получена из точки $A(a)$ сдвигом на b, см. рис. 1.4, а) и б).

1) Какова координата точки A'?

2) Чему равняется расстояние между A и A'?

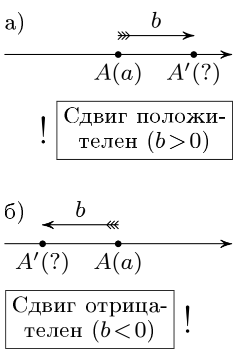


Рис. 1.4

§ 2. Абсолютная величина числа

Зная координату точки, можно легко определить расстояние от этой точки до начала координат. Например, расстояние от точки $A(5)$ до начала координат равно 5; расстояние от точки $M(-7)$ до начала координат равно $-(-7)$, т. е. $+7$ (рис. 2.1).

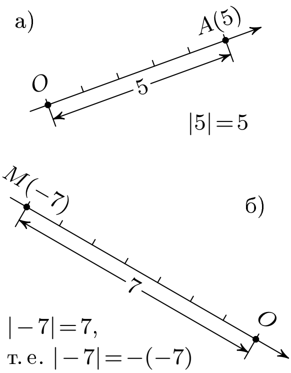


Рис. 2.1

Расстояние между какими-либо двумя точками иногда обозначают греческой буквой ρ («ро»). Например, $\rho(A; B)$ — расстояние между точками A и B; $\rho(O; M)$ — расстояние между точками O и M, и т. д.

В случае, когда точки A и B различны, расстояние между ними — это все равно что длина отрезка AB. Поэтому наряду с обозначением $\rho(A; B)$ употребляют и обозначение $|AB|$.

Расстояние между двумя точками M и N, как и длина отрезка MN, выражается положительным числом. В крайнем случае, когда точки M и N сливаются в одну и отрезок превращается в точку (математики обычно говорят «вырождается в точку»), считается, что расстояние равно нулю.

Попробуем получить общее правило для нахождения расстояния от точки $M(a)$ до начала координат O, т. е. решим такую задачу.

З а д а ч а 2-I. Чему равно расстояние от точки M до начала координат, если координата точки M равна a?

Р е ш е н и е. Вспомним определение координаты точки на прямой.

Координата точки на числовой оси равна расстоянию от точки до начала координат, если точка лежит в положительном направлении от начала координат O, и расстоянию от точки до начала координат O, взятому со знаком минус, если точка лежит в отрицательном направлении. Координата начала координат (точки O) равна нулю.

Отсюда следует, что:

• если a — положительное число, то расстояние от точки $M(a)$ до начала координат равно a, т. е. координате этой точки;

• если a — отрицательное число, то, чтобы найти расстояние от точки $M(a)$ до начала координат, надо у о т р и ц а т е л ь н о й координаты a поменять знак, и мы получим положительное число $-a$;

• если же a равно нулю, т. е. точка M совпадает с началом координат, то расстояние от точки M до начала координат равно нулю.

Получаем, что

$$\rho(O;\ M) = |OM| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \\ 0 & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Сравним этот результат с известным вам определением *абсолютной величины*, или *модуля*, числа a:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{при } a > 0, \\ -a & \text{при } a < 0, \\ 0 & \text{при } a = 0. \end{cases}$$

Теперь мы можем записать ответ к нашей задаче.

Ответ. Расстояние $|OM|$ от точки $M(a)$ до начала координат O равно модулю числа a — координаты этой точки M:

$$\rho(O;\ M) = |OM| = |a|,$$

где a — координата точки M.

P

Отсюда следует важный вывод.

Абсолютная величина числа $|a|$ геометрически может быть истолкована как расстояние от точки M с координатой a до начала координат.

Перейдем к упражнениям.

Первую серию упражнений можно выполнить в уме. Самое важное при этом — помнить, что под знаком модуля может стоять любое число (положительное, отрицательное, нуль), но во всех этих случаях сам модуль — число неотрицательное.

Оглавление