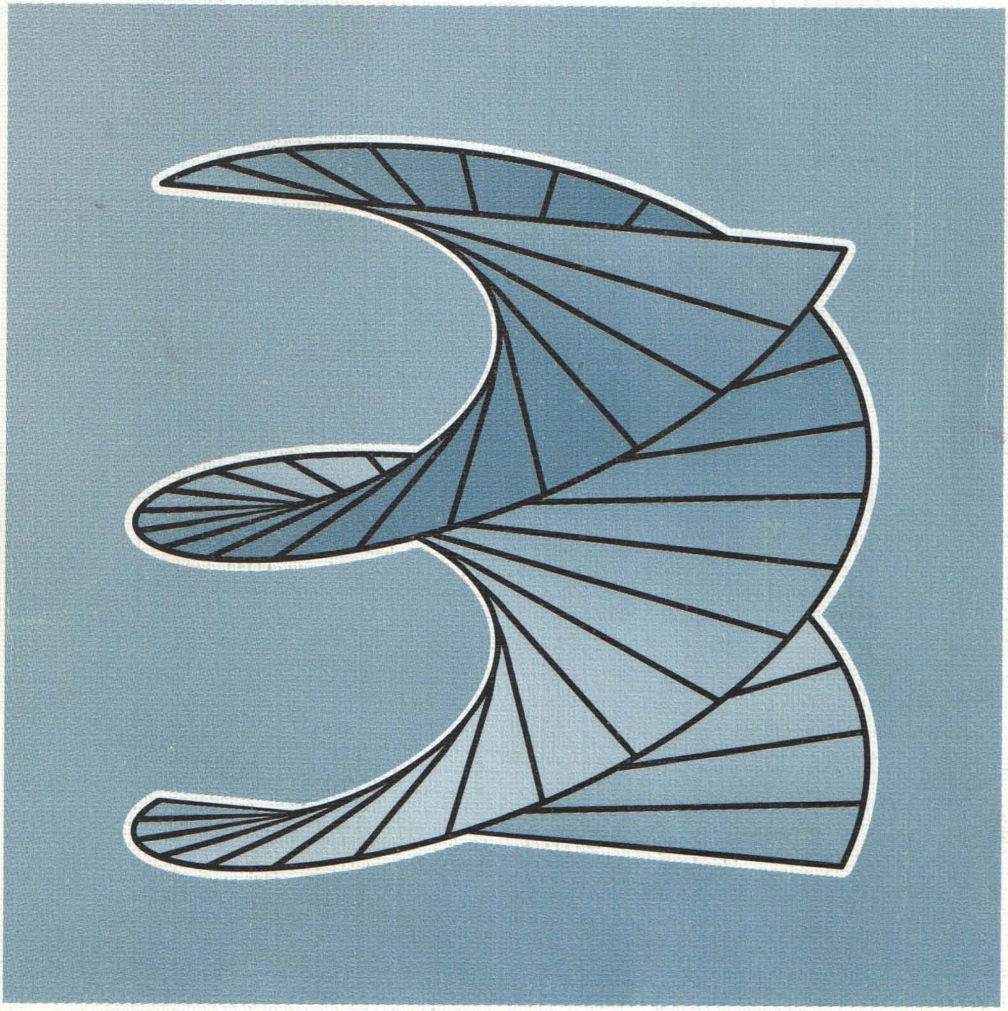
Н. Б. Васильев
В. Л. Гутенмахер

Прямые и кривые

Москва
2006

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования



БИБЛИОТЕЧКА
ВСЕРОССИЙСКОЙ
ЗАОЧНОЙ
МНОГОПРЕДМЕТНОЙ
ШКОЛЫ

Н. Б. Васильев
В. Л. Гутенмахер

Прямые и кривые

Издание седьмое,
стереотипное

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
Москва 2010

УДК 514.11
В19
ББК 22.151.0

Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л.

В19 Прямые и кривые. — 7-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2010. — 128 с.: ил.

