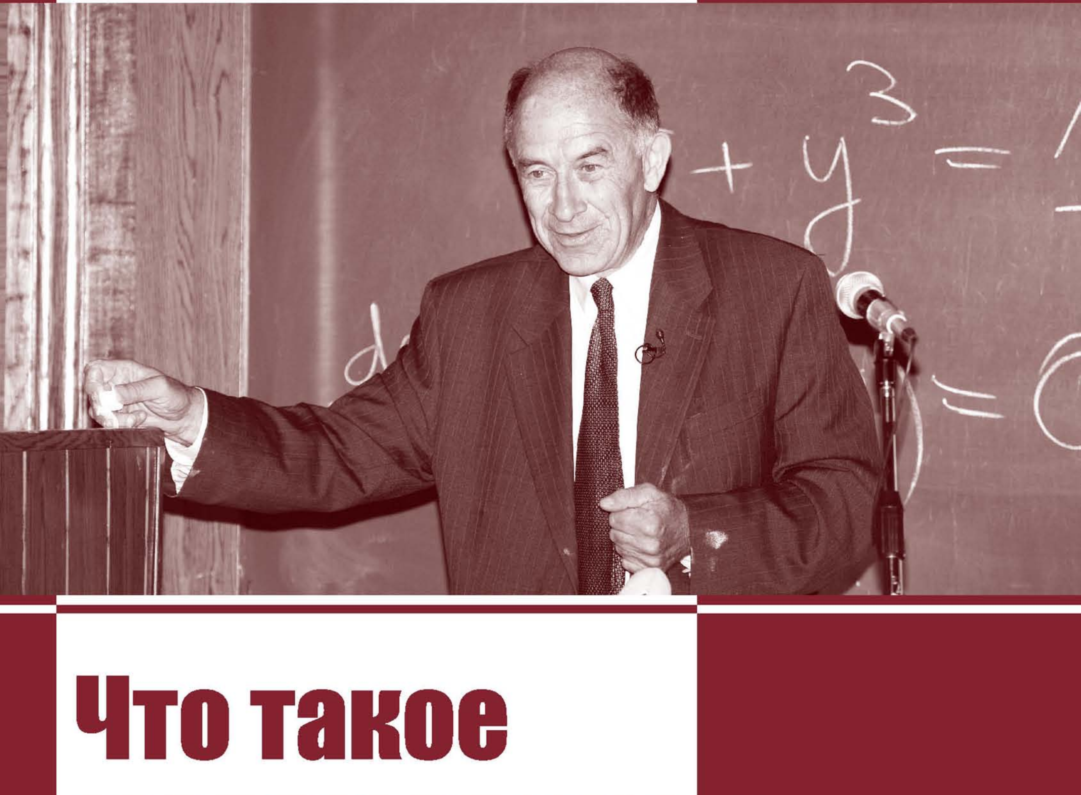
В. И. Арнольд



Что такое МАТЕМАТИКА?

В. И. Арнольд

Что такое математика?

Четвертое издание,
стереотипное

ИЗДАТЕЛЬСТВО МЦНМО
2012

УДК 51(07)
ББК 22.1
А84

Арнольд В. И.

А84 Что такое математика? — 4-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2012. — 108 с. — ISBN 978-5-94057-931-1

ББК 22.1

Предыдущее издание вышло в 2011 г.

Владимир Игоревич Арнольд

ЧТО ТАКОЕ МАТЕМАТИКА?

Подписано в печать 5.12.2011 г. Формат 60×90/16. Гарнитура ITC Charter.
Печать офсетная. Печ. л. 6,75. Тираж 2000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499) 241-74-83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, Борисовская ул., 14.

ISBN 978-5-94057-931-1

Вопрос о том, является ли математика «перечислением следствий из произвольных аксиом» или же ветвью естествознания и теоретической физики, много обсуждался уже со времен Гильберта (придерживавшегося, вслед за Декартом и предвосхищая Бурбаки, первого мнения) и Пуанкаре (основателя современной математики, топологии и теории хаоса и динамических систем).

Я буду говорить в основном о содержательных примерах, показывающих кардинальные различия точек зрения аксиомофилов и естествоиспытателей уже на столь фундаментальные понятия, как производные и пределы, теоремы существования и единственности, оптимизация и теория управления, как неразрешимость одних проблем и измерение сложности других.

