Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев,
Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарев, Г. А. Мерзон,
И. В. Ященко

Элементы математики в задачах

с решениями и комментариями

Часть 1

Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев,
Ю. Г. Кудряшов, А. А. Кустарёв,
Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Элементы математики в задачах

с решениями
и комментариями

Часть 1

Издательство МЦНМО
2010

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
Э45

Авторы:
Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов,
А. А. Кустарёв, Г. А. Мерзон, И. В. Ященко

Э45 **Элементы математики в задачах** (с решениями и комментариями). Ч. I / Т. И. Голенищева-Кутузова, А. Д. Казанцев, Ю. Г. Кудряшов и др. — М.: МЦНМО, 2010. — 248 с.

ISBN 978-5-94057-579-5

Книга содержит один из курсов математики в задачах, на протяжении ряда лет используемых в 57 школе города Москвы. В представленном виде курс преподавался классу «В» 2008 года выпуска. Часть 1 состоит из тем, изучавшихся в 8 классе.

Задания снабжены решениями и комментариями. Многие сюжеты (листки) могут изучаться независимо.

Книга адресована учителям математики, работающим в математических классах, руководителям кружков и факультативов и всем, кто интересуется обучением старшеклассников математике вне школьной программы.

ББК 74.262.21

ISBN 978-5-94057-579-5

© Коллектив авторов, 2010.
© МЦНМО, 2010.

Оглавление

Введение

В математических классах 57 школы кроме алгебры и геометрии (на которых проходится более-менее обычная школьная программа) имеется еще предмет, который традиционно называется «математический анализ». В отличие от других предметов на уроках анализа практически нет рассказов у доски. Вместо этого ученикам регулярно выдаются *листочки* — наборы задач по какой-либо теме вместе с необходимыми определениями.

Школьники самостоятельно решают и кратко записывают эти задачи — каждый в своем темпе, ни формальных домашних заданий, ни текущих оценок нет (хотя примерно раз в полгода проводится зачет с отметкой), — а на уроке обсуждают их один на один с преподавателями. Для этого на каждом уроке присутствует команда из 4–6 преподавателей. Они же составляют листки.

Из таких листков (выдававшихся нами классу «В» 2008 года выпуска), снабженных решениями задач и комментариями, и состоит эта книга. В часть 1 вошли листки 8 класса. Дополнительные задачи отмечены звездочкой, дополнительные листки имеют букву «д» в номере.

Об этом предисловии.

> — Ты, — попросила она, — пока не досказывай до конца. Сначала вспомни какие-нибудь подробности.
>
> Г. Остер. Сказка с подробностями

Длинных предисловий никто обычно не читает. Поэтому мы решили ограничиться кратким описанием учебного процесса выше и довольно разрозненным набором подробностей, среди которых читатель, возможно, найдет ответы на интересующие его вопросы.

О разнообразии подходов. Сразу предупредим, что разные команды преподавателей учат совершенно по-разному. Поэтому подробно говорить об «обучении в матклассах вообще» не имеет особого смысла, а все сказанное ниже относится лишь к тому, как работали и воспринимали педагогический процесс мы.

Более того, так уж получилось, что и сама наша команда состояла из людей с совершенно разными темпераментами, увлечениями, мировоззрением и отношением к учебе и математике[1]. Вероятно, следы этого можно найти и в данной книге.

[1] И это по-своему здорово — например, для каждого школьника можно было выбрать подходящего преподавателя.

В процессе обучения мы довольно часто бывали не согласны с позициями друг друга и немало времени после уроков провели в жарких спорах. И, несмотря на то что в целом все обычно оставались при своих мнениях, аргументы коллег давали каждому возможность взглянуть на какие-то вещи под другим углом.

О целях

> Откровенно признаюсь, на всем своем долгом веку я никогда не говорил своим ученикам о «смысле» музыки; если таковой и существует, во мне он не нуждается. И напротив, я всегда придавал большое значение тому, чтобы мои ученики умели как следует отсчитывать восьмые и шестнадцатые. Будешь ли ты учителем, ученым или музыкантом — благоговей перед «смыслом», но не воображай, будто его можно преподать.
>
> Г. Гессе. Игра в бисер

Скажем сразу, что не ставим единственной (и даже, вероятно, основной) целью выращивание профессиональных математиков (хотя стараемся дать тем, кто хочет и может стать математиком, такой шанс).

То, чему мы хотели бы научить школьников, делится на две группы. С одной стороны (как бы это пафосно ни звучало) — умению мыслить, самостоятельно получать новые результаты; дать опыт математического открытия. И даже если кто-то, закончив маткласс, никогда больше не будет заниматься математикой, этот опыт проявится как-то еще.

С другой стороны, поскольку это вещи сложные, творческие, не вполне ясно, как можно было бы учить непосредственно им. Поэтому на уроках мы занимаемся вещами (по крайней мере внешне) много более скромными. Можно сказать, что мы учим всего четырем вещам: читать, писать, говорить и слушать (школьник *читает* определения и задачи из листка, *записывает* решения, *рассказывает* их преподавателю, *слушает* его комментарии — и всему этому мы стараемся научить; а вот собственно задачи школьнику приходится учиться решать самому).

Мы надеемся, что такие занятия математикой способствуют, по крайней мере, выработке трех умений, полезных и вне ее: «первое — это умение отличать истину от лжи (понимаемой в ... объективном математическом смысле, то есть без ссылки на намерение обмануть); второе — это умение отличать смысл от бессмыслицы; третье — это умение отличать понятное от непонятного» (В. А. Успенский).

