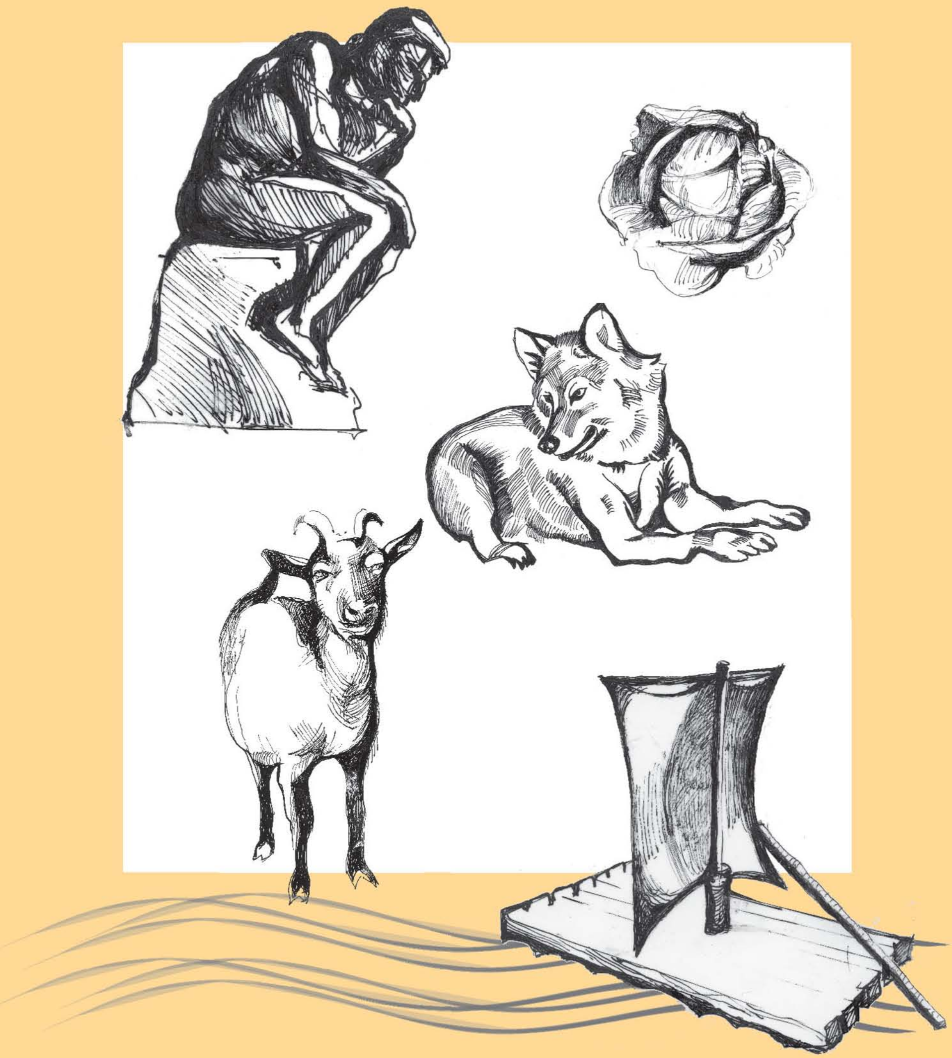
О. А. Иванов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

для школьников, студентов и преподавателей



О. А. Иванов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

для школьников, студентов
и преподавателей

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 51(07)
ББК 22.1
И20

Иванов О. А.

И20 Элементарная математика для школьников, студентов и преподавателей. — М.: МЦНМО, 2009. — 384 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-505-4

Книга состоит из десяти глав, названия большинства из которых вполне традиционны для книг, предназначенных для факультативных занятий по математике. В книге приведены более трехсот задач, бóльшая часть которых предлагается читателю для самостоятельного решения. Однако в каждой из глав рассматриваются не только элементарные задачи, но и связанная с ними теория.

Для старшеклассников школ с углубленным изучением математики и их учителей, студентов математических факультетов университетов и их преподавателей, а также всех, кто интересуется математикой и ее преподаванием.

ББК 22.1

ISBN 978-5-94057-505-4

Оглавление

Предисловие (*А. С. Меркурьев*) 7
Введение 9

Глава 1. **Индукция** 17
§1.1. Рассуждения «по индукции» 17
§1.2. Метод математической индукции 19
§1.3. Принцип математической индукции 23
§1.4. Аксиоматика Пеано 25
§1.5. Сложение, порядок и умножение 27
§1.6. Число элементов множества 31
Дополнительные задачи 33
Комментарии педагогического характера 34
Решения упражнений 36

Глава 2. **Комбинаторика** 40
§2.1. Элементарные задачи 40
§2.2. Числа сочетаний и рекуррентные соотношения 45
§2.3. Задача о перечислении графов 50
§2.4. Перестановки, размещения, сочетания 51
§2.5. Метод производящих функций 55
§2.6. Рекуррентные соотношения и свойства степенных рядов 57
§2.7. Теорема Эйлера 59
§2.8. Числа Каталана 64
§2.9. Число ячеек n-мерного пространства 66
Дополнительные задачи 69
Комментарии педагогического характера 71
Решения упражнений 72

Глава 3. **Целые числа** 79
§3.1. Элементарные задачи на делимость 79
§3.2. Алгоритм Евклида 83

§3.3. Сравнения по модулю и кольца вычетов 85
§3.4. Теоремы Ферма и Эйлера 88
§3.5. Распределение простых чисел 91
§3.6. Арифметические функции 93
§3.7. Алгебраические уравнения над кольцами вычетов 96
§3.8. Шифры с открытым ключом 99
§3.9. Множество целых чисел 100
§3.10. Кольца, поля, группы 102

Дополнительные задачи 106
Комментарии педагогического характера 107
Решения упражнений 107

Глава 4. **Геометрические преобразования** 113
§4.1. Параллельный перенос, поворот и симметрии в задачах 113
§4.2. Композиции в задачах 116
§4.3. Группа движений плоскости 121
§4.4. Алгебраические свойства геометрических фигур 125
§4.5. Координатные представления геометрических преобразований 128
§4.6. Орнаменты 134

Дополнительные задачи 137
Комментарии педагогического характера 139
Решения упражнений 140

Глава 5. **Неравенства** 145
§5.1. Средние двух чисел 145
§5.2. Неравенства и тождественные преобразования 149
§5.3. Неравенство Коши—Буняковского 152
§5.4. Неравенство Коши 153
§5.5. Теорема Мюрхеда 155
§5.6. Различные доказательства неравенства Коши 159
§5.7. Неравенство Йенсена 163
§5.8. Классические неравенства и геометрия 166
§5.9. Нормы и шары в $\mathbb{R}^n$ 169
§5.10. Интегральные варианты классических неравенств 172

