А. Н. ЗЕМЛЯКОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕАЛЬНОСТИ

Дифференциальные уравнения для школьников

А. Н. Земляков

Математический анализ реальности

Дифференциальные уравнения для школьников

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 22.161.6
ББК 517.091
З53

Земляков А. Н.

З53 Математический анализ реальности. Дифференциальные уравнения для школьников. — М.: МЦНМО, 2013. — 360 с.

ISBN 978-5-4439-0096-4

В книге приводятся многочисленные примеры математического моделирования реальной действительности, доступные для понимания и осознания на школьном уровне изучения математики.

Книга предназначена для старшеклассников, выбирающих направление своего профессионального образования и склонных разобраться в том, какова действительная роль математики в науке и практике. Эта книга будет полезна также студентам, изучающим дифференциальные уравнения и математические модели.

ББК 517.091

ISBN 978-5-4439-0096-4

Оглавление

ЧАСТЬ II. Динамические системы

Предисловие

Задача этой книги — на конкретных примерах использования школьной математики (курса алгебры и начал анализа) показать, как математика может быть приложена к анализу окружающей нас действительности, проявляющей себя в разнообразных природных процессах, от «простого» (механического) движения до биологической эволюции. Математика со времени своего зарождения была во многом направлена на решение практических задач. Но поразительная эффективность математики в исследованиях естественных наук проявила себя в полной мере только в XVII в. В значительной степени это связано с зарождением и становлением математического анализа как мощного орудия не только объяснения реальности, но и научного предсказания.

Для Ньютона неотъемлемой частью изобретенного им и Лейбницем метода математических исследований были дифференциальные уравнения — уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, решавшихся еще за пять тысячелетий до н. э. в Вавилоне и Египте, а функции, описывающие те или иные процессы — движения (от брошенного камня до обращения планет), эволюционные изменения (от размножения бактерий до биоценоза) и прочие. Дифференциальные уравнения, говоря на современном языке, являются важнейшими математическими моделями реальных процессов, помогающими рассчитывать и космические траектории, и ядерные реакции, прогнозировать ход процессов.

В данной книге приводятся многочисленные примеры математического моделирования реальной действительности, доступные для понимания и осознания на школьном уровне изучения математики. Книга предназначена старшеклассникам, выбирающим направление своего профессионального образования и склонным разобраться в том, какова действительная роль математики в науке и практике.

Часть I

Непрерывные процессы и дифференциальные уравнения

ГЛАВА I

Эволюционные модели

§ 1.1. Дифференциальные уравнения и эволюционные модели

Очень многие процессы в живой и неживой природе, а также в социальных, общественных системах могут быть описаны как изменения каких-то *параметров* изучаемой системы во времени. Таким образом, меняющаяся, «динамичная» система *эволюционирует* во времени, и одна из задач математики, занимающая доминирующую роль начиная с XVII в. (со времени открытия методов *математического анализа*), — это разработка математических моделей эволюции (изменения во времени) — так называемых *эволюционных моделей*.

Эволюция, от лат. evolutio — «развертывание», в широком смысле — синоним термина «развитие», в узком смысле, который подразумевается в нашем случае, — это просто любое изменение, а совсем конкретно — непрерывное, постепенное (во времени!) количественное изменение той или иной системы, каких-то ее числовых характеристик, параметров[1]. В некоторых случаях удается узнать (например, экспериментально) явную *функциональную* зависимость рассматриваемых параметров от времени — тогда мы знаем *закон изменения*, т. е. совокупность каких-то *функций* $x_i = x_i(t)$ от переменной времени $t \in \mathbb{R}$. Тогда эта совокупность и представляет собой *математическую модель эволюции*. Гораздо чаще заранее, до математического исследования, указать зависимость параметров от времени не удается, однако можно как-то (например, экспериментально) узнать *скорость изменения*, и строить математическую модель на основе этой информации. Такие модели мы и будем называть *эволюционными*.