Кроме того, хотелось бы, чтобы выпускники имели какое-то представление о том, что такое математика и как ей занимаются. Это полезно не только для выпускников, которые дальше будут заниматься математикой, но и для тех, кто дальше никакой математикой заниматься не будет — как минимум для того, чтобы последние смогли вовремя это понять.

Наконец, просто в классе собираются, с одной стороны, ребята, которые хотят заниматься математикой, а с другой стороны — преподаватели, любящие ее и желающие поделиться своими знаниями. И, может быть, такое общение и есть главная цель всего процесса — так же как в музыкальном клубе или кружке макраме. По крайней мере, наверняка это главная его причина.

О системе листков

О листках. Математика — творческое занятие; *технология* получения нового математического знания отсутствует. Единственный способ научиться плавать — так или иначе пробовать это делать; просто смотреть на то, как это делают другие, недостаточно. Так и единственный способ обучения математическому открытию — практика: решение задач, представляющее для школьника открытие *нового знания*.

Конечно, человечеству это знание уже давно известно, но школьнику это мало помогает (только психологически: чтобы что-то сделать, полезно знать, что в принципе это возможно).

Впрочем, в последнем утверждении присутствует некоторое лукавство. Сам набор задач, на которые преподавателями разбит каждый сюжет, позволяет школьникам подниматься, как по ступенькам лестницы. Для этого ступеньки сделаны достаточно высокими, чтобы представлять интерес, но достаточно низкими, чтобы каждый шаг был доступен для школьника[2]. И такое построение листка, конечно, опирается на то, что сами преподаватели хорошо понимают, как эти задачи решать.

В то же время, мы вставляем в листки сложные (а иногда даже нерешенные) задачи. Школьники могут увидеть, что внешне эти задачи ничем не отличаются от других задач листка, и попробовать их

[2]И здесь нельзя не отметить, что самостоятельный поиск/выбор правильных задач и определений — важная часть работы математика (да и не только математика), которой система листков не учит. И даже сама необходимость такой работы от людей, обучающихся по системе листков, скрыта — что может создать искаженное представление о работе математика.

решить. И приятно отметить, что некоторые ребята, работающие по такой системе, уже в школе получают результаты, которые заслуживают настоящей научной публикации[3].

Кроме того, листок представляет собой нечто вроде плана математической статьи в стиле определение-теорема-доказательство, в котором школьникам предлагается заполнить опущенные доказательства. Таким образом, листок передает принятый способ структурирования математического знания[4].

Об индивидуальном подходе. Идея учить по одной программе целый класс кажется нам малопродуктивной.

Поэтому кроме общей для всех обязательной программы имеются дополнительные листки на разные (часто уходящие довольно далеко в сторону от основного курса) темы, которые школьники берут по желанию. Эти листки (вместе с дополнительными задачами из обязательных листков) также компенсируют разницу в темпе разных школьников.

Кроме того, к разным школьникам предъявляются разные требования, им задают разные наводящие — или, наоборот, дополнительные — вопросы. Эти вопросы, вместе с комментариями преподавателя, заполняют пробелы между задачами и определениями листка, создавая (по крайней мере, в идеале) индивидуальный курс для каждого школьника.

Эффективно работать в таком режиме один преподаватель может только с небольшим количеством школьников, которых он достаточно хорошо знает. Соответственно, на класс необходимо несколько преподавателей, каждый из которых работает с 3–5 фиксированными школьниками. В течение урока преподаватель перемещается по классу, подсаживаясь за парты к своим школьникам и обсуждая с ними задачи.

Примерно раз в полгода происходит некоторое перераспределение школьников между преподавателями. Кроме того, тоже примерно раз в полгода проходит зачет, который школьники никогда не сдают своему преподавателю.

---

[3]Например, Yu. Makarychev. A short proof of Kuratowski’s graph planarity criterion // J. of Graph Theory, 1997. Vol. 25. P. 129–131; А. А. Кустарев. Ограничения конечных векторных сумм и доказательство теоремы Леви—Штейница // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7.

[4]В том, что этот способ не единственно возможный, нетрудно убедиться, сравнив математическую и физическую статьи, посвященные одному и тому же вопросу.

О традиционных методах. Главное отличие как от традиционной классно-урочной, так и от лекционно-семинарской системы состоит в том, что мы пытаемся научить именно открывать что-то самим, а не действовать по шаблону или пользоваться рассказаными идеями. Именно поэтому мы не заставляем школьников заучивать факты и готовые схемы, а подталкиваем их к изобретению новых (для них) методов решения.

Сразу оговоримся, что на более позднем этапе полезны (и даже необходимы) и изложения в готовом виде: в книгах, лекциях и т. д. Во-первых, изучение какой-либо темы с помощью решения задач требует очень много времени. Во-вторых, даже если предположить, что любая тема может быть изложена в виде набора задач (что неочевидно), то для большинства тем это все равно не сделано (как минимум потому, что для этого требуется серьезная работа кого-то уже разобравшегося в теме). Так что получить достаточный (например, для серьезных занятий математикой) объем знаний при помощи одной только системы листков малореально. Поэтому начиная с 10 класса мы выдаем школьникам математические книги для чтения (и обсуждаем их), организуем лекции по некоторым темам.