Дополнительные задачи 174
Комментарии педагогического характера 176
Решения упражнений 176

Глава 6. **Графы** 185
§6.1. Начало теории графов 185
§6.2. Понятия и определения 189
§6.3. Паросочетания 192

§6.4. Деревья . . . 195
§6.5. Формула Эйлера и эйлерова характеристика . . . 198
§6.6. Формула Пика . . . 200
§6.7. Теорема Жордана . . . 203
§6.8. Графы для самых маленьких . . . 205
§6.9. Двоичные кучи . . . 207

Дополнительные задачи . . . 211
Комментарии педагогического характера . . . 213
Решения упражнений . . . 214

Глава 7. **Принцип Дирихле** 219
§7.1. Клетки и кролики . . . 219
§7.2. Комбинаторные теоремы существования . . . 222
§7.3. Плотные подмножества в $\mathbb{R}$ . . . 225
§7.4. Лемма Минковского . . . 229
§7.5. Суммы двух и четырех квадратов . . . 231

Дополнительные задачи . . . 234
Решения упражнений . . . 235

Глава 8. **Комплексные числа и многочлены** 239
§8.1. Многочлены: делимость и разложения на множители . . . 239
§8.2. Определение поля комплексных чисел . . . 241
§8.3. Комплексные числа в задачах . . . 245
§8.4. Комплексные числа и геометрия . . . 248
§8.5. Доказательство Конна теоремы Морли . . . 252
§8.6. Основная теорема высшей алгебры и «единственность» поля $\mathbb{C}$ . . . 255
§8.7. Формула Эйлера . . . 258
§8.8. Быстрое преобразование Фурье . . . 260

Дополнительные задачи . . . 263
Решения упражнений . . . 265

Глава 9. **Рациональные приближения** 269
§9.1. Хорошие приближения числа $\sqrt{2}$ . . . 269
§9.2. Задача о саде и ряды Фарея . . . 272
§9.3. Цепные дроби . . . 277
§9.4. Квадратичные иррациональности . . . 284
§9.5. Поле $\mathbb{Q}$ и поля частных . . . 288
§9.6. Числа алгебраические и трансцендентные . . . 290

Дополнительные задачи . . . 296
Комментарии педагогического характера . . . 297
Решения упражнений . . . 297

Глава 10. **Математика и компьютер** 305
§10.1. Введение в предмет 305
§10.2. Визуализация математических фактов и методов 310
§10.3. Анализ результата, или: «Как сделать открытие» 316
§10.4. Хаос, хаос 321
Дополнительные задачи 326
Комментарии педагогического характера 327
Решения упражнений 327

Вместо заключения: обучение поиску решения задач, или фантазии в манере Пойа 332

Решения дополнительных задач 340
К главе 1 340
К главе 2 344
К главе 3 349
К главе 4 352
К главе 5 358
К главе 6 361
К главе 7 365
К главе 8 367
К главе 9 370
К главе 10 373

Список литературы 377
Именной указатель 379
Предметный указатель 380

Предисловие

Для того чтобы книгу было интересно читать, в ней должен быть сюжет, даже в том случае, когда она посвящена математике. Более того, именно книга по математике для непрофессионалов должна быть написана так, чтобы даже профессионалу было интересно следить за развитием ее сюжета. Кроме того, такие книги должны обладать и литературными достоинствами. Всеми этими качествами обладает книга, которую вы сейчас держите в руках.

Она состоит из десяти математических глав-новелл, объединенных общими действующими лицами. К примеру, рассуждения «по индукции», обоснованию которых посвящена первая новелла, появятся и сыграют свою роль практических во всех последующих частях книги. С другой стороны, множество натуральных чисел — это первый пример так называемой *числовой системы*, развитию которых посвящены новеллы с номерами 3, 8 и 9. Такие внутренние взаимосвязи — обычное явление в этой книге.

Трудно определить жанр, в котором она написана. Это не задачник, не учебник, не «книга для чтения по математике». Более всего она напоминает хороший лекционный курс, из которого вдумчивый слушатель вынесет больше, чем ему было рассказано. Мне нравится, что каждая глава-новелла начинается с элементарных задач, служащих тем основанием, на котором строится дальнейшее изложение, и что автор всегда чувствует, когда ему следует остановиться при изложении теоретического материала. Мне нравится расположение и характер многочисленных упражнений, которые, с одной стороны, облегчают чтение книги, а с другой стороны — дают вдумчивому читателю возможность оценить свое понимание предмета.

Ту «элементарную математику», о которой идет речь в этой книге, могут понять учащиеся физико-математических школ. А прежде всего я бы посоветовал проникнуться ее идеями всех преподавателей таких школ, поскольку нельзя сводить углубленное обучение математике к изложению «высшей» математики на уровне технического университета.

Я бы хотел, чтобы её изучали все студенты математических факультетов педагогических университетов, поскольку не может быть хорошим учителем тот, для кого «школьная» математика заключается в решении разнообразных уравнений и неравенств путем бесхитростных или же хитроумных преобразований, а «высшая» математика сводится ко все более и более сложным понятиям и конструкциям, слабо связанным с тем, что в будущем придется излагать на школьных уроках.

Мне кажется, что эта «Элементарная математика» будет интересна и полезна преподавателям университетов, особенно работающим со студентами-младшекурсниками, как пример того, каким образом можно вводить новые понятия и показывать их необходимость, не перегружая слушателей техническими деталями и предоставляя им возможность поупражняться в их использовании.

Я надеюсь, что этой книге будет суждена долгая жизнь, чего она, конечно, заслуживает.

Доктор физико-математических наук А. С. Меркурьев,
профессор Калифорнийского университета (Лос-Анжелес)

Введение

О чем эта книга и для кого она написана

В 1995 году издательство Санкт-Петербургского государственного университета опубликовало книгу автора «Избранные главы элементарной математики» [11][1]. К сожалению, по-русски она была издана очень малым тиражом, поэтому автора никогда не покидала мысль подготовить ее второе издание. Однако при всех достоинствах тех «Избранных глав», у них был и существенный недостаток. Дело в том, что они были написаны по материалам лекционного курса для будущих учителей с университетской подготовкой. Поэтому автор, к примеру, свободно использовал понятие определителя для того, чтобы определить результант двух многочленов, или ссылался на теорему Фубини при вычислении объема 4-мерного шара. Большую часть «Избранных глав элементарной математики» вполне могли воспринять и старшеклассники, однако им, скорее всего, были непонятны переходы от элементарных задач к вопросам «высшей математики»; тем самым от них была скрыта основная идея той книги. Поэтому при обдумывании плана новой книги автор прежде всего решил написать ее так, чтобы она была доступна старшеклассникам и учителям школ с углубленным изучением математики. Хотя автор сохранил названия шести глав и часть содержащегося в них материала, однако «Элементарная математика» — это совсем другая книга.