В этом параграфе мы опишем, как именно строятся эволюционные модели, здесь и в следующем параграфе рассмотрим общие и частные примеры эволюционных моделей.

1.1.1. Смысл производной: скорость изменения величины. Напомним (см. учебники алгебры и начал анализа), что *производной*

[1] В отличие от *революции* — от лат. revolutio, что значит «поворот», «переворот».

числовой функции $f\colon x\mapsto y=f(x)$ в такой точке x, что f определена в некоторой ее *окрестности* $\text{Окр}_x=(x-r,x+r)$, называется *предел*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),\tag{1}$$

при условии, что *этот предел существует*. Предельное равенство (1) означает, что разность

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=\alpha_x(h)\tag{2}$$

стремится к нулю при h стремящемся к нулю — или, иначе говоря, разность $\alpha_x(h)$ есть *бесконечно малая* в нуле. А это, в свою очередь, означает, что величина $\alpha_x(h)$ становится *сколь угодно близкой к нулю при достаточно малом значении* h: каково бы ни было положительное число ε, найдется такое значение $\delta>0$, что при любом значении $h\in(-\delta,\delta)$ величина $\alpha_x(h)$ будет отличаться от нуля меньше чем на ε, что можно записать с помощью *кванторов*:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall h\in(-\delta,\delta)\ |\alpha_x(h)|<\varepsilon$$

(«$\forall$» — *квантор всеобщности*, «для любого...», «для всех...»; «$\exists$» — *квантор существования*, «существует...», «найдется...»).

Понятие производной — одно из двух основных понятий *математического анализа* — ввели в конце XVII в. независимо друг от друга англичанин Исаак Ньютон (1643–1727) и немец Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Спустя сотню лет французские математики Жан ле Рон Д'Аламбер (1717–1783) и Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) дали определение производной, опираясь на интуитивное понятие предела (и сам термин «*производная*», и ее обозначение предложил Лагранж; Ньютон называл ее «флюксией», а Лейбниц связывал с понятием «дифференциала», о чем см. в гл. IV). Наконец, еще через век немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897) подвел под понятие производной строгий фундамент, и дал точные определения и производной, и предела, придумав для этого использованный выше «язык ε-δ».

Нас не столько интересуют строгие определения производной, предела, бесконечно малой, сколько *смысл* понятия производной. Первичный ее смысл наиболее отчетливо выделялся у самого Ньютона: *производная функции $y=f(x)$ в точке x есть* скорость изменения *переменной величины y в зависимости от переменной x в конкретной точке x*. Что это означает?

Проще всего объяснить указанный *наглядный смысл* производной так. Если *аргумент* x функции f изменяется на величину h (*приращение аргумента* $\Delta x=h$ может быть и отрицательным), то значение функции изменяется на величину $\Delta y=f(x+h)-f(x)$, и за *среднюю скорость изменения* y на промежутке от x до $x+h$ естественно принять отношение приращения функции к приращению аргумента. Предел же средней скорости при $h \to 0$ — это и есть *скорость изменения функции в точке*, равная производной $y'(x) = f'(x)$.

Это объяснение становится совсем естественным, если, как Ньютон, считать, что переменная x есть *универсальная переменная время*. Однако все-таки в механике (кинематике) скорость есть *вектор*, а введенная скорость изменения функции есть *число, скаляр*. Скалярная величина, в отличие от векторной, не имеет *направления*. Но зато она имеет *знак*, который и показывает, «в какую сторону» — возрастания или убывания — изменяется величина y. Так что исходя из наглядного смысла производной понятно, что если на каком-то промежутке I производная $f'(x)$ положительна, то функция f возрастает на нем, а если $f'(x) < 0$ на I, то функция убывает[1].