Исходным пунктом для меня послужила дискуссия между Я. Б. Зельдовичем и Л. С. Понтрягиным о преподавании математики и сообщение лунного баллистика М. Л. Лидова о невозможности плавного причаливания корабля к пристани — с одной стороны, а с другой — ошибки в книгах Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» и И. М. Гельфанда, Е. Г. Глаголевой и Э. Э. Шноля «Функции и графики».

Считая, что ошибки составляют не менее важную часть математики, чем доказательства, я надеюсь рассказать также о причинах невозможности обойтись при геометрических построениях одной линейкой без циркуля, о малоизвестных взаимоотношениях Лобачевского и Евклида с постулатом о параллельных, о связи теоремы Абеля (о неразрешимости общего уравнения пятой степени в радикалах) с топологией римановых поверхностей и с его же теорией интегрирования в элементарных функциях, а также о математических открытиях Плутарха и А. Д. Сахарова.

В 1949 г. математику в СССР хотели уничтожить, вероятно, вследствие распространения мнения (Г. Харди, идеи которого впоследствии развил Ю. Манин, и других «математиков»), будто основным достоинством математики является ее «полная бесполезность». Огорчительно, конечно, что с этим снобистским мнением еще приходится бороться и сегодня, но я надеюсь ему, по мере сил, противостоять (см. ниже § 2 о мракобесии в математике).

§1. Математика и физика

Слово «математика» означает «точное знание». Варварские народы, не склонные к таковому, не имели и соответствующего слова в языке, поэтому сейчас почти во всех языках используется непонятный греческий термин. Исключение составляет лишь голландский язык, где Стевин уже в XVII в. боролся с засорением терминологии иноязычными «сайтами» и «файлами», «баксами» и «киллерами», и настаивал на переводе всех терминов словами родного языка, так что их термин — «вискунде», «знание», приближает уже для детей математику к реальному миру.

Когда Я. Б. Зельдович, замечательный физик-теоретик и один из основателей российской ядерной мощи, выпустил в свет свою «*Высшую математику для начинающих физиков и техников*», она вызвала страшный гнев тогдашнего цензора математической литературы, академика-математика Л. С. Понтрягина.

Он справедливо указал, что Зельдович определял в своей книге производную функции как «*величину* отношения приращения функции к приращению аргумента, в предположении, что последнее мало».

Математик был возмущен полным исключением здесь понятий теории пределов, а тем самым и значительной части логического обоснования математического анализа, достигшего совершенства лишь к концу девятнадцатого века, с созданием последовательной теории математического континуума действительных чисел.

Зельдович ответил так: интересует нас всегда именно отношение *конечных* приращений, а вовсе не какой-то абстрактно-математический предел.

Делать приращение аргумента — скажем, координаты точки или момента времени — меньшим, чем, скажем, 10^{-10} или 10^{-30} (при разумных единицах измерения), — это «явное превышение точности модели, так как *структура физического пространства (или времени) на столь малых интервалах уже вовсе не соответствует математической модели теории вещественных чисел (вследствие квантовых феноменов)*».

«Дело, — продолжал Зельдович, — просто в том, что находить интересующие нас отношения конечных приращений трудно, поэтому и придуманы приближенные *асимптотические формулы* для них. Эти-то приближенные формулы математики и называют своими пределами и математическими производными. В любом реальном применении теории следует учитывать, меньше чего не следует делать приращения, чтобы результаты теории соответствовали эксперименту».

Длительная дискуссия закончилась тем, что Понтрягин написал свой учебник начал анализа. Он указал уже во введении к нему, что *некоторые физики считают возможным изучать и применять анализ, не восходя до его полного логического обоснования, и что «автор настоящего учебника... с ними согласен»*.

Прочитав эти строки, Зельдович сказал мне: «В таких случаях *цитируют*, с указанием *имени*, а так это — прямо *плагиат*!»

Эта дискуссия о математической строгости оснований науки вспомнилась мне, когда мой близкий друг, занимавшийся рассчитыванием траекторий спутников и космических кораблей, М. Л. Лидов, стал спорить со мной по поводу моего курса теории дифференциальных уравнений (он читал в МГУ в это же время лекции о спутниковой баллистике, и мы нередко обсуждали с ним то и другое, особенно потому, что я тогда тоже много занимался небесной механикой).