Пусть вас не введет в заблуждение название — э л е м е н т а р н а я, ведь по существу это — м а т е м а т и к а. К великому сожалению, то, что изучают в школе, похоже на математику не больше, чем цветок на лугу со сверкающими в лучах восходящего солнца капельками росы на нем, похож на такой же цветок, много лет пылившийся между страницами гербария. В представлении автора термин «элементарная» означает то, что для понимания материала, во-первых, не нужно обладать развитым абстрактным мышлением и, во-вторых,

[1] В 1999 году вышел ее перевод на английский язык под названием «Easy as π?», а в 2000 году — на итальянский.

не требуются навыки в использовании изощренной техники математического анализа. Там, где будет естественным ввести понятия, не изучаемые в средней школе, приводятся необходимые определения и примеры. Для того, чтобы проявился смысл этих понятий, доказываются (немногочисленные) теоремы.

Таким образом, если вы знаете математику по крайней мере в объеме обычного школьного курса и вам она нравится настолько, что вы хотите узнать больше, если, кроме того, вы готовы серьезно потрудиться, то смело можете начинать изучать «Элементарную математику».

Содержание, основные идеи и структура

Книга состоит из 10 глав, названия большинства из которых вполне традиционны для книг, предназначенных для факультативных занятий по математике. В каждой из этих глав рассматриваются как элементарные задачи, так и непосредственно связанная с ними теория. Автор включил в книгу более 300 задач, бóльшая часть которых предлагается читателю для самостоятельного решения (их решения приведены в конце книги).

Необходимо сказать, что педагогический стиль автора вырабатывался под влиянием знаменитых книг Дъердя Пойя[2] и Феликса Клейна[3]. Основной целью этой книги является развитие математического мышления ее читателей. Как было отмечено ранее, автор не предполагает, что читатель обладает навыками использования абстрактных понятий и проведения использующих их логических рассуждений. Однако подобные понятия будут вводиться в разных главах этой книги. Характерным примером является данное в главе 1 («Индукция») введение аксиоматики Пеано для определения множества натуральных чисел и, в частности, обоснование на ее основе метода математической индукции. С другой стороны, теория бывает полезна для того, чтобы прояснился смысл некоторых задач. Простейшим примером является связь между задачей 3.5 и малой теоремой Ферма (теорема 3.8). Полезно заметить, что формулировка этой теоремы станет яснее, если мы воспользуемся определением сравнения чисел по данному модулю. Наконец, всегда интересно посмотреть на неожиданное применение разработанной теории. В главе 3 дано описание так называемых «шифров с открытым ключом», являющихся в настоящее время самым популярным методом шифрования, обеспечивающим конфиденциальность передаваемой

[2] Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975. — 464 с.

[3] Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. М.: Наука, 1987. — 482 с., Т. 2. 1987. — 431 с.

информации. Доказательство возможности шифрования-дешифрования как раз и основано на классических теоремах — малой теореме Ферма и теореме Эйлера 3.9.

Почти на каждой странице книги имеются разнообразные упражнения (в основном — теоретического характера); всего их более 200. Их первейшая роль — это развитие математической культуры читателя. Во многих случаях решение упражнения является частью доказательства некоторого утверждения. Однако решив его, вы не только устраните пробел в доказательстве, но и будете лучше понимать используемые понятия. Кроме того, автор рассчитывает, что наличие упражнений будет облегчать понимание доказательств, поскольку некоторые из них достаточно длинны. С этой целью рассуждение бывает разбито на несколько шагов. И нет необходимости при первом чтении книги разбираться во всех деталях, однако важно понимать формулировки. Если вы захотите всерьез разобраться в рассуждениях, то это можно будет сделать при повторном чтении. При этом автор рекомендует читателю сравнить найденные им решения с авторскими, приведенными в конце каждой главы.

То, что было сказано об упражнениях, относится и ко всей книге в целом. К примеру, в каждой главе есть параграфы, которые будут трудны для понимания. Пропустите их при первом чтении, вернее, прочитайте формулировки и не пытайтесь сразу разобраться в их доказательствах. Как вы увидите из оглавления, разделы этой книги слабо связаны друг с другом, поэтому их можно читать практически в любом порядке. Конечно, некоторые логические взаимосвязи между ними имеются. К примеру, для того, чтобы читать основную часть главы 4 («Геометрические преобразования»), надо познакомиться с понятием *группы*, введенном в последнем параграфе предыдущей главы. Каждому известно, что такое множество $\mathbb{Z}$, однако не торопитесь пропустить § 3.9 — «Множество целых чисел», где на очень простом и естественном примере вводится понятие фактормножества, без которого трудно обойтись, к примеру, при определении кольца вычетов.

Среди утверждений, приведенных в книге, имеются, можно сказать, математические шедевры, такие как:

- теорема Эйлера о соотношении между числами разбиений натурального числа на натуральные слагаемые (§ 2.7);
- теорема Эйлера 3.13 о частоте появления простых чисел в ряду натуральных чисел и теорема Гаусса 3.29 о цикличности группы обратимых элементов кольца вычетов по простому модулю;
- формула Эйлера (теорема 6.12) для плоских графов и доказательство Гильберта теоремы Жордана 6.18 для многоугольников;

- теорема Рамсея 7.5, лемма Минковского (теорема 7.12) и доказательства теорем Эйлера 7.14 и Лагранжа 7.15 о представлении чисел в виде сумм двух и четырех квадратов целых чисел;
- доказательство Гаусса о возможности построения правильного 17-угольника при помощи циркуля и линейки (теорема 8.9);
- доказательство Даламбера «основной теоремы высшей алгебры» 8.15 — существования комплексного корня непостоянного многочлена;
- формула Эйлера для комплексной экспоненты (§8.7).

Следующие конструкции и утверждения можно назвать «математическими изюминками»:

- построение шифров с открытым ключом (§3.8);
- классификация орнаментов (теорема 4.19);
- теорема Мюрхеда 5.4;
- формула Пика для площади многоугольника с вершинами в точках целочисленной решетки (теорема 6.17);
- построение эффективной сортировки при помощи двоичных куч (§6.9);
- лемма Дилворта (теорема 7.3), теоремы Эрдёша—Секереша 7.2 и Шпернера 7.4;
- доказательство Конна теоремы Морли 8.11 о точках пересечения трисектрис произвольного треугольника.