Хотя с векторными и скалярными величинами физики и математики имели дело и хорошо управлялись уже давно (можно упомянуть Кеплера с его вторым законом, равно как и Ньютона), сами термины и точно определяемые понятия вектора и скаляра ввел только в 1845 г. ирландский математик и астроном Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865), знаменитый изобретением так называемых *кватернионов* — аналога чисел в четырехмерном пространстве. Термин *вектор* — от лат. vector — «несущий»; в математике он означает *направленный отрезок* (или элемент так называемого *векторного пространства*). *Скаляр* — от лат. scalaris — «ступенчатый»; так называются численные величины, со знаком или без такового (длины, площади, объемы; температура и т. д.).

1.1.2. Касательная и геометрический смысл производной. К кинематическому понятию скорости-вектора и его связи с производной мы вернемся далее, а пока напомним *геометрический смысл производной*. На графике функции $y = f(x)$ рассматриваются две точки, $M_x(x; f(x))$ и $M_{x+h}(x+h; f(x+h))$ и связанный с ними «характеристический треугольник» $M_x M_{x+h} N$ (рис. 1). Из него видно, что отношение Δy к $\Delta x = h$ («бывшая» средняя скорость) есть *угловой коэффициент $k = kx(h)$ секущей $M_h M_{x+h}$*. Интуитивно ясно, что для «хороших» функций эта секущая при $h \to 0$ стремится к *касательной* к графику. Замечая, что угловой коэффициент $k = kx(h)$ при этом стремится к производной $f'(x)$ (конечно, если она существует), обычно *по определению и полагают, что касательная к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x = x_0$ есть проходящая через эту точку прямая, угловой коэффициент которой равен производной $k_0 = f'(x_0)$*. Проводя через точку $M_0(x_0; f(x_0))$ графика *вспомогательные оси координат*, координатами точки $(x; y)$ относительно которых будут $(x - x_0; y - f(x_0))$ (рис. 2), мо-

[1]Напомним, что *строгое* доказательство этих *признаков монотонности* требует применения *теоремы Лагранжа* — одной из *основных* теорем дифференциального исчисления, да и всего математического анализа.

жем сразу написать уравнение касательной[1]:

$$y - f(x_0) = k_0(x - x_0) \;\Leftrightarrow\; y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{3}$$

Просто *по определению касательной* производная функции в точке x_0 есть *угловой коэффициент касательной* к графику функции в точке графика с рассматриваемой абсциссой. В этом и состоит (при нашем определении касательной довольно тавтологический!) *геометрический смысл производной*.

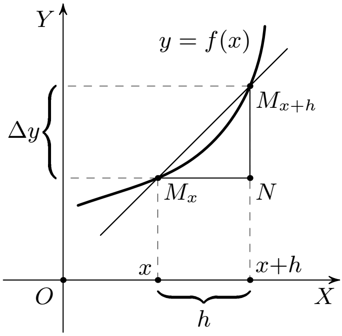

Рис. 1

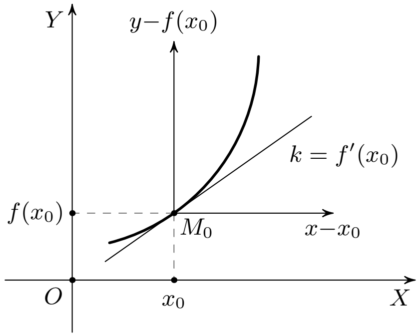

Рис. 2

1.1.3. Понятие линейного приближения. Теперь нечто новое и существенное. Линейная функция (3), задающая касательную к графику $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, называется *линейным приближением функции $f(x)$ в точке x_0*. Это понятие относится к числу самых основных в анализе числовых функций и различных его обобщениях (типа анализа функций нескольких переменных или *функционального анализа*). Чтобы прояснить *смысл линейного приближения*, рассмотрим разность самой функции $f(x)$ и ее линейного приближения (3), т. е. величину

$$R = f(x) - f(x_0)f'(x_0)(x - x_0)) = (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right). \tag{4}$$

Не замечаете ли вы в выражении в скобках нечто знакомое, уже встречавшееся?