«Как и все математики, — сказал мне Миша, — ты учишь студентов теореме единственности, согласно которой *интегральные кривые обыкновенных дифференциальных уравнений не пересекаются*. Но это утверждение (хотя вы его и доказываете безукоризненно правильно) совершенно неверно. Например, уравнение $dx/dt=-x$ имеет решения $x=0$ и $x=e^{-t}$. Интегральные кривые — графики этих двух решений — любой компьютер прекрасно нарисует, и ты увидишь, что они совершенно явно пересекаются.

Ибо, например, при $t=10$ между этими двумя интегральными кривыми не просунешь и атома. Так что *теорема единственности — это математическая фикция, имеющая мало отношения к реальному миру*».

После этого собеседник объяснил мне, что именно из-за описанного эффекта при каждом причаливании корабля к пристани в последний момент матрос бросает на пристань чалку, которую там быстро наматывают на кнехт (часто это делает, спрыгнув на пристань, тот же матрос), после чего *заключительная часть причаливания происходит вручную*, путем вытягивания чалки.

Объясняется все это так. Автоматическое причаливание, в соответствии с общими принципами теории управления, основано на *обратной связи*: наблюдая оставшееся до причала расстояние x, управление выбирают так, чтобы скорость причаливания плавно уменьшать до нуля (как функцию от x). Естественно, эта функция — гладкая, т. е. при малых расстояниях x скорость будет убывать с x приблизительно линейно.

По обсуждавшейся выше теореме единственности, *время причаливания будет бесконечным при любом таком механизме гладкой обратной связи*. Чтобы причалить за *конечное* время, нужно либо отказаться от принципа регулирования (с гладкой обратной связью), заменив управление скоростью корабля работой матроса с чалкой, либо согласиться на *удар* корабля о причал в заключительной стадии причаливания (для чего и обвешивают край пристани отслужившими автомобильными покрышками).

То, что все это никогда не обсуждается математиками ни в курсах теории динамических систем и дифференциальных уравнений, ни в теории управления и оптимизации, — это, конечно, прискорбное последствие длительного отрыва математиков от реального мира, от физики и техники, в своеобразную башню из слоновой кости аксиоматической науки.

М. Л. Лидов понял все рассказанное не в рамках аксиоматизированной науки (которую он прекрасно знал), а потому, что занимался расчетом посадки космических кораблей на Луну, где встречается та же проблема, что и с кораблями у пристани. Из-за работающей здесь против нас теоремы единственности космические станции, спускаемые на Луну или планеты, снабжены демпфирующими треногами с суставами, и некоторое время они должны при посадке попрыгать на этих треногах, пока непогашенная энергия не будет диссипирована в процессе изгибания колен ног треноги.

Не ограничиваясь одной критикой, приведу еще пример огромной пользы четкого математического подхода к реальности из другой работы Лидова.

Луна движется вокруг Земли по орбите, почти находящейся в плоскости эклиптики (т. е. в плоскости орбиты Земли вокруг Солнца). Знаменитая «*теорема Лапласа об устойчивости Солнечной системы*» говорит, что если наклонение орбиты Луны к плоскости эклиптики невелико, то, несмотря на возмущающее влияние Солнца, лунная орбита будет лишь слегка колебаться (отчего и происходят затмения), но не будет меняться систематически (падать на Землю или уходить от нее).

Лидов поставил себе вопрос, что было бы, если бы первоначальная орбита Луны была *сильно наклонена* к плоскости эклиптики — скажем, образуя с ней угол в 80 градусов (оставаясь на нынешнем расстоянии от Земли).

Конечно, настоящую Луну перегнать на такую орбиту невозможно. Но искусственный спутник можно запустить и на такую орбиту, перпендикулярную плоскости эклиптики. И вопрос об эволюции этой орбиты (под влиянием притяжения Солнца) — вполне реальный для будущего спутника.

Результат Лидова оказался совершенно поразительным: *такая «псевдолуна» свалилась бы на Землю уже через четыре (примерно) года*! Так что запускать такой спутник не стоит.

Причиной падения оказывается не уменьшение радиуса орбиты (среднего расстояния спутника до центра Земли), а сжатие малой оси эллипса, вдоль которого движется спутник, т. е. увеличение его эксцентриситета. Даже если исходная орбита псевдолуны была с большой точностью круговой, то возмущения быстро превратят ее в эллипс (с уменьшающейся со временем малой осью). Хотя большая ось этого эллипса и сохраняет (как указывал Лаплас) свою длину, равную диаметру невозмущенной орбиты (т. е. диаметру орбиты настоящей Луны), увеличение эксцентриситета со временем сделает этот узкий эллипс в конце концов похожим на всего лишь (проходимый туда и обратно) *отрезок*.