Однако стоит еще раз подчеркнуть, что большинство из перечисленных теоретических фактов, конструкций и утверждений имеют достаточно элементарные проявления. К примеру, теорема Рамсея — это обобщение известной задачи, в которой требуется доказать, что среди любых шести человек всегда найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Идея доказательства возможности построения правильного 17-угольника может быть проиллюстрирована на примере построения правильного пятиугольника. Для решения комбинаторных задач, рассматриваемых в главе 2, оказывается полезным понятие производящей функции. В этой же главе появляется понятие кольца (на примере кольца формальных степенных рядов), которое будет использоваться и в следующей главе 3 («Целые числа»). Целесообразность введения понятия группы отчетливо видна на примере рассматриваемых в главе 4 групп геометрических преобразований, и так далее.

Особняком стоит последняя глава 10 («Математика и компьютер»). Автору всегда было интересно, каким же разумным образом можно использовать современные пакеты символьных вычислений, такие как `Maple` и `Mathematica`, в преподавании математики. К примеру, кажется вполне неразумным использовать оператор `Plot[]` просто для того, чтобы просмотреть несколько десятков графиков, или оператор `Solve[]` для того, чтобы решить несколько десятков уравнений. С другой стороны будет неверно «связывать руки» ученику, утаивая возможности этих пакетов. Результаты размышлений и отражены в этой главе. Основная идея состоит в том, что после того, как на экране компьютера появился ответ, вот тогда-то и начинается решение задачи.

В заключение несколько слов об используемой в книге нумерации задач, утверждений и упражнений. Номер состоит из двух чисел, разделенных точкой; первое число — это номер главы. Второе число — это порядковый номер: а) теоретического утверждения (леммы, теоремы), б) задачи, в) упражнения; при этом нумерация каждого из этих типов ведется отдельно.

Использованные источники и рекомендуемая литература

Список литературы, использованной автором, приведен в конце книги. Ссылка на источник приводится в тех случаях, когда автор существенным образом использовал его в тексте этой книги. К примеру, изложение быстрого дискретного преобразования Фурье (§8.7 главы 8) основано на материале раздела 32 книги [15], а доказательства теорем Эйлера и Лагранжа о представлении чисел в виде сумм двух и четырех квадратов взяты из книги [19].

Что касается задач, то среди них есть небольшое число придуманных автором.[4] Основными источниками задач послужили книги [3], [6], [22] и [28], а задача 10.2 была взята из книги [20]. Однако про большинство задач в этой книге невозможно сказать, кто их придумал и где они были опубликованы в первый раз. Те, кто занимался кружковой работой по математике, их, так сказать, «давно и хорошо знают».

Из числа книг, указанных в списке использованной литературы, автор может рекомендовать для изучения книги [1], [3], [5], [6], [12], [13], [20]–[23], [28] и [30] (к сожалению, последняя из них не переведена на русский язык).

В нашей жизни многое определяется кругом общения. Автор благодарен своим коллегам по математико-механическому факультету

---

[4]Это означает, что ни автор, ни его коллеги не встречали их ранее.

Санкт-Петербургского государственного университета С. М. Ананьевскому, Б. М. Беккеру, В. Г. Быкову, В. М. Гольховому, Н. А. Вавилову за многочисленные беседы о математике и ее преподавании, за помощь, поддержку и конструктивную критику. Большую помощь автору оказали выпускник матмеха СПбГУ, учитель гимназии №261 Г. И. Вольфсон и выпускник Академической Гимназии СПбГУ Лев Сподынейко, внимательно прочитавшие рукопись книги. Автор признателен доценту матмеха А. Л. Громову за подготовку рисунков. Особая благодарность нашему бывшему коллеге, а ныне профессору Калифорнийского университета, А. С. Меркурьеву, написавшему Предисловие к этой книге и предоставившему автору возможность поработать с пакетом `Mathematica`. Автор выражает свою признательность Роберту Бёрнсу (Канада), который десять лет назад перевел на английский язык «Избранные главы элементарной математики», а в настоящее время работает над переводом «Элементарной математики».[5] Общение с ним доставляет искреннюю радость (уже не говоря о том, что благодаря ему были исправлены разнообразные неточности и опечатки).

Наконец, автор не может не сказать о той роли, которую в его жизни сыграла физико-математическая школа (ныне — гимназия) номер 30, короче — «тридцатка». Что такое математика, стало ясно уже там, и всего-навсего за те два года, которые мне и многим моим коллегам посчастливилось в ней учиться. Но об этом стоит рассказать более подробно, особенно потому, что в то время, когда автор писал эту книгу, пришла скорбная весть — ушел из жизни Иосиф Яковлевич Веребейчик, который для многих людей нашего поколения всегда останется в памяти, как *наш Учитель*.

Памяти Учителя

Иосиф Яковлевич Веребейчик был учителем-легендой. Трудно себе представить, но он работал в «тридцатке» немногим более десяти лет, а успел воспитать чуть ли не целое поколение математиков нашего города. Только на математико-механическом факультета СПбГУ его учениками являются: два профессора кафедры высшей алгебры и теории чисел, два профессора кафедры высшей геометрии, два профессора кафедры теоретической кибернетики, профессора кафедр математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, общей математики и информатики, а сколько их еще работает в других вузах и других странах!

---

[5] По заказу Американского математического общества.

А начиналось все с 9-го класса. Все мы, отличники обычных школ, радовались, когда получали хотя бы «три с двумя минусами» за контрольную работу. Настольной книгой для нас был «Моденов» [20], с большим удовольствием знакомились с аксиоматикой геометрии «по Гильберту» [7], изучали теорию площадей по статье В. А. Рохлина в «Энциклопедии элементарной математики»[6]. А когда Иосиф Яковлевич не смог выпутаться из возникших сложностей при введении понятия действительного числа посредством их десятичных представлений,

Иосиф Яковлевич Веребейчик
(23.03.1921 — 12.03.2007)

то автор взял и выучил дедекиндовы сечения «по Фихтенгольцу». Решали задачи, участвовали в «математических боях» — соревновании, придуманном Иосифом Яковлевичем. И что из того, что мало кто из моих одноклассников стал профессиональным математиком, у нас навсегда

[6] Т. 5. Геометрия. М.: Наука, 1966.– 624 с.

остались те качества, которые нам привил Веребейчик — ответственность и работоспособность, четкость и раскованность мышления, вера в свои силы — тот, кто «выжил», мог уже ничего не бояться! Эти два года были периодом самого интенсивного интеллектуального развития за всю нашу жизнь. Наверное, это и есть самое главное, за что мы так благодарны нашей школе.