Конечно, это фигурирующая в формуле (2) *бесконечно малая* (при $x - x_0 \to 0$, т. е. при $x \to x_0$) разность между средней скоростью на промежутке от x_0 до x и производной $f'(x_0)$, т. е. скоростью изменения функции f в точке x_0. Заменив обозначения: x вместо x_0, $x{+}h$ вместо x, так что $x - x_0$ теперь будет просто равно h, мы можем переписать

[1]Во вспомогательных координатах $\overline{x}; \overline{y}$ это будет уравнение *прямой пропорциональности* $\overline{y} = k_0\overline{x}$.

формулу (4) в виде

$$R = f(x+h) - f(x) - f'(x)h = h\Big(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)\Big) = h\alpha_x(h),$$

откуда следует представление

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + h\alpha_x(h). \tag{5}$$

В обозначениях же формулы (4) последняя формула будет выглядеть как

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\alpha(x). \tag{6}$$

Обе последние формулы называются *формулами линейного приближения функции* f *в точке* x_0 (формула (5)) или *в точке* x (формула (6)). Отбросив в этих формулах последние слагаемые, мы получим *приближенные формулы* (линейные приближения)

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h \tag{7}$$

и

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \tag{8}$$

абсолютная погрешность вычисления по которым равна $|R|$, а погрешность по отношению к приращению аргумента (h или $x-x_0$) стремится к нулю (при $h \to 0$ или $x \to x_0$).

Иначе формулы (5)–(6) называются *формулами Тейлора* первого порядка *с остаточным членом* $R = h\alpha_x(h)$ или $(x-x_0)\alpha(x)$. Если функция f в окрестности точки, в которой рассматривается линейное приближение, «достаточно хорошая», то остаточный член имеет *порядок* h^2. Например, если f имеет вторую производную[1] $f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'$, то он может быть записан в виде $R = \frac{1}{2}f''(c)h^2$, где c — какая-то точка между x и $x+h$ (говорят, это *остаточный член в форме Лагранжа*). Естественно, при малых значениях h членом порядка h^2 можно пренебречь по сравнению с линейным членом $f'(x)h$ (конечно, в случае, когда он *отличен от нуля*, т. е. $f'(x) \neq 0$), и приближенные формулы (7)–(8) имеют большую точность.

Брук Тейлор (1685–1731) — английский математик и философ, приверженец Ньютона в его «споре» с Лейбницем о приоритете в открытии математического анализа, член и секретарь Лондонского королевского общества (Royal Society — аналога Академии наук), обессмертивший свое имя открытием (в 1712 г.) указанной формулы (произвольного порядка) и соответствующего бесконечного *степенно́го ряда* (о них см. далее § 3.1, 3.3).

Пример 1. Для функции $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$ формула (5) имеет вид

$$\sqrt{x+h} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot h.$$

Воспользуемся этой формулой для вычисления приближенного значения числа $\sqrt{17}$, для чего запишем число 17 в виде $16+1 = x+h$. Тогда

[1] Значок «def» означает «равенство по определению».

$\sqrt{x}=\sqrt{16}=4$, и линейное приближение дает

$$\sqrt{17}=\sqrt{16+1}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot h=4+\frac{1}{2\cdot 4}\cdot 1=4+\frac{1}{8}=4{,}125.$$

Точные вычисления значения $\sqrt{17}$ дают $4{,}123105\ldots$, так что абсолютная погрешность формулы линейного приближения в данном случае меньше двух тысячных! □

Заметим, что если для какого-то числа k можно записать, что

$$f(x+h)=f(x)+kh+h\alpha(h), \tag{9}$$

где $\alpha(h)$ — бесконечно малая в нуле, то из формулы (9) получаем

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-k=\alpha(h)\to 0 \quad \text{при } h\to 0,$$

поэтому существует предел выписанного отношения при $h\to 0$, причем он равен k. Иными словами, существует производная $f'(x)=k$ (см. п. 1.1.1).