Книжка состоит примерно из двухсот задач, многие из них даны с решениями или комментариями. Эти задачи очень разнообразны — от традиционных задач, в которых нужно найти и както использовать то или иное множество точек, до небольших исследований, подводящих к важным математическим понятиям и теориям. Помимо обычных геометрических теорем о прямых, окружностях и треугольниках, в книге используются метод координат, векторы и геометрические преобразования, и особенно часто — язык движений. Некоторые логические тонкости, зачастую возникающие в решениях, оставлены читателю для размышления.

Для школьников, учителей математики, руководителей кружков.

6-е изд. — 2006 год.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-94057-648-8

Предисловие ко второму изданию

Главные действующие лица этой книжки — различные геометрические фигуры, или, как они здесь чаще называются, «множества точек». Вначале появляются самые простые фигуры в различных сочетаниях. Они двигаются, обнаруживают новые свойства, пересекаются, объединяются, образуют целые семейства и меняют своё обличье — иногда до неузнаваемости; впрочем, интересно увидеть старых знакомых в сложной обстановке, в окружении новых фигур, появляющихся в финале.

Книжка состоит примерно из двухсот задач, многие из них даны с решениями или комментариями. Эти задачи очень разнообразны — от традиционных задач, в которых нужно найти и как-то использовать то или иное множество точек, до небольших исследований, подводящих к важным математическим понятиям и теориям (таковы задачи «про сыр», «про катер» и «про автобус»). Помимо обычных геометрических теорем о прямых, окружностях и треугольниках, в книге используются метод координат, векторы и геометрические преобразования, и особенно часто — язык движений. Некоторые логические тонкости, возникающие в решениях, оставлены читателю для размышления. Знак $\langle ? \rangle$ заменяет слова «упражнение», «проверьте», «очевидно ли вам это утверждение?», «подумайте, почему» и т. п. — в зависимости от места, где он стоит. Знаком $\square$ отмечается начало и конец решения, а $\downarrow$ указывает, что решение или ответ к задаче есть в конце книги.

Задачи, открывающие каждый параграф, обычно несложны или подробно разобраны в тексте. Остальные задачи вовсе не обязательно решать все подряд — можно, читая книжку, выбирать по своему усмотрению те, которые кажутся более заманчивыми. Многое из того, о чём говорится в задачах, полезно проверить на опыте: сделать крупный чертёж, лучше — в нескольких вариантах (с различным расположением фигур). Такой экспериментальный подход не только помогает угадать ответ, сформулировать гипотезу, но часто и подсказывает путь к математическому доказательству. Рисуя картинки на полях, авторы убедились, что почти за каждой задачей скрыта вспомогательная задача: построить несколько точек или линий, о которых говорится в условии. Эта предварительная задача часто оказывается более доступной, но не менее интересной.

Авторы глубоко признательны И. М. Гельфанду, советы которого помогли в работе над книгой, И. М. Яглому, В. Г. Болтянскому и Ж. М. Рабботу, прочитавшим рукопись, за существенные замечания. Со времени первого издания (1970 год) эта книга постоянно использовалась в работе Заочной математической школы. Серьёзная переработка при подготовке второго издания учитывала опыт, которым поделились с нами преподаватели этой школы, наши друзья и коллеги. Всем им, а также редактору книги А. Ф. Лапко мы приносим искреннюю благодарность.

Москва, 1978 год

Н. Васильев,
В. Гутенмахер

Несколько слов о Н. Б. Васильеве

28 мая 1998 года в результате тяжёлой болезни в возрасте 57 лет ушёл из жизни один из авторов этой книги, превосходный человек и талантливый математик, интеллектуал высочайшего уровня, энциклопедически образованный учёный и просветитель Николай Борисович Васильев.

С 1957 года, когда он, сделав выбор между математикой и музыкой (одновременно с окончанием школы он блестяще окончил музыкальное училище при Московской консерватории), поступил на механико-математический факультет МГУ, и до последних дней жизнь Николая Борисовича была связана с Московским университетом.