Конечно, в тридцатой школе работали и другие, не побоюсь этого слова — выдающиеся, учителя, но в те годы И. Я. Веребейчик был лидером. «Все возвращается на круги своя», вот и наша школа вернулась на свое старое место в здание на углу 7-й линии и Среднего проспекта. «Не распалась цепь времен», наша (до сих пор — «наша»!) школа живет, учит, воспитывает, а одно из самых важных звеньев в этой цепи связано с именем Иосифа Яковлевича Веребейчика.

Санкт-Петербург, 2008 год

Глава 1

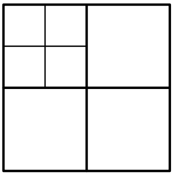
Индукция

§1.1. Рассуждения «по индукции»

В обычном понимании этого слова, *индукция* — это рассуждение, в котором мы идем от частного к общему. В общем-то, так оно есть и с математической точки зрения.

Задача 1.1. Докажите, что квадрат можно разрезать на 6, 8, 9 квадратов. На какое еще число квадратов можно разрезать квадрат?

Ответ: на любое число, отличное от 2, 3 и 5. Действительно, нетрудно разрезать квадрат на 6, 8, 9 квадратов, а разрезать его на семь совсем просто: достаточно в исходном квадрате, а затем в его четвертинке нарисовать «крестик» (рисунок). Это и есть основная идея — подрисовать крестик, увеличив количество квадратов на три. Следовательно, раз мы смогли разрезать квадрат на 6 квадратов, то сможем разрезать его на 9, на 12, на 15 квадратов, и так далее. Разрезав квадрат на 4 квадрата, мы далее сможем получить разрезания на: 7, 10, 13, и так далее квадратов.



Наконец, мы сможем разрезать его на 8, 11, 14, … квадратов. Таким образом, добавляя тройку нужное число раз, мы из чисел 6, 7 и 8 можем получить любое натуральное число, большее 5. Конечно, остается доказать, что квадрат невозможно разрезать на 5 квадратов (ясно, что его нельзя разрезать как на 2, так и на 3 квадрата).

Безусловно, на первых порах (особенно для младших школьников) таким рассуждением и следует ограничиться.

Аналогичным образом решается и следующая задача.

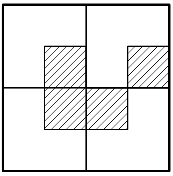
Задача 1.2. Докажите, что любую сумму, бо́льшую 7 копеек, можно уплатить, имея в кармане лишь трех- и пятикопеечные монеты (конечно, в неограниченном количестве).

Действительно, поскольку $8 = 3 + 5$, $9 = 3 + 3 + 3$ и $10 = 5 + 5$, то мы можем без сдачи заплатить 8, 9 и 10 копеек. Следовательно, добавив необходимое количество трехкопеечных монет, мы сможем уплатить любую сумму.

Еще одна хорошая задача подобного типа.

Задача 1.3. Докажите, что квадратную доску $2^n \times 2^n$, из которой удалена одна клетка, можно замостить «уголками»  .

Если из доски 2×2 удалить одну клетку, то как раз и останется «уголок». Теперь рассмотрим доску 4×4 с одной удаленной клеткой. Разделим ее на четыре доски 2×2 и положим уголок так, чтобы он не задевал квадрат, в котором находится удаленная клетка. Что останется — четыре уголка! Дальше рассуждаем аналогичным образом. Если разделить доску на четыре квадрата и положить уголок так, чтобы он не задевал квадрат, в котором находится удаленная клетка, то мы получим четыре квадрата вдвое меньшего размера, в каждом из которых не нужно накрывать ровно одну клетку. А такие квадраты мы уже умеем замощать!



Как вы видите, во всех рассмотренных задачах рассуждение шло от частного к общему, от рассмотрения частных примеров к некоторой общей идее, позволяющей неограниченно передвигаться от одного случая к другому.

Следующий пример интересен тем, что на первый взгляд кажется, что индукционный метод рассуждения здесь ни при чем.

Задача 1.4. Докажите, что если $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant e$, то

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 \geqslant (a - b + c - d + e)^2.$$

Бывает трудно решать задачи, являющиеся частным случаем некоторого общего факта, который еще предстоит найти. В нашем случае можно попробовать сначала решить более простую задачу. Итак, пусть $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - (a - b + c)^2 &= (a - b)(a + b) - (a - b)(a - b + 2c) = \\ &= (a - b)(2b - 2c) = 2(a - b)(b - c) \geqslant 0, \end{aligned}$$

следовательно, $a^2 - b^2 + c^2 \geqslant (a - b + c)^2$.

Значит,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + e^2 &\geqslant (a - b + c)^2 - d^2 + e^2 \geqslant \\ &\geqslant (a - b + c - d + e)^2, \end{aligned}$$

поскольку ясно, что $a - b + c \geqslant d$.

Упражнение 1.1. Найдите формулировку, обобщающую задачу 1.4.

Для решения последней задачи этого параграфа потребуется несколько бо́льшая техника, однако на ее примере ясно виден *метод математической индукции.*

Задача 1.5. Найдите наименьшее число c, такое что неравенство $n^3 \leqslant c \cdot 2^n$ справедливо при всех натуральных n.

Ясно, что искомое число c просто должно быть наибольшим элементом последовательности

$$x_n = \frac{n^3}{2^n}.$$

Прежде всего давайте немного посчитаем. Первыми элементами этой последовательности являются числа

$$\frac{1}{2}, 2, \frac{27}{8}, 4, \frac{125}{32}, \frac{216}{64} = \frac{27}{8}.$$

Видно, что начиная с четвертого элемента, каждое следующее число меньше предыдущего. Если мы докажем это, то отсюда и будет следовать, что член x_4 является наибольшим, значит, $c = 4$. Избавившись от знаменателей, раскрыв скобки и приведя подобные члены, преобразуем неравенство

$$x_n = \frac{n^3}{2^n} > \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} = x_{n+1}$$

к виду $n^3 > 3n^2 + 3n + 1$. Осталось заметить, что, так как $n \geqslant 4$,

$$n^3 \geqslant 3n^2 + n^2 \geqslant 3n^2 + 4n \geqslant 3n^3 + 3n + 4 > 3n^2 + 3n + 1.$$

Давайте еще раз посмотрим, на чем же основывалось утверждение о максимальности члена x_4 среди всех членов данной *бесконечной последовательности.* Вначале было установлено (посредством прямого подсчета), что значение x_4 больше, чем x_1, x_2 и x_3. Затем мы доказали, что $x_n > x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 4$. Значит, $x_4 > x_5 > x_6 > \ldots$ и так далее до бесконечности, откуда и следует, что $x_4 > x_n$ при всех $n \geqslant 5$.