Следовательно, существование представления (*линейного приближения*) вида (9) эквивалентно условию дифференцируемости (существования производной) функции, а коэффициент k линейного приближения и есть производная $f'(x)$.

Именно существование линейного приближения вида (9) выбрал в качестве *определения дифференцируемости* Карл Вейерштрасс в своих лекциях 1861 г. Он утверждал, что как раз это определение отражает «*истинный смысл производной*». Заметим, что из наших рассуждений следует, что *из всех прямых, проходящих через точку $M_0(x_0; f(x_0))$, именно* касательная*, угловой коэффициент которой равен производной* (по определению касательной!), *наиболее близко прилежит к графику функции $y=f(x)$ в окрестности этой точки* — в том смысле, что для разности $R=f(x)-f(x_0)-k(x-x_0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R}{x-x_0}=0 \Leftrightarrow k=f'(x_0)$$

(обдумайте). Это утверждение, называемое *теоремой о линейном приближении*, и является, по Вейерштрассу, сутью определения производной. Собственно вейерштрассов подход к «истинному смыслу» производной нам далее не нужен — достаточно будет наглядного, геометрического и излагаемого ниже *кинематического* ее «смыслов», интерпретаций. Однако теорема о линейном приближении и серия формул (5)–(8) пригодятся при анализе простейших эволюционных и динамических моделей (о последних речь в следующем параграфе).

Уже упоминавшийся немецкий математик Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897; между прочим, учитель Софьи Ковалевской) уделял особое внимание строгому обоснованию математического анализа. Так в 1861 г. он впервые строго сформулировал определение предела на современном языке, ввел понятие окрестности точки и вообще «навел полный порядок» в изложении анализа. Именно Вейерштрасс ввел понятие абсолютного значения (модуля) действительного числа и само обозначение $|x|$. Строгое введение рациональных и иррациональных действительных чисел у него базировалось на понятии предела последовательности сумм дробей, в частности десятичных (так что, как поныне принято и в школьных учебниках, действительное число трактовалось как бесконечная десятичная дробь). К этому кругу вопросов относится и входящая в школьный курс алгебры и начал анализа *теорема Вейерштрасса о достижении наибольшего/наименьшего значений* (одна из многих, носящих его имя). Один из основоположников математики XX в. Давид Гильберт (1862–1943) очень высоко ценил вклад Вейерштрасса в математическое образование и в саму математическую науку, заметив в 1900 г. по этому поводу: «*Заблуждение думать, что строгость в проведении доказательств — враг простоты. Напротив, многочисленные примеры показывают, что более строгий метод является также наиболее простым и доступным*». Мы не будем оспаривать эту точку зрения.

1.1.4. Движение по прямой. Для описания движения материальной точки *по прямой* достаточно ввести на этой прямой координаты, или, иначе, считать прямую *координатной осью* — скажем, Ox, — и рассмотреть числовую функцию $x = x(t)$, задающую координату точки в момент времени t. Тогда и *скорость движения*, которая, в соответствии с определением скорости, приняты в физике (механике), равна производной от координаты по времени, есть числовая функция $v = v(t) = x'(t)$. Такова же и скорость изменения скорости, т. е. *ускорение*: скалярная функция $a = a(t) = v'(t) = x''(t)$, т. е. *вторая производная* координатной функции $x(t)$, которую называют также *законом движения*. Тем самым мы приготовились к описанию простейших кинематических моделей движения по прямой.

Движение по прямой или вдоль прямой — как бы самое простое из движений, однако и его описание в *динамических* моделях, относящихся к движениям под действием известной силы, далеко не просто (см. § 1.2 и гл. V). Пока мы ограничимся простейшей кинематической моделью.

Кинематика — от греч. κινεω (кинео) — «двигать», κινημα(τος) (кинема(тос)) — «движение» («движущийся») — раздел *механики*, в котором движение рассматривается только с геометрической точки зрения, безотносительно к его вызвавшим «причинам», т. е. *силам*.