Но, по крайней мере в начале обучения, для школьников важно почувствовать крепкую почву под ногами, обрести фундамент из задач и теорем, которые они действительно хорошо понимают, потому что доказали самостоятельно.

При всем том стоит учитывать, что кроме курса анализа в 57 школе всегда присутствуют построенные более-менее по традиционной системе курсы школьной алгебры и геометрии[5].

О рассказах у доски. В 8–9 классах мы рассказывали что-то у доски только в двух случаях.

Во-первых, перед выдачей нового обязательного листка — о соответствующих идеях и мотивировках — неформально, не доказывая точных теорем и не вдаваясь в технические детали определений; этот комментарий ложился на нулевые знания по теме.

Во-вторых, на консультациях, проводившихся перед каждым зачетом, мы рассказывали решения задач, и там, в основном, наоборот, обсуждались детали и технические тонкости. К этому моменту школьники уже довольно давно работали с данной темой и узнавали

[5] И мы рекомендуем ознакомиться с блестящим курсом геометрии Р. К. Гордина (который не только вел в нашем классе обычную математику, но и был его классным руководителем).

решения задач, над которыми (скорее всего) они уже довольно долго размышляли.

О зачетах.

> — ...А яма для сдачи экзамена по математике была?
> — Была, — глаза Змейка блеснули. — Девять локтей глубиной.
> — Один к одному! У нас сажали в яму, давали задачи и тех, кто не решал, наверх уже не вытаскивали. Должен сказать, что вид побелевших костей твоих предшественников чрезвычайно способствует мыслительному процессу.
>
> А. Коростелева. Школа в Кармартене

Проведение зачета преследует несколько целей.

С одной стороны, это способ самому школьнику выяснить, что же он в действительности знает, а что нет, — причем происходит это не только на самом зачете, но и при подготовке к нему.

Вообще, подготовка к зачету, возможно, даже полезнее его самого. Предстоящий зачет очень мобилизует (и это еще одна причина, по которой мы его проводим). В обычное время у детей много разных дел — от прогулок в парке до домашних заданий по другим предметам. А перед зачетом школьники концентрируются на математике: подготовка к зачету — хороший повод вспомнить пройденное и как-то систематизировать свои знания, а также разобраться наконец в разных тонких местах и пропущенных задачах из старых листков.

Работать в таком режиме постоянно невозможно — и поэтому мы проводим зачет не чаще чем раз в полгода, — но делать это иногда очень полезно (на ледяную горку нельзя взойти пешком, а можно только взбежать; так же и интенсивные занятия способны дать качественный прорыв, которого не получается добиться размеренными занятиями).

С другой стороны, нам и самим интересно, чему же мы научили школьников. При этом нам важно не только и не столько то, насколько хорошо они «усвоили материал», и даже не то, насколько хорошо они научились решать задачи, — в целом это обычно понятно и так (хотя независимая проверка и полезна — особенно для обнаружения отдельных лакун в самых неожиданных местах). Скорее нас интересуют их навыки математического общения (преподавателю, постоянно общающемуся со школьником, через некоторое время становится трудно объективно оценить, насколько внятно последний выражает свои мысли).

Наконец, на зачеты (особенно в старших классах) мы приглашаем профессиональных математиков, общение с которыми интересно и полезно школьникам.

О содержании листков

О выборе тем. Мы не считаем главной целью передачу как можно большего объема знаний; конкретный материал в большинстве случаев для нас лишь средство, повод для математического общения учеников и преподавателей во время урока. Поэтому набор тем во многом определяется математическими вкусами команды: всегда важно учить только тому, что сам любишь.

При этом мы старались использовать сюжеты, которые не требуют слишком больших предварительных знаний — причем понимая под требованиями не только формально используемые определения и теоремы, но и знания, необходимые для мотивировки изучаемых вопросов; недостаточно мотивированные и слишком абстрактные сюжеты плохо усваиваются в 8–9 классах.

При этом темы должны быть достаточно содержательны, чтобы занятия не свелись к формальной игре с определениями. Иначе возникает — не столь редкая, увы — ситуация, когда выпускник маткласса знает много умных слов, но не способен не то что доказать, но даже разобраться в доказательстве сколь-нибудь нетривиальных теорем.

Кроме того, мы старались сделать так, чтобы курс не был разрозненным набором никак не связанных тем, но — хотя бы частично — складывался в какой-то сюжет, дающий при изучении эффект *восхождения*[6]. В нашем курсе в 8–9 классах таким сюжетом является построение действительных чисел: от начал теории множеств через целые и рациональные числа к упорядоченным полям и анализу.

Наконец, хотя объем получаемых знаний для нас и вторичен (по отношению к приобретению навыков математического исследования), мы стараемся включить в программу некоторый минимум, без которого невозможны занятия содержательной математикой. Поэтому время от времени мы даем листки, предназначенные для ликвидации пробелов в образовании. Особенно актуально это в начале обучения, когда в класс приходят ученики с совершенно разными знаниями.

---

[6] При этом большая часть обязательных листков образует более-менее линейный маршрут, а дополнительные листки предоставляют возможности для радиальных выходов в самых разных направлениях.