§ 1.2. Метод математической индукции

С формальной точки зрения суть *метода математической индукции* состоит в том, чтобы избавиться от слов и так далее до бесконечности, другими словами, избавиться в рассуждениях от многоточий. Схема его такова. Предположим, что мы хотим доказать бесконечно много математических утверждений. Вернее, пусть нам требуется доказать что некоторое утверждение справедливо для произвольного натурального числа n: $\mathcal{P}(n)\ \forall n \in \mathbb{N}$. По существу в этом случае мы имеем дело с бесконечной последовательностью математических утверждений $\mathcal{P}(1)$, $\mathcal{P}(2)$, ... Казалось бы, почему бы не доказать сразу утверждение $\mathcal{P}(n)$ для п р о и з в о л ь н о г о натурального числа n? Однако приведенные в предыдущем пункте примеры показывают, что для того, чтобы доказать, к примеру, утверждение $\mathcal{P}(5)$, нам хорошо бы знать, что верно утверждение $\mathcal{P}(4)$. Предположим, что установлена справедливость самого первого из последовательности утверждений; итак, $\mathcal{P}(1)$ верно, — это *база индукции*. Теперь для произвольного k, в предположении, что верно утверждение $\mathcal{P}(k)$, установим справедливость следующего по очереди за ним утверждения $\mathcal{P}(k+1)$ — это *индукционный переход*. Тогда мы вправе утверждать, что справедливы все рассматриваемые утверждения $\mathcal{P}(n)$ при всех натуральных n.

Самым стандартным примером применения метода математической индукции является решение задачи 1.6. Однако давайте вначале рассмотрим использование этого метода на примере решения все той же задачи 1.5. Итак, мы хотим доказать, что $x_4 > x_n$ при всех $n \geqslant 5$. Нами доказано, что $x_n > x_{n+1}$ при всех натуральных $n \geqslant 4$. Базой индукции является неравенство $x_4 > x_5$. Проведем индукционный переход. Итак, предположим, что для некоторого (но произвольного) натурального числа n верно, что $x_4 > x_n$. Поскольку, как было доказано, $x_n > x_{n+1}$, то отсюда следует, что $x_4 > x_{n+1}$. Значит, в силу метода математической индукции, $x_4 > x_n$ при всех $n \geqslant 5$.

Решение следующей задачи — стандартный пример использования этого метода.

Задача 1.6. Докажите тождество

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Ясно, что это тождество верно при $n = 1$, тем самым база индукции установлена. Проведем индукционный переход, т. е. предполагая, что $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$, докажем, что $\sum\limits_{k=1}^{n+1} k^3 = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = \\ = \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}.$$

В разобранном примере метод математической индукции предстает как удобная схема доказательства заранее сформулированных утверждений.

Заметим, что мы можем как бы обойтись «без индукции», воспользовавшись тем, что

$$k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} - \frac{(k-1)^2k^2}{4},$$

и сложив равенства

$$\begin{gathered} 1^3 = 1^2 \cdot \frac{2^2}{4} - 0, \\ 2^3 = 2^2 \cdot \frac{3^2}{4} - 1^2 \cdot \frac{2^2}{4}, \\ \ldots \\ n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{(n-1)^2n^2}{4}. \end{gathered}$$

Однако предыдущее рассуждение, во-первых, проще, а во-вторых, в нем мы имеем дело только с двумя равенствами: тем, справедливость которого предполагается, и тем, справедливость которого мы хотим установить. Наконец, идея индукционных рассуждений состоит в том, чтобы обойтись без «многоточий» в доказательствах.

Задача 1.7 (о ханойской башне). На одну из трех палочек насажены 10 колец разного диаметра так, что меньшее кольцо лежит на большем. За какое наименьшее число перекладываний можно переложить их на другую палочку, пользуясь вспомогательной третьей, если в процессе перекладываний запрещено класть кольцо большего диаметра на меньшее?

Собственно говоря, для решения этой задачи нам не требуется использовать метод математической индукции, поскольку в ее условии дано конкретное число колец. Разобрав случаи $n = 1, 2, 3$, получим, что потребуются, соответственно, одно, три или семь перекладываний. Для того, чтобы переложить «башню» из четырех колец, необходимо: снять верхние три кольца, затем переложить нижнее кольцо на свободную палочку и, наконец, положить на него три кольца меньшего диаметра. Таким образом, потребуются $7 + 1 + 7 = 15$ перекладываний.

Решим задачу для произвольного числа n колец. Из приведенного рассуждения сразу следует рекуррентная формула для чисел p_n — наименьшего числа перекладываний для башни, состоящей из n колец:

$$p_{n+1} = 2p_n + 1.$$

Действительно, для того, чтобы переложить нижнее, $(n+1)$-е кольцо, нам вначале надо переложить n лежащих над ним колец, на что будет затрачено p_n перекладываний. Затем мы переложим нижнее кольцо и потратим еще p_n перекладываний, чтобы поместить на него n верхних колец.

В следующей таблице содержатся числа p_n для $n=1,2,\ldots,7$.

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	1	3	7	15	31	63	127

Нетрудно догадаться, что $p_n=2^n-1$. После этого осталось сделать последний шаг, состоящий в применении метода математической индукции для доказательства найденной формулы. Таким образом, осталось решить следующую задачу.

Задача 1.8. Известно, что $x_1=1$ и $x_{n+1}=2x_n+1$. Докажите, что $x_n=2^n-1$.

База индукции: $x_1=1=2^1-1$.
Индукционный переход: если $x_n=2^n-1$, то

$$x_{n+1}=2x_n+1=2\cdot(2^n-1)+1=2^{n+1}-2+1=2^{n+1}-1.$$

Задача о ханойской башне является одной из лучших задач на индукционный метод рассуждения, в ее решении собственно «метод математической индукции» играет не слишком содержательную роль. Анализ приведенного решения показывает, что существо решения — в построении так называемого *рекурсивного алгоритма*. Именно, пусть $\mathcal{T}_n(i,j)$ — это последовательность перекладываний, которые следует произвести, чтобы n колец перекочевали с i-й палочки из данных трех на j-ю. Тогда

$$\mathcal{T}_1(i,j)=\{\,\text{переложить кольцо с } i\text{-й на } j\text{-ю палочку}\,\},$$

и $\mathcal{T}_{n+1}(i,j)=\{\mathcal{T}_n(i,k),\mathcal{T}_1(i,j),\mathcal{T}_n(k,j)\}$.

Задача 1.9. На сколько частей разделят: а) прямую n точек; б) плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке?

> То, что n точек разделят прямую на $n+1$ промежуток, совсем очевидно. Что же здесь доказывать и при чем здесь индукция? Суть дела в том, что первый пункт данной задачи является подсказкой к решению второго.