Динамика — от греч. δυναμις (динамис) — «сила», δυναμικος (динамикос) — «имеющий силу», «сильный» — раздел *механики*, изучающий движение в зависимости от действующих сил. Динамикой также называют состояние, ход движения или какого-либо изменения (например, *динамика численности популяции* — см. далее).

Наконец, наименование «*механика*» происходит от греч. μηχανη (механе) — «орудие», «машина» (а также «выдумка», «хитрость», «средство», «приспособление»), μηχανικος (механикос) — «механический» в смысле «относящийся к машинам» (а также «изобретательный», «хитрый»!). *Классическая механика* (в отличие от *квантовой*) изучает перемещения *в пространстве*[1] с различных точек зрения; *теоретическая механика* занимается общими законами движения и в каком-то смысле может считаться особым разделом математики (один из объектов изучения механики — как раз *дифференциальные уравнения*).

[1]Мы пока рассматриваем движение *по прямой*, являющееся *частным случаем* движения в пространстве; см. далее п. 1.1.6

Пример 2. Движение без ускорения, т. е. *с ускорением, равным нулю*, задается соотношением

$$a(t) = v'(t) \equiv 0, \quad \text{или} \quad x''(t) \equiv 0.$$

С точки зрения математики записанные соотношения суть *дифференциальные уравнения*, т. е. уравнения, неизвестными в которых являются не числа, как в алгебраических уравнениях, а *функции*, причем известна (записана как уравнения) информация о производных искомых функций.

Дифференциальное уравнение *первого порядка* (с первой производной) $v' = 0$ означает, что скорость изменения функции $v(t)$ нулевая, т. е. функция «не меняется», является постоянной, *константой*[1], $v(t) \equiv 0 = \text{const}$. Строгое доказательство этого факта (*признака постоянства функции*: если на промежутке I выполняется соотношение $f'(x) \equiv 0$, то $f(x) = \text{const}$ на I) использует *теорему Лагранжа о конечном приращении*; оно приведено в § 2.1.

Дифференциальное уравнение *второго порядка* (со *второй* производной) $x'' = 0$ записываем как «цепочку» (или *систему*) дифференциальных уравнений первого порядка:

$$x' = v, \quad v' = 0.$$

Второе из этих уравнений мы уже решили: $v(t) = v_0 = \text{const}$, так что остается разрешить первое уравнение, принимающее вид $x' \equiv v_0$. Изменение с *постоянной скоростью* описывается, например, *прямой пропорциональной зависимостью* $x = v_0 t$ (тогда $x' = (v_0 t)' = v_0$), но, как и выше, к этой функции $v_0 t$ можно добавить *произвольную константу*. Получается, что координата меняется по линейному закону $x(t) = v_0 t + \text{const}$, причем $x(0) = 0 + \text{const} = \text{const}$, так что кинематический смысл константы в том, что она равна координате в нулевой момент времени, $x(0) = x_0$.

Таким образом, закон движения без ускорения задается *линейной* функцией $x(t) = At + B$, где константы A и B однозначно определяются *начальными условиями*: $A = x'(0) = v(0) = v_0$, $B = x(0) = x_0$. Такое движение называется *равномерным*. □

1.1.5. Одномерные эволюционные модели. Во многих случаях состояние той или иной системы характеризуется одним параметром, $x = x(t)$. С точки зрения математики изучение такой системы — все равно, что анализ *движения воображаемой точки* $X_t = X_t(x(t))$ *по прямой* — оси Ox. В этом случае ось Ox играет роль совокупности всех

[1] От лат. constans, constantis — «постоянный»; отсюда же и имя Константин!

Александр Николаевич Земляков

Математический анализ реальности
Дифференциальные уравнения для школьников

Подписано к печати 20.03.2013 г. Формат $60 \times 90/16$. Печать офсетная.
Объем 22,5 печ. л. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

в ППП «Типография „Наука“ ».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.