О составлении листков. На первый взгляд, нет ничего проще, чем написать листок: достаточно взять какой-нибудь относительно замкнутый математический текст (статью или главу из книги) и выписать из него определения и формулировки лемм и теорем (быть может, добавив некоторые промежуточные леммы). Но нетрудно заметить, что при этом безвозвратно пропадают все комментарии, которые формально не необходимы для доказательства основных результатов. Так что, как минимум, необходимо еще изложить в виде задач (на худой конец, совсем легких — чтобы просто зафиксировать утверждение) примеры к определениям, контрпримеры, демонстрирующие существенность условий теорем, следствия теорем, демонстрирующие важность последних и т. п. А то, что таким образом изложить не получается — например, неформальные идеи и аналогии, — должен иметь в виду преподаватель, обсуждая задачи со школьниками; это, конечно, налагает определенные требования на его математическую квалификацию.

Скажем несколько слов и о композиции листка. Как писал Р. Фейнман, «понять — значит привыкнуть и научиться использовать». Поэтому в начале каждого листка имеются достаточно простые задачи, решая которые школьник может разобраться в базовых понятиях[7]. Но, конечно, математике нельзя научиться, решая только простые задачи, и ближе к концу листка сложность задач возрастает (а в большом листке таких пиков два — где-то в середине и в конце).

Такая напоминающая лестницу композиция, позволяет «самостоятельно» получать доказательства содержательных теорем. Соответственно (в отличие от решения технических упражнений) учащийся может увидеть убедительный результат своей деятельности: например, «я доказал основную теорему арифметики». Причем (в отличие от большинства олимпиадных задач) этот полученный результат не только интересен сам по себе, но и существенен для дальнейшего.

Конечно, такая схема построения листков налагает некоторые ограничения на изучаемый материал: так как объем листка ограничен[8], а каждый следующий листок снова начинается с простых задач, возникает эффект «короткого дыхания»: до действительно сложных

[7]Случается, что сильные преподаватели (особенно работающие с сильными школьниками) торопятся побыстрее проскочить такие — слишком простые и недостаточно содержательные, казалось бы, — задачи. Ничем хорошим это обычно не заканчивается.

[8]Математическая статья в 10 страниц считается очень короткой, а до конца листка в 4 страницы уже доберется не каждый школьник (а некоторые наши коллеги вообще считают, что каждый листок должен умещаться на страницу — на то он и *листок*).

вещей такая лестница регулярным образом не дотягивается (причем ни за какое количество листков). Эту проблему (для сильных школьников) призваны решать дополнительные задачи и дополнительные листки (которые бывали длиннее и существенно сложнее обязательных), а также общение с преподавателем.

В заключение разговора о составлении листков мы хотели бы предостеречь от буквального копирования нашего курса: он, с одной стороны, был построен для конкретных детей (и несет отпечаток разных конкретных обстоятельств), а с другой — отражает математические вкусы конкретных преподавателей. Тем не менее, мы надеемся, что эта книга будет полезна при подборе материалов для занятий.

Об аксиоматическом методе и теории множеств. На крутую гору приходится иногда подниматься не по прямой дороге, а по серпантину. То же бывает полезно и в математике: приступая к изучению курса, мы забываем всю математику, которую знали (курс анализа в 8–9 классах формально полностью замкнут: ссылки на материал школьных курсов отсутствуют в листках, а известные из них факты не разрешается использовать без доказательства), и начинаем все заново, но уже на другом уровне[9]. В частности, на другом уровне строгости: в курсе принят (неформальный) аксиоматический метод. И фундамент, на котором строится здание курса, — неопределяемые понятия множества и целых чисел. С введения в (наивную) теорию множеств и начинается наш курс «математического анализа».

В чем-то это следствие традиции, но для нее есть причины: эта тема обычно незнакома школьникам, что позволяет четко провести черту в начале курса (что более чем уместно в ситуации, когда и цели, и форма, и содержание занятий полностью меняются); на понятном по существу, но новом материале можно зафиксировать требования к строгости[10] решений, к их записи. Видимо, это самое неоднозначное из решений, принятых нами при построении курса, и мы не советуем копировать его, не взвесив тщательно все «за» и «против». И если все же начинать курс таким образом, то делать это нужно очень аккуратно и дифференцированно: школьник, до этого уже занимав-

---

[9] Причем амплитуда нарастает: по сравнению с предшествующим школьным курсом мы и глубже спускаемся — до теории множеств, и (снова пройдя путь от целых чисел до действительных) значительно выше поднимаемся.

[10] Имеется и противоположная точка зрения, состоящая в том, что, во-первых, решение проблемы (каковым является аксиоматический метод) не может быть адекватно воспринято до знакомства с самой проблемой, а во-вторых, любой метод следует изучать на достаточно содержательных (а не на самых простых) примерах.

шийся, например, на кружке, может быть готов к большему уровню формализма, чем другой, у которого таким образом легко вообще отбить желание заниматься математикой.

О сотрудничестве и принуждении

О математическом общении. С первых уроков (а зачастую и раньше — на кружке) мы стараемся показать школьнику, что мы относимся к нему как к коллеге, создать атмосферу общения равных, совместной научной деятельности. Эта деятельность обычно состоит в том, что школьник вместе с преподавателем совместно пытаются разобраться в предложенном школьником решении какой-либо задачи.

Для того чтобы такое общение было плодотворным, с самого начала занятий мы прививаем *навыки математического общения* (которые, впрочем, ценны и сами по себе): понимать, что дано, а что надо доказать и чем при этом можно пользоваться; отличать доказанное от недоказанного; строить схему доказательства; связно излагать свои мысли (устно и письменно); формулировать отрицание утверждения; исправлять указанные ошибки и пробелы в рассуждениях. На первых уроках основное время и силы уходят именно на такие — казалось бы, простые, но на самом деле фундаментальные — вещи.