Окончив в 1962 году МГУ и сразу же поступив в аспирантуру, после её окончания Николай Борисович стал успешно работать в межфакультетской лаборатории математических методов в биологии (ныне одноимённом отделе университетского института физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского), где заведующий лабораторией — один из крупнейших математиков нашего времени академик И. М. Гельфанд — собрал очень сильный коллектив математиков и биологов. Н. Б. Васильев быстро вошёл в курс дела и за последующие годы опубликовал целый ряд серьёзных работ.

С первого курса университета Николай Борисович параллельно с блестящей учёбой начал работать со школьниками. Делая всё, что положено члену оргкомитета Московской олимпиады, — придумывая новые и обсуждая предложенные другими задачи, участвуя в составлении вариантов, проверяя работы, — он много работал и над собственным образованием в области элементарной математики.

Страна в это время переживала период бурного подъёма интереса к математике и физике, на мехмате работой со школьниками занимались очень сильные математики — студенты, аспиранты, преподаватели, и Н. Б. Васильев стал одним из лидеров не только олимпиадного движения, но и всей работы со школьниками: был одним из руководителей знаменитого математического кружка при МГУ; одним из организаторов и пропагандистов Всероссийской, а затем и Всесоюзной олимпиады (в течение более чем десяти лет Николай Борисович был членом Оргкомитета, а также заместителем Председателя Методической комиссии по математике Всесоюзной олимпиады академика А. Н. Колмогорова); много лет принимал вступительные экзамены в физико-математический интернат при МГУ (знаменитый «Колмогоровский интернат»); организовывал вместе с академиками И. М. Гельфандом и И. Г. Петровским первую в стране ВЗМШ — заочную математическую школу при МГУ (ныне Открытый лицей «Всероссийская заочная многопредметная школа (ВЗМШ)») и в дальнейшем был членом её Научного совета; был среди инициаторов создания и бессменным членом редколлегии Всероссийского журнала для школьников «Квант» (заведовал, пожалуй, самым трудным его разделом — «Задачником Кванта»); и т. д.

Можно сказать, что ни одно серьёзное дело, связанное со средним математическим образованием в стране в 60–90-е годы, не обошлось без активного, квалифицированного и плодотворного участия Н. Б. Васильева.

Особо следует сказать о его деятельности, связанной с изданием популярной литературы для школьников.

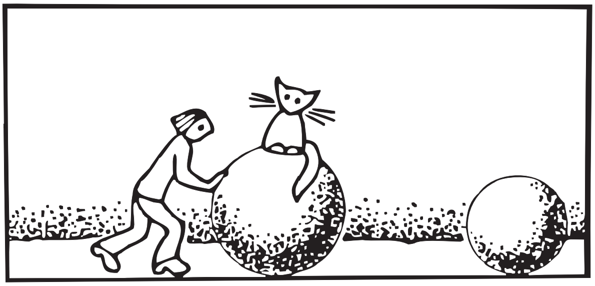
Будучи разносторонне образованным, высоко культурным человеком, он умел очень точно, наглядно, образно и, что обычно встречается гораздо реже, красиво изложить самые запутанные и трудные вопросы; в полной мере он обладал редким даром задачного композитора.

Его эрудиция позволяла ему находить даже очень далёкие связи между совсем, казалось бы, непохожими задачами. Он одинаково свободно владел и аналитическими, и геометрическими, образными методами и приёмами. Являясь автором большого количества книг и статей, он всегда добивался простоты изложения, многоплановости материала, глубокой содержательности. Это не была погоня за нестандартностью и псевдооригинальностью, он очень не любил громоздкие доказательства, заумные и занудные пассажи, всё неэстетичное; сам же он часто находил совершенно необычные штрихи, детали, умел ярко показать единство и красоту любимой им математики. Это полностью относится и к его лекциям и другим выступлениям, служившим образцом продуманности, логичности, прозрачности, внутренней красоты.