Вследствие этой сильной эксцентричности орбиты псевдолуны эта орбита начнет пересекать Землю, так что такая псевдолуна упадет на Землю, хотя *среднее* за период обращения ее расстояние от центра Земли и останется равным такому же среднему для настоящей Луны (даже и в самый момент падения).

Несколько слов о разнице взглядов физиков и математиков на характер нашей общей науки. К концу второго тысячелетия нашей эры журнал «Успехи физических наук» выпустил юбилейный номер и заказал мне для этого номера обзор «Математика и физика» (две другие математические статьи в том же номере журнала написаны К. Вейерштрассом и К. Якоби). Меня поразило то, что редакция выбросила из моей статьи два четких доказательства резкого различия между подходами математиков и физиков к понятию истины: одно из этих доказательств содержалось в эпиграфе, бывшем цитатой из книги Э. Шрёдингера по статистической термодинамике, а другое — в задаче для дошкольников.

Вот эти, видимо непонятые редакцией, места. Эпиграфов у меня было два: первый (сохранившийся) — высказывание Стендаля: «*Из всех наук я больше всего люблю математику, так как в этой науке совершенно невозможно лицемерие, которое я больше всего ненавижу*». Видимо, Стендалю нравилось то, что в математике, если уж однажды сосчитано, что шестью семь — сорок два, то так оно и останется навсегда: истина окончательна и неоспорима.

Шрёдингер же пишет: «*Положим величину альфа равной нулю, хотя, во-первых, альфа равной нулю быть не может, а во-вторых, ее обращение* *в нуль противоречило бы основам квантовой механики*». Видимо, физики предпочитают не афишировать столь явно свое постоянное лицемерие, с его двусмысленностью терминологии и с внутренними логическими противоречиями своих теорий.

Когда я пытался позже обсудить обнаружившиеся различия с главным редактором журнала, академиком В. Л. Гинзбургом, он доказал мне, что *математики вообще ничего в физике понять не могут*, при помощи формулы из своей статьи. «Вот, — сказал он, — что, по-Вашему, обозначают эти символы?»

Я думал, что понимаю, и сказал: «Индекс i встречается дважды: видимо, это означает суммирование, по соглашению Эйнштейна, так что речь идет о положительно определенной форме — сумме квадратов — не знаю только, скольких, ведь пределы изменения индекса не указаны».

«Итак, — обрадовался физик, — как и все математики, Вы ничего не понимаете. Ведь буква i — *латинская*, а не греческая. *Значит*, значений четыре: 0, 1, 2 и 3. Что же касается *суммирования*, то его тут вовсе и нет: это обозначение релятивистское, поэтому один из квадратов берется *с другим знаком, чем остальные три*!»

Мне так и не удалось убедить собеседника, что негоже обозначать вычитание знаком сложения (и что ограничение «скорость не выше 60» бессмысленно, пока не объяснено, идет ли речь о километрах в час или же о парсеках в секунду).

Но вот еще второй пример, показывающий кардинальное различие математического и физического способов постановки и понимания задачи.

В моей статье было два образца (из старых учебников). Математическая задача: «*На книжной полке рядом стоят два тома Пушкина. Страницы каждого тома составляют его толщину 2 см, а каждая обложка добавляет еще по 2 мм. Червь прогрыз от первой страницы первого тома до последней страницы второго, по нормали к страницам. Какое расстояние он прогрыз*?»

У меня был указан и неожиданный ответ: 4 миллиметра. Редакция исправила поэтому условие на «от *последней* страницы первого тома до *первой* второго». Топологическое мышление — труднее, чем можно требовать от редакции физического журнала. А любое неожиданное утверждение редакторы всегда стараются заменить привычной себе тривиальностью, хотя бы противоположной исходному утверждению.

Недавно (8 февраля 2002 г.) выпуск «Наука» газеты «Известия» заменил в моей статье о проекте реформы школьного образования мои слова «план состоит в том, чтобы *отменить* обучение всем практическим знаниям и предметам» на более привычную редактору формулу:

«план состоит в том, чтобы *отдать предпочтение* фактическим знаниям и предметам».

Возвращаясь к непонимаемым редакцией задачам, упомяну — замечательную — задачу физического стиля из старого учебника арифметики.