О записи решений. Нам приходится работать со школьниками, которые достаточно быстро соображают. Это по-своему здорово и интересно, но ребята обычно соображают гораздо быстрее чем говорят, а тем более пишут. И много сил (и авторитета) уходит на то, чтобы не только научить их умению излагать свои мысли на бумаге, но и просто убедить их в необходимости этого.

Главная причина, по которой мы на этом настаиваем, состоит в том, что только начав записывать решение, можно увидеть полностью ход рассуждения, понять, что ты на самом деле сказал. Типичная в начале обучения ситуация: восьмиклассник говорит нечто и никак не соглашается это записывать, утверждая, что все и так *очевидно*. Преподаватель берется записать то, что говорит ученик; ученик убеждается, что все это действительно аккуратно записано за ним, но перечитав получившийся текст целиком — изумляется: «Вроде я говорил правильное решение, а тут написана какая-то ерунда с кучей ошибок и вообще неверная по сути». Объяснить же школьнику, почему неверно его решение, при чисто устном обсуждении бывает намного сложнее. В частности, потому, что устно при любом указании на конкретную ошибку можно «менять показания» (причем совершенно искренне — в середине длинного рассказа тяжело вспомнить, что говорил в начале); кроме того, устно легче (сознательно или бессознательно) маскировать недостаток аргументов риторикой.

Записанное на бумаге решение помогает самому школьнику структурировать свои мысли, лучше понять логику (придуманного им же) доказательства, проследить всю цепочку рассуждений. В частности, нередко при записи решения школьник может сам найти в нем ошибки.

О приеме задач. При всем том важно не переусердствовать с наведением строгости в ущерб содержательности. В реальности в сдаче задач всегда присутствует некоторый элемент соревновательности: школьник пытается убедить преподавателя в правильности своего решения, а преподаватель — найти в нем ошибку; если «выигрывает» преподаватель, то школьник дорабатывает решение и снова пытается его сдать. Но не стоит забывать, что главная цель преподавателя все же не в том, чтобы найти в решении школьника как можно больше формальных недочетов, а в том, чтобы постепенно разобраться вместе со школьником в сути происходящего. Мы хотели бы, чтобы урок оставался сотрудничеством, а не поединком.

В противном случае, — даже если не говорить о психологических аспектах ситуации, когда на каждом занятии школьник вынужден бороться с человеком, который его старше и лучше разбирается в теме — к концу обучения у учеников может возникнуть уверенность в том, что математика сводится к формальным манипуляциям с символами по заданным правилам, чего нам (отнюдь не разделяющим такую точку зрения) не хотелось бы.

О принуждении. По нашему убеждению никакое обучение невозможно без определенного принуждения. Те, кто считают, что возможно научить ребенка математике (да и многим другим вещам) просто в атмосфере счастья и любви, сильно заблуждаются. Однако творить из под палки не получится, поэтому приходится тонко совмещать разные формы принуждения, стараясь минимизировать негативные.

Главное — это создать атмосферу, в которой должно быть *принято* (и престижно) учиться и решать задачи. Кроме того, важно сделать так, чтобы школьник, придя на урок и не принеся ни одной задачи, чувствовал неудобство перед преподавателем как перед коллегой, с которым он собирался вместе поработать, обсудить что-то, но пришел ни с чем, и тот пришел зря, попусту потратив свое время.

При этом мы стараемся минимизировать роль школьных отметок — давая почувствовать ребенку, что он работает не за формальную оценку (что, к сожалению, развивается к 8 классу даже у сильных ребят), а ради решения задачи, постижения красоты математики; и высшей наградой является удовольствие от решения задачи и оценка коллег (учителей и одноклассников) этого решения. Причем на первом месте должно стоять именно собственное удовольствие от решения задачи.

Ясно, что обучение по такой системе неэффективно (да и просто невозможно) в ситуации, когда ребенок не любит математику и не хочет ей заниматься. Кстати, поэтому нам достаточно просто экранировать просьбы о взятии ребенка в класс «по блату или звонку» — мы просто честно объясняем, что как раз по знакомству мы можем помочь ребенку избавиться от такой каторги, как обучение в матклассе.

О списывании. Проблема списывания во многом решается, если хватает терпения и педагогического умения освободить ребенка от психологического гнета двойки: нужно добиваться, чтобы ребята не сачковали, но не карать за несделанные задачи, считая формально их количество, — иначе в этом возрасте очень тяжело удержаться от списывания (а о творчестве в таком режиме вообще речи быть не может). Мы стараемся объяснить ученику (и его родителям), что оценка результата обучения происходит не по формальному количеству решенных задач и что списанная задача ничего не дает для достижения описанных выше целей.

О темпе. В силу разного исходного уровня математической подготовки и разного стиля мышления, школьники решают задачи в разном темпе, и мы стараемся не устраивать соревнования по формальным параметрам. И сразу говорим, что оцениваем (как формально, так и неформально) именно индивидуально работу каждого, его отдачу — относительно его возможностей в данный момент, а не относительно какой-то общей планки.

При таком подходе итоговые отметки школьников основываются главным образом на субъективной оценке преподавателя и не претендуют на объективность. Но в нашей практике обычно оказывалось, что оценка школьника ни для кого не является сюрпризом — школьники и сами согласны с тем, как их оценивают преподаватели.