Книга «Прямые и кривые» возникла из задания, написанного Н. Б. Васильевым и В. Л. Гутенмахером для учащихся ВЗМШ (оба автора фактически создали математическое отделение ВЗМШ и руководили им начиная с его основания в 1964 году). Она была издана в серии «Библиотечка физико-математической школы» (возглавляемой И. М. Гельфандом), затем сильно переработана для второго издания в этой же серии. Это была кропотливая, самозабвенная работа двух друзей, мастеров своего дела. Выбрав, пожалуй, самый трудный для написания жанр — книгу-задачник, создатели «Прямых и кривых» успешно справились со своей задачей, о чём свидетельствуют многочисленные отзывы как людей, просто знакомившихся с книгой, так и нескольких поколений учителей и школьников, учившихся по ней.

Автор этих строк был свидетелем всего творческого процесса создания книги и надеется, что читатель получит такое же удовольствие от знакомства и работы с ней, какое получил он сам.

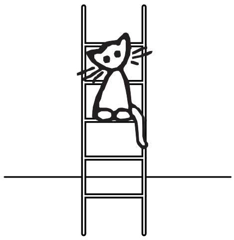
Москва, 2000 год *Ж. Раббот*



Введение

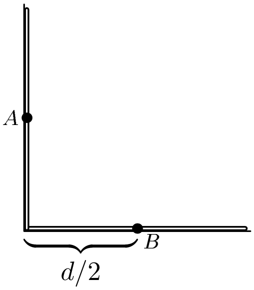
Первые задачи.

0.1. Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котёнок, сидящий на середине лестницы?



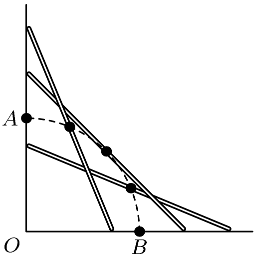
Пусть котёнок флегматичный и сидит смирно. Тогда за этой условной формулировкой видна такая математическая задача.

Дан прямой угол. Найти множество середин всевозможных отрезков данной длины d, концы которых лежат на сторонах данного угла.



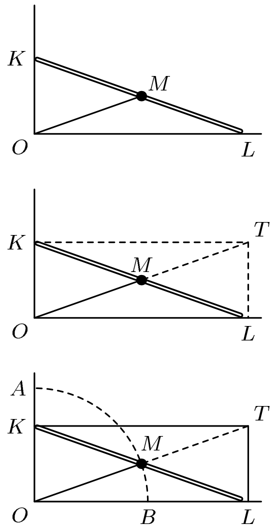
Попробуем догадаться, что это за множество. Разумеется, когда отрезок поворачивается, скользя концами по сторонам угла, его середина описывает некоторую линию (это подсказывает и первая наглядная формулировка задачи). Прежде всего выясним, где находятся концы этой линии. Они соответствуют крайним положениям отрезка, когда он вертикален или горизонтален. Значит, концы линии A и B находятся на сторонах угла на расстояниях $d/2$ от его вершины.

Постройте несколько промежуточных точек этой линии. Если вы сделаете это достаточно аккуратно, то увидите, что все они находятся на одинаковом расстоянии от вершины O данного угла.



Возникает п р е д п о л о ж е н и е: искомая линия — дуга окружности радиуса $d/2$ с центром O. Теперь нужно это д о к а з а т ь.

□ Докажем сначала, что середина M данного отрезка KL ($|KL| = d$) всегда находится на

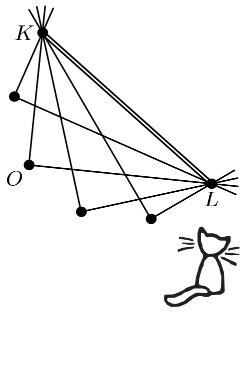


расстоянии $d/2$ от точки O. Это следует из того факта, что длина медианы OM прямоугольного треугольника KOL равна половине длины гипотенузы KL. (В справедливости этого легко убедиться, достроив треугольник KOL до прямоугольника $KOLT$ и вспомнив, что диагонали прямоугольника KL и OT равны по длине и точкой пересечения M делятся пополам.)

Таким образом, мы доказали, что середина отрезка KL всегда лежит на дуге $\smile AB$ окружности с центром O. Эта дуга и есть искомое множество точек.

