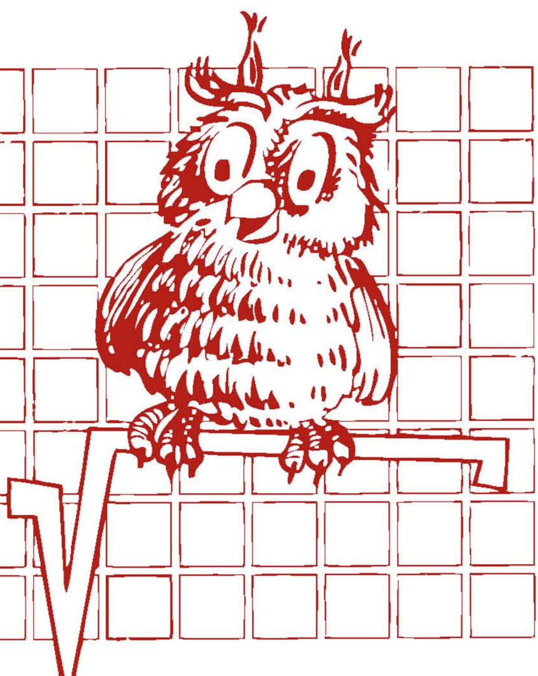
А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ



ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ

А. Я. Канель-Белов, А. К. Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Под редакцией В. О. Бугаенко

Издание девятое, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 51(023)
ББК 22.12
К19

Художник: В. К. Ковальджи

Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К.

К19 Как решают нестандартные задачи / Под ред. В. О. Бугаенко. — 9-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2015. — 96 с.

ISBN 978-5-4439-0332-3

В книге описан ряд классических идей решения олимпиадных задач, которые для большинства школьников являются нестандартными. Каждая идея снабжена комментарием, примерами решения задач и задачами для самостоятельного решения. Приведены подборки задач олимпиадного и исследовательского типов (всего 200 задач), которые сгруппированы по классам.

Сборник адресован старшеклассникам, учителям, руководителям кружков и всем любителям математики.

Предыдущее издание книги вышло в 2014 г.

ББК 22.12

ISBN 978-5-4439-0332-3

Содержание

Предисловие

Решение олимпиадных задач служит хорошей подготовкой к будущей научной деятельности, заостряет интеллект.

На основе опыта работы в Вечерней математической школе отобраны задачи, часто используемые на занятиях математических кружков. Эти задачи, интересные и сами по себе, служат материалом для описания ряда общематематических идей решения задач.

В книге описаны классические идеи[1] решения олимпиадных задач. К этим идеям подобраны примеры решения задач и задачи для самостоятельного решения.

Сложность задач существенно различна. Для решения некоторых из них достаточно смекалки, логики и пространственного воображения. Другие задачи требуют некоторого опыта, интуиции и наблюдательности. Чтобы решить наиболее трудные задачи потребуется умение организовать работу над задачей (прояснить ситуацию, выявить круг идей, подобрать удобный «язык») и овладеть определённой техникой.

В части II приведены задачи олимпиадного и исследовательского типов, которые сгруппированы по классам.

Кроме задач и идей решения, в книге есть словарик математических понятий и советы участникам олимпиады.

Мы благодарим Григория Кондакова за большое участие в подготовке темы «Процессы».

Мы будем благодарны читателям за любую критику, как по содержанию, так и по форме. Мы будем рады, если читатели найдут другие интересные идеи и пришлют нам соответствующие подборки задач. Мы обязательно выразим за это благодарность в следующем издании.

Адрес: 119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.

E-mail: *koval-dji@yandex.ru, Александр Кириллович*

---

[1] Отметим, что слова «идея» и «метод» иногда используются как синонимы, хотя «метод» — это алгоритм решения, а «идея» — это путь к решению.

Как работать с книгой

Осваивать идеи и методы решения задач можно двумя способами: 1) сначала прочитать описание идеи, потом разобрать примеры, потом порешать задачи на эту тему, или 2) сразу начать с задач, чтобы самим найти идею, а уже потом прочитать комментарии и разобрать примеры.