Как уже было сказано, формальных домашних заданий обычно нет, однако преподаватель указывает школьнику (явно или неявно), когда пора закрывать очередной листок (то есть сдать из него все обязательные задачи). Мы стараемся сделать так, чтобы у школьников не накапливались незакрытые обязательные листки — не выдавая новых листков, пока большинство не справилось со старыми, и мягко помогая отстающим.

О преподавателях

О студентах. Преподавателю в матклассе не обязательно быть математиком, но важно, чтобы он интересовался математикой и разбирался в ней. На самом деле, быть может, лучшие преподаватели — это студенты и аспиранты математических факультетов, сами не так давно закончившие матклас.

Они лучше чувствуют ребенка — между ними нет психологического барьера (и потому неудивительно, что общение школьников и студентов не ограничивается рамками школьных уроков — это и походы, песни под гитару, обсуждение книг и фильмов; причем все это часто продолжается и после выпуска). У них огромное желание поделиться тем, чему их самих научили в школе и в вузе. Наконец, они еще помнят, *как* их учили; причем не только то, что получалось, но и то, что преподаватели по их (выпускников) мнению делали неудачно. Поэтому им практически и не нужно специальное педагогическое образование — они сразу готовы учить по данной системе, разумеется, при чутком руководстве.

Такие студенты и аспиранты и составляют обычно большую часть команды (именно поэтому система матшкол достаточно стабильна[11] и пережила разные времена). Так было и у нас.

О руководителе команды. Когда обстановка в классе очень неформальная, дисциплину поддерживать гораздо сложнее. Очень тонка грань между творческой обстановкой и абсолютным хаосом. А когда образуется критическая масса учеников, которые ничего не делают, класс рассыпается: либо ребята открыто перестают что-либо делать, либо начинается имитация деятельности (у нас, к счастью, такого ни разу не было).

[11]Как это обычно и бывает с достаточно хорошо работающими системами, основывается эта стабильность во многом на инерции: приходящие в школу студенты обычно считают то, как учили их, самым правильным и естественным (по модулю, быть может, мелких деталей), даже не задумываясь над причинами выбраных когда-то путей и возможными альтернативами. Вероятно, не вполне свободны от такого обмана зрения и мы.

Роль руководителя (кроме приема задач) — это, в первую очередь, чувствовать, что происходит в классе вообще и с каждым учеником в частности, и аккуратно регулировать ситуацию: кого-то похвалить, кого-то поругать (стараясь при этом не потерять психологический контакт), где-то даже поменять преподавателя. Кроме того, он должен оценивать уровень материала, выбирать темы.

Конечно, такие решения принимаются коллективно (не обязательно в результате обсуждения — по некоторым вопросам в команде должно быть согласие), и почти всегда оказывается, что руководитель согласен с общим мнением. И вообще, пока все идет хорошо, руководитель почти и не виден — работает как обычный преподаватель (и может показаться, что он вообще не особенно нужен), но как только начинаются проблемы — решать их прежде всего ему.

И последнее (но, может быть, и главное). Руководитель, как режиссер в театре, должен заражать всех — и учеников, и команду — позитивной энергией. И приходя на урок, он все свои проблемы и дела должен оставить за дверями класса.

Благодарности

Курс сформировался в нынешнем виде (и книга смогла быть написана) благодаря многим замечательным людям:

— Н. Н. Константинову, впервые применившему систему листков в математических классах, и Б. М. Давидовичу (учителю одного из нас), курс которого оказал на нас большое влияние;

— нашим друзьям и коллегам, работавшим (вместе с одним из нас) в классах «В» 57 школы 1996 и 2002 года выпуска и участвовавшим в создании предыдущих версий этого курса: Д. В. Ботину, С. А. Дориченко, В. В. Крюкову, С. В. Маркелову, В. В. Питербаргу, А. Б. Скопенкову, Р. М. Фёдорову, С. Е. Шалунову и другим;

— всем, кто вел вместе с нами «анализ» у v08 (класса «В» 57 школы 2008 года выпуска), обсуждал и писал листки: Е. В. Корицкой, П. И. Митричеву и В. М. Рычеву;

— ребятам из v08, которые удивительным образом смогли это все учить и получать вместе с нами удвольствие от математики, вдохновляя нас на создание курса и на написание этой книги.

Количество ошибок в тексте книги существенно уменьшилось благодаря внимательному чтению А. С. Бохенеком, С. М. Львовским, А. В. Каплиевым, А. В. Семёновым. Отдельная благодарность В. Ю. Радионову, который не только сверстал книгу, но и исправил ряд ошибок и дал ряд ценных советов. Наконец, мы благодарны В. Д. Арнольду и М. А. Берштейну за ценные советы по написанию этого предисловия.

Мы будем признательны читателям за сообщения об ошибках и опечатках (e-mail: merzon@mccme.ru, Григорий Мерзон).

Теория множеств 1

листок 1 / сентябрь 2004

Множество — одно из основных неопределяемых понятий в математике. Задать множество — значит определить, из каких элементов оно состоит. Один из способов задать множество — просто перечислить в фигурных скобках его элементы.

«Элемент x принадлежит множеству M» записывают как «$x \in M$», «элемент x не принадлежит множеству M» записывают как «$x \notin M$».

Задача 1. Сколько элементов в множестве:
а) $\{1\}$, $\{1, 2, 3\}$, {Вася}; б) $\{\{1\}\}$; в) $\{1, \{2, 3\}\}$;
г) букв слова «крокодил»; д) $\{\{1\}, 1\}$;
е) имен учеников вашего класса?