Строго говоря, мы должны ещё доказать, что любая точка M дуги $\smile AB$ принадлежит искомому множеству. Это нетрудно сделать. В самом деле, через любую точку M нашей дуги мы можем провести луч OM, отложить на нём отрезок $|MT| = |OM|$, опустить из T перпендикуляры TL и TK на стороны угла — и нужный отрезок KL с серединой в точке M готов. □

Вторая половина доказательства могла бы показаться излишней: ведь ясно, что середина отрезка KL описывает «непрерывную линию» с концами A и B, значит, точка M проходит всю дугу AB, а не какую-то её часть. Это рассуждение совершенно убедительно, но ему не так просто придать математическую строгость.

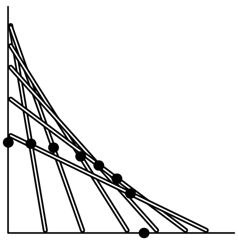


Посмотрим теперь на движение лестницы из задачи **0.1** с другой стороны. Пусть отрезок KL («лестница») закреплён, а прямые KO и LO («стена» и «пол») вращаются соответственно вокруг точек K и L так, что угол между ними остаётся прямым. Тот факт, что расстояние от середины отрезка до вершины O прямого угла всё время одно и то же, превращается в известную теорему: *если на плоскости заданы две точки K и L, то множество точек O, для которых $\angle KOL = 90°$ — окружность с диаметром KL.* Эта теорема, а также её обобщение, которое мы дадим в пункте **Д** § 2, не раз пригодятся при решении задач.

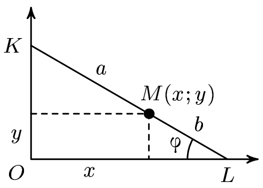
Вернёмся к условию задачи **0.1** и поставим более общий вопрос.

0.2. По какой линии будет двигаться котёнок, если он сидит не на середине лестницы?

На рисунке построено несколько точек одной из таких линий. Видно, что это — не прямая и не окружность, т. е. новая для нас кривая. Выяснить, что это за кривая, нам поможет метод координат.



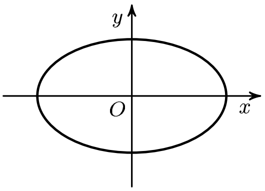
□ Введём систему координат, приняв стороны угла за оси Ox и Oy. Пусть котёнок сидит в точке $M(x;y)$ на расстоянии a от конца K лестницы и на расстоянии b от L $(a+b=d)$. Найдём уравнение, связывающее координаты x и y точки M.



Если отрезок KL наклонён под углом φ к оси Ox, то $y = b\sin\varphi$, $x = a\cos\varphi$, поэтому при любом φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$

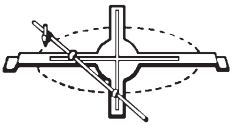
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (1)$$

Множество точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, как мы узнаем в § 6 — *эллипс*. Таким образом, котёнок будет двигаться по эллипсу. □



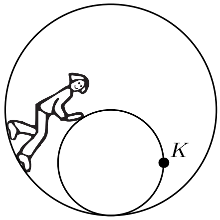
Заметим, что при $a = b = d/2$ — если котёнок сидит, как прежде, на середине лестницы — уравнение (1) превращается в уравнение окружности $x^2 + y^2 = (d/2)^2$. Тем самым мы получаем ещё одно, аналитическое, решение задачи **0.1.**

Результат задачи **0.2** объясняет устройство механизма, вычерчивающего эллипсы. Этот механизм, изображённый на рисунке, называется *эллипсографом* Леонардо да Винчи.



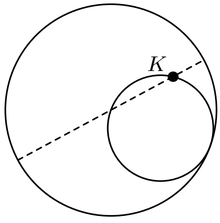
Теорема Коперника.

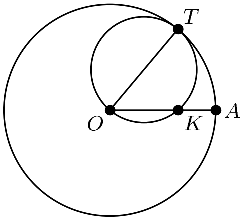
0.3. По неподвижной окружности, касаясь её изнутри, катится без скольжения окружность вдвое меньшего радиуса. Какую линию описывает точка K подвижной окружности?