Итак, пусть n прямых (никакие две из которых не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке) делят плоскость на c_n областей. Проведем еще одну прямую, которая будет иметь n точек пересечения с имеющимися прямыми — по одной с каждой из них. Следовательно, эти точки разбивают прямую на $n+1$ промежуток, каждый из которых разбивает одну из $n+1$ областей на две, таким образом, $c_{n+1} = c_n + n + 1$. Осталось заметить, что $c_1 = 2$, значит,

$$c_n = c_{n-1} + n = 1 + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

Рассмотренную задачу можно было сформулировать по-другому: на какое наибольшее число областей могут разбить плоскость n прямых? При такой постановке учащимся необходимо самим наложить сформулированные в задаче геометрические условия на набор прямых (так называемые «условия общего положения»). Интересно, что и в случае произвольного набора прямых существует формула для числа образовавшихся областей.

Упражнение 1.2. Пусть данные n прямых пересекаются в s точках. Обозначим через $k_1, k_2, \ldots, k_s$ число прямых, проходящих через каждую из этих общих точек. Докажите, число областей, на которые данные прямые разбили плоскость, равно $n + 1 + \sum_{i=1}^{s}(k_i - 1)$.

Встречаются задачи, в которых индукцию непосредственно применить не удается, однако более сильное утверждение может быть доказано без труда.

Задача 1.10. Докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}.$$

Обозначив через a_n левую часть неравенства, получим, что

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = a_n + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > a_n,$$

поэтому неясно, как из неравенства $a_n < \frac{3}{4}$ получить, что $a_{n+1} < \frac{3}{4}$. Однако нетрудно видеть, что если $a_n \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$, то $a_{n+1} \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4n+4}$ (докажите это), поэтому $a_n \leqslant \frac{3}{4} - \frac{1}{4n} < \frac{3}{4}$ при всех натуральных n.

§ 1.3. Принцип математической индукции

То, что доказательство при помощи «метода математической индукции» действительно является доказательством, представляется очевидным. Действительно, раз верно $\mathcal{P}(1)$, то верно и $\mathcal{P}(2)$, поэтому верно $\mathcal{P}(3)$, и так далее!

Сомневающимся можно предложить следующее рассуждение. Пусть некоторое утверждение верно при $n=1$; из предположения, что оно верно при $n=k$, следует, что это утверждение верно при $n=k+1$, однако оно справедливо не при всех натуральных n. Рассмотрим наименьшее число n_0, при котором данное утверждение является неверным, ясно, что $n_0 > 1$. Число $n_0 - 1$, тем самым, является натуральным, и для него данное утверждение справедливо, но в таком случае это утверждение должно быть верным и для n_0.

У совсем неверующих может возникнуть следующий вопрос: а почему любое подмножество $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент, ведь ясно, что для подмножеств множества $\mathbb{Q}$ это может не иметь места! Итак, пусть $a \in \mathcal{E} \subset \mathbb{N}$. Если число a не наименьшее, то найдется $a^{(1)} < a$, где $a^{(1)} \in \mathcal{E}$. Если и $a^{(1)}$ — не наименьшее, то выберем $a^{(2)}$, и так далее, пока не дойдем до единицы, которая меньше любого другого натурального числа. Но как бы нам и здесь суметь обойтись без слов «и так далее»?

То, что метод математической индукции действительно верен — это, как мы далее увидим, следует из аксиом, определяющих множество натуральных чисел. Когда говорят о *принципе математической индукции*, то и имеют в виду справедливость метода математической индукции.

Каким образом можно описывать б е с к о н е ч н ы е математические объекты, к примеру, такие, как различные числовые множества? Как вы увидите далее в главах 3, 8 и 9 этой книги, зная, что такое $\mathbb{N}$, посредством некоторых конструкций можно построить множество $\mathbb{Z}$ целых чисел и множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел; зная, что́ есть множество $\mathbb{R}$ действительных чисел, можно построить множество $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Но с чего-то надо начинать, любая конструкция покоится на некотором основании. Оставшаяся часть этой главы как раз и посвящена описанию того, что же представляет из себя такое привычное множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел. В дальнейшем мы докажем, а пока примем как факт то, что *в любом подмножестве множества* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел имеется наименьший элемент.*

Встречаются ситуации, в которых нам недостаточно знать, что некоторое утверждение верно при данном n, чтобы можно было сразу доказать, что оно справедливо также для $n+1$. С подобными примерами мы уже встречались, см. задачи 1.1 и 1.2.

Задача 1.11. Докажите, что всякий (не обязательно выпуклый) многоугольник можно разбить на треугольники его непересекающимися (во внутренних точках) диагоналями.

Упражнение 1.3. Докажите, что во всяком многоугольнике существует диагональ, лежащая внутри него.

Воспользуемся результатом упражнения 1.3 и будем рассуждать по индукции (по числу сторон многоугольника). Если он является треугольником, то доказывать нечего. Теперь предположим, что утверждение задачи верно для всякого многоугольника с числом сторон, меньшим n. Рассмотрим произвольный n-угольник. В силу результата упражнения 1.3, у него существует диагональ, разбивающая его на два многоугольника с меньшим числом сторон. Поскольку (в силу сделанного предположения) каждый из них разбивается диагоналями на треугольники, то и данный n-угольник разбивается на треугольники.

При решении этой задачи мы использовали метод математической индукции в его, так сказать, расширенной форме. Теперь докажем, что мы имели право это делать.

Теорема 1.1. *Пусть* $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\in\mathcal{N}}$ *— последовательность математических утверждений. Предположим, что верно утверждение* $\mathcal{P}(\ell)$ *и для всякого натурального числа* n *из того, что утверждения* $\mathcal{P}(k)$ *верны при* $\ell \leqslant k \leqslant n$, *следует, что верно утверждение* $\mathcal{P}(n+1)$. *Тогда утверждения* $\mathcal{P}(n)$ *верны при всех натуральных* $n \geqslant \ell$.

Рассмотрим число

$$n_0 = \min\bigl\{n \in \mathcal{N} \mid n \geqslant \ell \ \text{ и } \ \mathcal{P}(n) \ \text{ неверно}\bigr\}.$$

Поскольку $\mathcal{P}(n_0)$ — неверное утверждение, то $n_0 > \ell$. В силу выбора числа n_0 утверждение $\mathcal{P}(k)$ верно при $k = \ell, \ell+1, \ldots, n_0-1$, значит, по основному предположению, верно и утверждение $\mathcal{P}(n_0)$. Полученное противоречие доказывает теорему. $\square$

§ 1.4. Аксиоматика Пеано

Итак, что же представляет собой *множество* $\mathbb{N}$ *натуральных чисел*?