Определение 1. Множества A и B называются *равными*, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, а каждый элемент множества B принадлежит множеству A. Обозначение: $A = B$.

Определение 2. Множество A называется *подмножеством* множества B, если каждый элемент множества A принадлежит множеству B. Обозначение: $A \subset B$. Один из способов задать подмножество — задать свойство, которым обладают все его элементы: $\{x \in A \mid x$ обладает свойством …$\}$.

Задача 2. а) Пусть A — множество однозначных натуральных чисел. Запишите указанным в определении 2 способом его подмножество $\{2, 4, 6, 8\}$.

б) Пусть A — множество городов России. Перечислите элементы его подмножества $\{x \in A \mid$ число жителей города x на 1 января 2003 года более 1 000 000 человек$\}$.

Задача 3. Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого: $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1\}, 2, 3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$, $\{\{2, 1\}\}$.

Задача 4. Докажите, что множество A тогда и только тогда является подмножеством множества B, когда каждый элемент, не принадлежащий B, не принадлежит A.

Задача 5. Докажите, что для произвольных множеств A, B и C:
а) $A \subset A$; б) $A \subset B$ и $B \subset C \Rightarrow A \subset C$; в) $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$.

Определение 3. Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначение: $\varnothing$.

Задача 6. а) Докажите, что пустое множество является подмножеством любого множества.

б) Докажите, что пустое множество единственно.

Задача 7. Сколько элементов у каждого из следующих множеств: $\varnothing$, $\{1\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{\{1\}, 2, 3\}$, $\{\{1, 2\}, 3\}$, $\{\varnothing\}$, $\{\{2, 1\}\}$?

Задача 8. а) Для множеств из предыдущей задачи выпишите все их подмножества.

б) Сколько подмножеств у множества из одного элемента? из двух элементов? трех элементов?

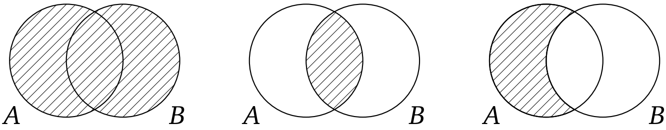
Задача 9. Верно ли, что множество летающих крокодилов является подмножеством множества учеников 8 «В» класса 57-й школы? Верно ли, что множество учеников 8 «В» класса 57-й школы является подмножеством множества классов 57-й школы?

Задача 10. Может ли у множества быть ровно: а) 0; б) 7; в) 16 подмножеств?

Определение 4. *Объединением* множеств A и B называется множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ или $x \in B$. Обозначение: $A \cup B$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.

Разностью множеств A и B называется множество, состоящее из всех таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \setminus B$.



Задача 11. Пусть даны множества $A = \{1, 3, 7, 137\}$, $B = \{3, 7, 23\}$, $C = \{0, 1, 3, 23\}$, $D = \{0, 7, 23, 2004\}$. Найдите множества:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup D$; г) $C \cap (D \cap B)$;
д) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; е) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$;
ж) $(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$; з) $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$;
и) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$; к) $((A \setminus (B \cup D)) \setminus C) \cup B$.

Задача 12. Пусть A — множество четных чисел, а B — множество чисел, делящихся на три. Найдите $A \cap B$.

Задача 13. Докажите, что для любых множеств A, B, C:

а) $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$;

б) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;
в) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$; $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
г) $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$.

Задача 14. Верно ли, что для любых множеств A, B, C:
а) $A\cap\varnothing=\varnothing$; $A\cup\varnothing=A$; б) $A\cup A=A$; $A\cap A=A$;
в) $A\cap B=A \iff A\subset B$; г) $(A\setminus B)\cup B=A$; д) $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$;
е) $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$; ж) $(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\cup B$?

Задача 15. а) Внутри фигуры площади 6 расположено три многоугольника площадью не менее 3 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1.

б*) Внутри фигуры площади 4 расположено 7 многоугольников площадью не менее 1 каждый. Докажите, что существует два многоугольника, площадь пересечения которых не менее 1/7.

Задача 16*. а) Можно ли записать пересечение двух множеств, используя только разность и объединение?

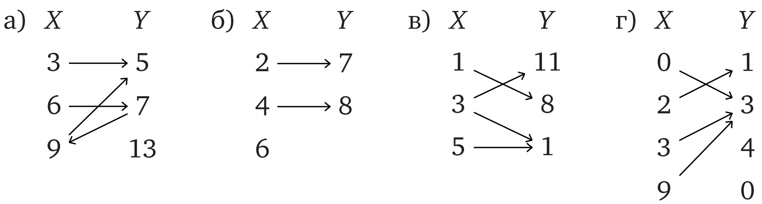
б) Можно ли записать разность двух множеств, используя только объединение и пересечение?

Теория множеств 2. Отображения множеств

листок 2 / сентябрь 2004

Определение 1. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие ровно один элемент $f(x)$ множества Y, то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y. При этом, если $f(x)=y$, то элемент y называется *образом* элемента x при отображении f, а элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f. Обозначение: $f: X \to Y$.

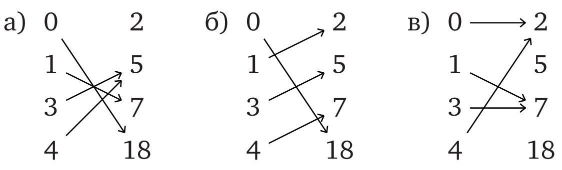
Задача 1. Какие из следующих картинок задают отображения?