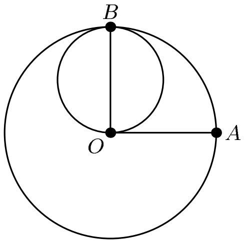
Ответ в этой задаче до удивления простой: точка K движется п о п р я м о й — точнее, по диаметру неподвижной окружности. Этот результат и называется *теоремой Коперника.*

Попробуйте убедиться на опыте в справедливости этой теоремы. (При этом важно, чтобы внутренний круг катился без скольжения, т. е. чтобы длины прокатившихся друг по другу дуг были равны.) Её нетрудно и доказать — нужно лишь вспомнить теорему о величине вписанного угла.

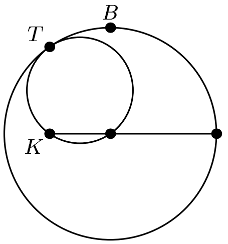




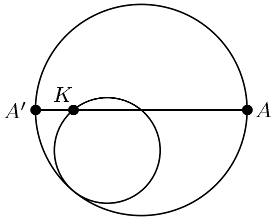
□ Пусть точка подвижной окружности, занимавшая в начальный момент положение A на неподвижной окружности, попала в положение K, а T — точка касания окружностей в этот момент времени. Поскольку длины дуг $\smile KT$ и $\smile AT$ равны, а радиус подвижной окружности вдвое меньше, то градусная величина дуги $\smile KT$ вдвое больше, чем дуги $\smile AT$. Таким образом, если O — центр неподвижной окружности, то по теореме о вписанном угле (см. § 1 стр. 16) $\angle AOT = \angle KOT$. Значит, точка K лежит на радиусе AO.



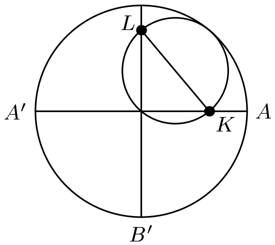
Это рассуждение годится вплоть до того момента, когда подвижный круг прокатится по четверти большой окружности (точка касания тогда попадёт в точку B большой окружности, для которой $\angle BOA = 90°$, а K совпадёт с O). Дальше движение будет происходить точно так же — вся картина просто отразится симметрично от прямой BO — а затем, после того как точка K достигнет противоположного конца A' диаметра AA', круг будет катиться по нижней половине неподвижной окружности и в это время точка K вернётся в A. □



Сравним результаты задач **0.1** и **0.3.** Их привлекательность заключена, по-видимому, в следующем обстоятельстве. В обеих задачах речь идёт о довольно сложном движении фигуры (в первой — о движении отрезка, во второй — окружности), но траектории некоторых точек получаются неожиданно простыми. Оказывается, эти две задачи связаны не только внешним сходством, но и сами движения, рассмотренные в них, совпадают!



Действительно, пусть по окружности радиуса d изнутри катится окружность радиуса $d/2$, и пусть KL — диаметр этой окружности, жёстко связанный с ней. Согласно теореме Коперника точки K и L двигаются по неподвижным прямым (диаметрам большой окружности — AA' и BB' соответственно). Итак, диаметр KL скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым, т. е. двигается так, как отрезок в задаче **0.1**.



Оглавление

Николай Борисович Васильев,
Виктор Львович Гутенмахер

ПРЯМЫЕ И КРИВЫЕ

7-е изд., стереотипное. — М.: МЦНМО, 2010. — 128 с.: ил.

Техн. редакторы *Д. Н. Вельтищев*, *М. Н. Вельтищев.*
Замечания об ошибках и опечатках направляйте на dmvn@mccme.ru.

Подписано к печати 05/VII 2010 г.
Формат 60×88 $^{1}/_{16}$. Офсетная печать.
Объём 8,00 физ. печ. л. Тираж 1500 экз. Заказ .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести
в магазине «Математическая книга».
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., д. 11.
Тел. для справок (499) 241–72–85.
Адрес в Internet: http://biblio.mccme.ru.
E-mail: biblio@mccme.ru.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография “Наука”».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.