Решать задачи мы советуем не все, а выбирая те, которые вам интересны.

Если какая-то задача особенно понравилась, то, решив её, не переходите сразу к следующей, а подумайте еще над этой. Попробуйте понять:

- какие идеи привели к решению, чем эта задача похожа или не похожа на другие задачи;
- где в решении использованы те или иные данные, перестанет ли утверждение быть верным, если какое-то условие убрать или ослабить;
- можно ли данные и ответ поменять местами, т. е. верно ли обратное утверждение;
- можно ли обобщить задачу или вывести интересные следствия.

Не стремитесь решать много задач. Если вы решите за день одну–две задачи и хорошо всё продумаете, то это будет лучше, чем решить десять задач поверхностно. Важно не количество решенных задач, а то новое, что удалось понять.

Если у вас после решения хорошей задачи поднимается настроение — это признак успешной работы.

Часть I

Идеи и методы решения задач

Поиск родственных задач

Если задача трудна, то попытайтесь найти и решить более простую «родственную» задачу. Это часто даёт ключ к решению исходной. Помогают следующие соображения:

- рассмотреть частный (более простой) случай, а затем обобщить идею решения;
- разбить задачу на подзадачи (например, необходимость и достаточность);
- обобщить задачу (например, заменить конкретное число переменной);
- свести задачу к более простой (см. тему «Причёсывание задач»).

Пример 1. В угловой клетке таблицы 5×5 стоит плюс, а в остальных клетках стоят минусы. Разрешается в любой строке или любом столбце поменять все знаки на противоположные. Можно ли за несколько таких операций сделать все знаки плюсами?

Решение. Возьмём квадрат поменьше, размера 2×2, в котором стоят один плюс и три минуса. Можно ли сделать все знаки плюсами? Несложный перебор показывает, что нельзя.

Воспользуемся этим результатом: выделим в квадрате 5×5 квадратик 2×2, содержащий один плюс. Про него уже известно, что сделать все знаки плюсами нельзя. Значит, в квадрате 5×5 и подавно.

Пример 2. Постройте общую внешнюю касательную к двум окружностям.

Решение. Если одна из окружностей будет точкой, то задача станет легче (вспомните, как из точки провести касательную).

Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус меньшей окружности, O_2 и r_2 — центр и радиус большей окружности. Рассмотрим прямую, проходящую через O_1 и параллельную общей касательной. (рис. 1). Эта прямая удалена от O_2 на расстояние $r_2 - r_1$, значит, является касательной к окружности с центром O_2 и радиусом $r_2 - r_1$. Построим эту окружность и проведём из точки O_1 касательную к ней. Пусть C — точка касания. На прямой O_2C лежит искомая точка касания.

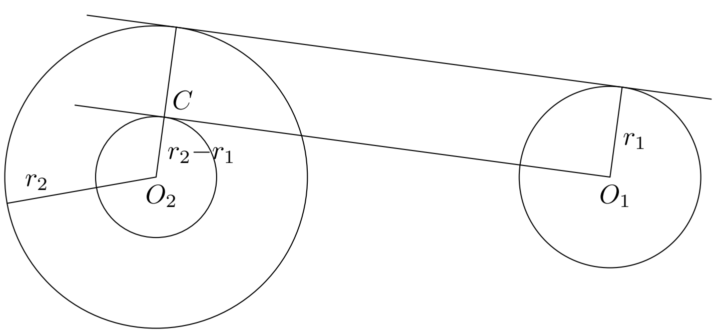


Рис. 1

Задачи

- **1.** Легко распилить кубик $3 \times 3 \times 3$ на 27 кубиков шестью распилами. Можно ли уменьшить число распилов, если разрешается перекладывать части перед тем как их пилить?
- **2.** Докажите, что в выпуклом n-угольнике сумма внутренних углов равна $180^\circ(n-2)$.
- **3.** Докажите, что $n(n+1)(n+2)$ делится на 6 при любом целом n.