Задача 2. Нарисуйте все возможные отображения из множества $\{7, 8, 9\}$ в множество $\{0, 1\}$.

Определение 2. Пусть $f: X \to Y$, $y \in Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$. *Полным прообразом элемента* y при отображении f называется множество $\{x \in X \mid f(x) = y\}$. Обозначение: $f^{-1}(y)$. *Образом множества* $A \subset X$ при отображении f называется множество $\{f(x) \mid x \in A\}$. Обозначение: $f[A]$. *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество $\{x \in X \mid f(x) \in \in B\}$. Обозначение: $f^{-1}[B]$.

Задача 3. Для отображения $f: \{0, 1, 3, 4\} \to \{2, 5, 7, 18\}$, заданного картинкой, найдите $f[\{0, 3\}]$, $f[\{1, 3, 4\}]$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}[\{2, 5\}]$, $f^{-1}[\{5, 18\}]$.



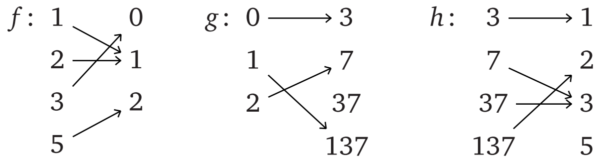
Задача 4. Пусть $f: X \to Y$, $A_1, A_2 \subset X$, $B_1, B_2 \subset Y$. Всегда ли верно, что:

а) $f[X] = Y$; б) $f^{-1}[Y] = X$; в) $f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2]$;
г) $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$; д) $f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]$;
е) $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$; ж) $f[A_1] \subset f[A_2] \Rightarrow A_1 \subset A_2$;
з) $f^{-1}[B_1] \subset f^{-1}[B_2] \Rightarrow B_1 \subset B_2$?

Определение 3. *Композицией отображений* $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ называется отображение, сопоставляющее элементу x множества X элемент $g(f(x))$ множества Z. Обозначение: $g\circ f$. (То есть композиция $g\circ f$ состоит в последовательном применении отображений f и g.)

Задача 5. Докажите, что для произвольных отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ и $h\colon Z\to W$ выполняется следующее: $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ (то есть скобки в выражении $h\circ g\circ f$ можно не писать).

Задача 6. Пусть $f\colon\{1,2,3,5\}\to\{0,1,2\}$, $g\colon\{0,1,2\}\to\{3,7,37,137\}$, $h\colon\{3,7,37,137\}\to\{1,2,3,5\}$ — отображения, показанные на рисунке:

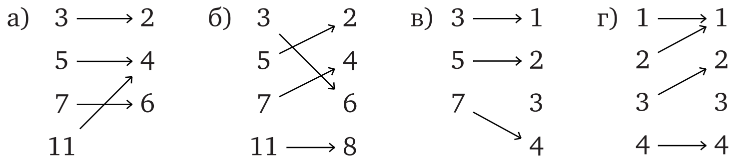


Нарисуйте картинки для следующих отображений:

а) $g\circ f$; б) $h\circ g$; в) $f\circ h\circ g$; г) $g\circ h\circ f$.

Определение 4. Отображение $f\colon X\to Y$ называется *биективным*, если для каждого $y\in Y$ найдется ровно один $x\in X$ такой, что $f(x)=y$.

Задача 7. Про каждое из отображений, изображенных на рисунке, выясните, является ли оно биективным:



Задача 8. Нарисуйте все биективные отображения а) из множества $\{1,2\}$ в множество $\{3,4,5,6\}$; б) из множества $\{1,2,3\}$ в множество $\{4,5,6\}$.

Задача 9. Пусть $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$. Верно ли, что если f и g биективны, то и $g\circ f$ биективно?

Определение 5. Отображение f называется *инъективным*, если оно разные элементы переводит в разные, т. е. если из $f(x)=f(x')$ следует, что $x=x'$.

Отображение $f\colon X\to Y$ называется *сюръективным*, если каждый элемент $y\in Y$ имеет хотя бы один прообраз, т. е. $f^{-1}(y)\neq\varnothing$ для любого $y\in Y$.

Задача 10. Докажите, что следующие свойства отображения $f\colon X \to Y$ эквивалентны:

1) f — биекция;

2) f сюръективно и инъективно;

3) f *обратимо*, то есть существует такое отображение[12] $g\colon Y \to X$, что $gf = \mathrm{Id}_X$, $fg = \mathrm{Id}_Y$, где $\mathrm{Id}_M : M \to M$, $m \mapsto m$ — *тождественное отображение*.

Задача 11. Про каждые два из следующих множеств выясните, существует ли между ними биекция:

а) множество натуральных чисел;

б) множество четных натуральных чисел;

в) множество натуральных чисел без числа 3;

г) множество целых чисел.

[12] Говорят, что g — обратное к f и пишут $g = f^{-1}$.

В книге использованы шрифты
гарнитуры ITC Charter.

Татьяна Игоревна Голенищева-Кутузова
Александр Дмитриевич Казанцев
Андрей Александрович Кустарёв
Юрий Георгиевич Кудряшов
Григорий Александрович Мерзон
Иван Валериевич Ященко

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ В ЗАДАЧАХ
(с решениями и комментариями)
Часть 1

Технический редактор *В. Ю. Радионов*

Тираж 2000 экз. Заказ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6