«Гребец плыл на лодке вверх по Неве. Под Троицким мостом у него сшибло шляпу, Поднявшись до Литейного моста, он встретил друга, который ему на это указал. Тогда гребец поплыл вниз, вслед за шляпой (с такой же, как прежде, скоростью относительно воды), и догнал ее через 20 минут, под Дворцовым мостом. Определите скорость течения Невы».

Математику ясно, что эта задача неразрешима. Но составители были лицемерами (или физиками?). Они решали ее так: «согласно принципу относительности Галилея, гребец отплывал от шляпы вверх и догонял ее вниз одинаковое время — те же 20 минут. Значит, шляпа проплыла от Троицкого моста до Дворцового за 40 минут. А *так как* расстояние между этими мостами составляет одну милю, то...».

Все физические задачники и учебники построены по этому образцу: неявно предполагаются известными какие-то расстояния между мостами или иные обстоятельства, о которых «нет нужды» говорить (это всегда напоминает мне старую статью в ДАН СССР «О фонтанирующей деятельности китов», в которой участвовала, при вычислении цилиндрического объема кита, формула, содержащая величину «пи» — *«константу, которая для гренландских китов равна трем»*).

Математическая строгость часто оказывается труднопреодолимым препятствием даже и для хороших математиков. Следующий пример заимствован из замечательной классической книги Р. Куранта и Г. Роббинса «Что такое математика?» (недавно переизданной на русском языке).

Речь идет о применении топологии. Пусть на катящейся по горизонтальному рельсовому пути платформе установлена перпендикулярно рельсам закрепленная горизонтальная ось, над которой возвышается способный вращаться вокруг этой оси «перевернутый маятник» (стержень).

Утверждается, что *каков бы ни был заданный закон движения платформы (в течение промежутка времени от нуля до единицы), начальное положение «маятника» можно выбрать так, что он в конечный момент времени не будет горизонтален* (Хасслер Уитни).

Авторы доказывают это так. Если исходное положение маятника — горизонтально лежачее, вперед по ходу, то таким оно и останется. Если же исходное положение — горизонтально лежачее, но назад по ходу, то и это сохранится.

Рассмотрим теперь произвольное начальное положение. Конечное положение определяется начальным. Эта непрерывная функция принимает оба значения «вперед» и «назад». По теореме топологии она принимает и промежуточные значения, что и требовалось доказать.

Некоторое время назад мне передали просьбу от проф. Роббинса (Курант к тому времени уже умер) постараться исправить это «ошибочное доказательство». Дело в том, что никакой непрерывной функции «конечное состояние при данном начальном состоянии» тут сразу не видно: ее нужно еще точно определить (с каким-то учетом влияния возможных ударов о платформу), и нужно *доказать* ее непрерывность. Я слышал, что американские математики, пытавшиеся всё это сделать, написали (неизвестное мне) сочинение с ошибочными промежуточными утверждениями и доказательствами, так что вопрос о «маятнике» и сегодня, видимо, остается открытым[1].

Обсуждая однажды вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, я сказал, что *математика — это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой*: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.

Один крупнейший французский математик написал мне в ответ письмо, где сказал, что, по его мнению, *математика*, напротив, *не имеет с физикой ничего общего*. Он добавил, что нам, математикам, не следует публиковать этих мнений, так как «*в такой публикации даже самый лучший математик способен сказать совершеннейшую чушь*».

Я не сомневаюсь, что «самым лучшим» он называл себя, так что расцениваю это письмо как *бумеранг*: смертоносное оружие, поражающее если не цель, то охотника.

Через некоторое время на одном официальном обсуждении проблем образования в Москве выступил академик Д. В. Аносов со следующей «критикой Арнольда». Арнольд опубликовал (и это правда) в одной своей статье («Полиматематика: является ли математика единой наукой или набором искусств и ремесел» в выпущенной Международным математическим союзом к 2000 г. книге «Математика, ее границы и перспективы» (под редакцией В. Арнольда, М. Атьи, П. Лакса и Б. Мазура) сравнение высказываний двух крупнейших алгебраистов. Гильберт (в 1930 г., в статье

---

1 Дискуссия об этой задаче Х. Уитни опубликована: B. E. Blank. Book review: What is mathematics? // Notices of the Amer. Math. Soc. 2001. Vol. 48, №11. P. 1325–1329; L. Gillman. Book reveiw: What is mathematics? // Amer. Math. Monthly. 1998. Vol. 105, №5. P. 485–488; J. E. Littlewood. Littlewood's miscellany. Cambridge Univ. Press, 1986. P. 32–35.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Приложения