▸ **4.** Решите уравнение $(x^2 + x - 3)^2 + 2x^2 + 2x - 5 = 0$.
▸ **5** (для тех, кто знаком с понятием инверсии). Постройте окружность, касательную к трём данным.
▸ **6** Постройте общую внутреннюю касательную к двум окружностям.

Причёсывание задач (или «можно считать, что...»)

Известно, что человек некультурный ест как придётся, а культурный сначала приготовит пищу. Так и некультурный математик решает задачу как придётся, а культурный «приготовит» задачу, т. е. преобразует её к удобному для решения виду.

Приготовление задачи может состоять в переформулировке условия на более удобном языке (например, на языке графов), отщеплении простых случаев, сведении общего случая к частному.

Такие преобразования сопровождаются фразами «в силу симметрии», «явно не хуже», «для определённости», «не нарушая общности», «можно считать, что...».

Пример 1. Каждый ученик класса ходил хотя бы в один из двух походов. В каждом походе мальчиков было не больше $2/5$. Докажите, что во всём классе мальчиков не больше $4/7$.

Решение. «Лобовое» решение состоит в рассмотрении количеств мальчиков, ходивших только в первый поход, ходивших только во второй поход, ходивших в оба похода, то же для девочек, составлении и решении системы уравнений и неравенств. Этого делать не хочется, поэтому будем избавляться от лишних параметров, сводя задачу к её частному случаю. Мы проделаем это в несколько шагов. После каждого шага упрощения становится очевидным следующий шаг.

Будем увеличивать долю мальчиков в классе, сохраняя условие задачи.

1 шаг. «Впишем» всех девочек в число участников обоих походов. От этого доля мальчиков в походах уменьшится, а в классе — не изменится. Это позволит добавить новых мальчиков в каждый поход, увеличив их долю в классе. Итак, можно считать, что все девочки ходили в оба похода.

2 шаг. Если мальчик ходил в первый поход, то освободим его от посещения второго. Доля мальчиков в походах уменьшится. Добавим новых мальчиков в пределах $2/5$ участников походов. Итак, можно считать, что каждый мальчик ходил только в один поход.

3 шаг. Если в одном походе было меньше мальчиков, чем в другом, то добавим в класс мальчиков. Доля мальчиков в походах останется не больше $2/5$, а доля мальчиков в классе увеличится. Можно считать, что мальчиков было в походах поровну.

4 шаг. Задача стала тривиальной: в обоих походах были все девочки и ровно половина мальчиков. Обозначим число девочек $3x$, тогда мальчиков в походах было не больше $2x$, а во всём классе — не больше $4x$. Максимальное число мальчиков в классе $4x$, а это $4/7$ класса.

Пример 2. Из бумажного треугольника вырезали параллелограмм. Докажите, что его площадь не превосходит половины площади треугольника.

Решение. Трудность состоит в том, что положение параллелограмма внутри треугольника произвольное. Будем преобразовывать параллелограмм, не уменьшая его площадь (рис. 2).

1 шаг. «Удлиним» параллелограмм так, чтобы одна его вершина попала на сторону треугольника.

2 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы его сторона попала на сторону треугольника.

3 шаг. «Удлиним» параллелограмм вдоль общей с треугольником стороны так, чтобы все четыре вершины попали на стороны треугольника.

4 шаг. Перекроим параллелограмм, не меняя его площади, так, чтобы один его угол совпал с углом треугольника.

5 шаг. Теперь задача решается легко. Например, покроем параллелограмм дополняющими его треугольниками (один из треугольников отражается центрально симметрично относительно середины его общей с параллелограммом стороны, а второй параллельно переносится).

Алексей Яковлевич Канель-Белов
Александр Кириллович Ковальджи

КАК РЕШАЮТ НЕСТАНДАРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Под редакцией В. О. Бугаенко

Подписано в печать 06.10.2014 г. Формат 84×108 $^{1}/_{32}$.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 5,04.
Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного
математического образования. 119002, Москва,
Б. Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8».
Тел. 8 (495) 363-48-86.
http://capitalpress.ru