Рассмотрим произвольную тройку $\{\mathcal{N}, 1, s\}$, состоящую из:

- некоторого множества $\mathcal{N}$,
- отмеченного в нем элемента, обозначаемого 1,
- отображения $s\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$.

Предположим, что эта тройка удовлетворяет следующим свойствам, которые называются *аксиомами Пеано*:

(Пе1) если $x, y \in \mathcal{N}$ и $x \neq y$, то $s(x) \neq s(y)$;

(Пе2) отмеченный элемент 1 не является образом никакого элемента множества $\mathcal{N}$ при отображении s;

(Пе3) если M — подмножество $\mathcal{N}$, такое что $1 \in M$ и $s(x) \in M$ для всякого $x \in M$, то $M = \mathcal{N}$.

Аксиома (Пе1) попросту означает, что отображение s является *инъективным*.[1] Теперь вспомним, что *образом* $f(A)$ *множества* $A \subset X$ *при отображении* $f\colon X \to Y$ называется множество, состоящее из образов $f(a)$ всех элементов $a \in A$,

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}.$$

Таким образом, аксиома (Пе2) может быть записана в виде: $1 \notin s(\mathcal{N})$. Далее, будем называть подмножество M множества $\mathcal{N}$ *индуктивным*, если $1 \in M$ и $s(M) \subset M$. Последнюю аксиому (Пе3) можно сформулировать так: в $\mathcal{N}$ не существует нетривиальных, т. е. отличных от $\mathcal{N}$, индуктивных подмножеств. Данная аксиоматика была введена в 90-х годах позапрошлого века итальянским математиком Пеано. С привычной точки зрения, $s(x)$ — это следующее за x натуральное число, т. е. $x+1$, однако сложение в множестве $\mathcal{N}$ еще предстоит определить.

Извлечем первые следствия из аксиом Пеано.

Лемма 1.2. *Справедливо равенство* $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus 1$, *и* $s(a) \neq a$ *при всех* $a \in \mathcal{N}$.

Все, что надо доказать — это индуктивность множеств

$$M_1 = \{1\} \cup s(\mathcal{N}) \quad \text{и} \quad M_2 = \{a \in \mathcal{N} \mid s(a) \neq a\}.$$

По определению множества M_1 оно содержит отмеченный элемент 1. Далее, если $a \in M_1$, то $s(a) \in M_1$ просто потому, что M_1 содержит образы вообще всех элементов множества $\mathcal{N}$. В силу аксиомы (Пе3), $M_1 = \mathcal{N}$, а так как $1 \notin s(\mathcal{N})$ в силу аксиомы (Пе2), то $s(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \setminus 1$. Докажите самостоятельно индуктивность множества M_2 (используйте сначала аксиому (Пе2), а потом (Пе1)). □

Операцией в множестве является некоторое отображение F, сопоставляющее паре (a,b) элементов этого множества его элемент $c = F(a,b)$. Стандартными примерами, которые далее нас и будут интересовать, являются обычные *арифметические операции*: сложение и умножение. Их известными свойствами являются *коммутативность* ($a+b = b+a$ и $ab = ba$) и *ассоциативность* ($a+(b+c) = (a+b)+c$ и $a(bc) = (ab)c$). Конечно, сами эти операции нам еще предстоит определить.

Коммутативность операции равносильна симметричности отображения F, т. е. тому, что $F(a,b) = F(b,a)$, а ассоциативность равносильна свойству:

$$F(a, F(b,c)) = F(F(a,b), c).$$

[1] Это и означает, что образы различных точек различны.

Рассмотрим операцию F в множестве $\mathcal{N}$, обладающую следующими свойствами:

(Сл1) $F(a,1)=s(a)$ при всех $a\in\mathcal{N}$;
(Сл2) $F\left(a,s(b)\right)=s\left(F(a,b)\right)$ при всех $a,b\in\mathcal{N}$.

Теорема 1.3. *Операция $F\colon\mathcal{N}\times\mathcal{N}\to\mathcal{N}$, удовлетворяющая свойствам* (Сл1), (Сл2), *ассоциативна и коммутативна.*

Докажем ассоциативность. Фиксируем $a,b\in\mathcal{N}$, пусть

$$M=\left\{c\in\mathcal{N}\mid F\left(a,F(b,c)\right)=F\left(F(a,b),c\right)\right\}.$$

Поскольку

$$F\left(a,F(b,1)\right)\overset{(\text{Сл}1)}{=}F\left(a,s(b)\right)\overset{(\text{Сл}2)}{=}s\left(F(a,b)\right)\overset{(\text{Сл}1)}{=}F\left(F(a,b),1\right),$$

то $1\in M$. Пусть $c\in M$, тогда

$$\begin{aligned}F\left(a,F\left(b,s(c)\right)\right)=F\left(a,s\left(F(b,c)\right)\right)=s\left(F\left(a,F(b,c)\right)\right)=\\ =s\left(F\left(F(a,b),c\right)\right)=F\left(F(a,b),s(c)\right)\end{aligned}$$

(в последнем переходе мы воспользовались тем, что $c\in M$), значит, $s(c)\in M$. Таким образом, M — индуктивное множество, следовательно, $M=\mathcal{N}$.

Упражнение 1.4. Докажите второе утверждение теоремы.

Теорема 1.4. *Существует не более одного отображения, удовлетворяющего свойствам* (Сл1), (Сл2).

Фиксируем элемент $a\in\mathcal{N}$ и рассмотрим множество

$$M=\left\{b\in\mathcal{N}\mid F(a,b)=F'(a,b)\right\},$$

где F и F' — отображения со свойствами (Сл1), (Сл2). Поскольку $F(a,1)=s(a)=F'(a,1)$, то $1\in M$. Пусть $b\in M$, тогда $F\left(a,s(b)\right)=s\left(F(a,b)\right)=s\left(F'(a,b)\right)=F'\left(a,s(b)\right)$, значит, $s(b)\in M$, т. е. M — индуктивное множество, поэтому $M=\mathcal{N}$, тем самым $F=F'$. □

§ 1.5. Сложение, порядок и умножение

Оказывается, что аксиомы Пеано, определяющие множество натуральных чисел, можно использовать для того, чтобы ввести в нем арифметические операции, а также отношение порядка. Первым на этот факт обратил внимание немецкий математик Г. Грассман.

Олег Александрович Иванов

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ, СТУДЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

Редакторы: Васильева О. А., Коноваленок Е. А.
Оригинал-макет: Мешков И. Р.
Художник: Обатнина Т. А.

Подписано в печать 17.09.2015 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 24. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.