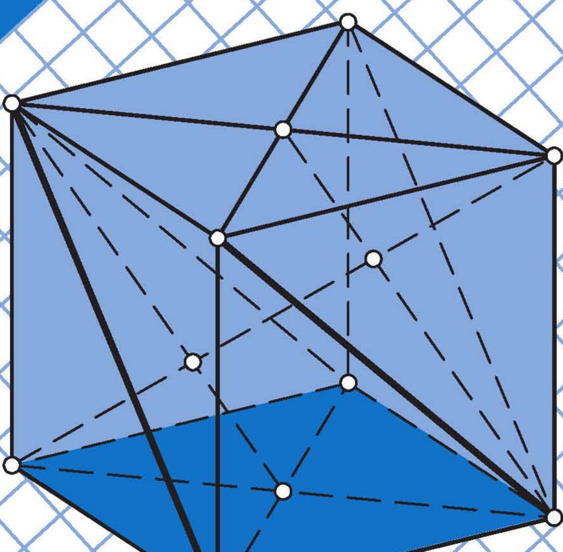
Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТОМ 2



СТЕРЕОМЕТРИЯ

Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Том 2

СТЕРЕОМЕТРИЯ, ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П56

Понарин Я. П.

П56 Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2015.— 256 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0367-5
ISBN 978-5-4439-0369-9 (том 2)

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ с математической специализацией. Оно содержит углубленное и расширенное изложение геометрии. В нем изложена теория прямых и плоскостей, трехгранных углов, тетраэдров, сфер и других тел. Рассмотрены методы доказательства геометрических неравенств и нахождения экстремумов. Много внимания уделено преобразованиям пространства — движениям, подобиям и аффинным преобразованиям. Книга включает около 500 задач для самостоятельного решения с указаниями и ответами.

Книга может быть использована для внеклассной работы с учащимися, для самообразования учителей, для спецкурсов и спецсеминаров по элементарной геометрии в педагогических вузах.

Предыдущее издание книги вышло в 2008 г.

ББК 22.151.0

Яков Петрович Понарин

Элементарная геометрия
Том 2. Стереометрия, преобразования пространства

Редактор Семенов А. В.

Подписано в печать 04.08.2015 г. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 16. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в «Академиздатцентр „Наука“ РАН»,
ОП Производственно-издательский комбинат «ВИНИТИ» — «Наука»,
140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.
Тел./факс: (495) 554–21-86, (495) 554–25–97, (495) 974–69–76.

ISBN 978-5-4439-0367-5
ISBN 978-5-4439-0369-9 (том 2)

Оглавление

Глава 3. Ортогональное проектирование

Глава 4. Геометрические места точек пространства

Глава 5. Векторное и смешанное произведения векторов

Глава 6. Тетраэдр

Глава 7. Вычисление объемов тел

Глава 8. Сфера

Глава 9. Стереометрические неравенства и экстремумы

Часть II. Преобразования пространства

Глава 10. Движения пространства

Глава 11. Подобия пространства

Глава 12. Аффинные преобразования

Предисловие

Эта книга предназначена для учащихся школ, лицеев, гимназий с математической специализацией. Она является непосредственным продолжением учебного пособия [8] того же автора. Обе эти книги содержат углубленное изложение планиметрии и стереометрии для желающих знать больше школьного уровня и научиться лучше решать задачи. Их содержание находится, образно говоря, посредине между школьной и вузовской геометриями.

К написанию книги автора побудило большое желание привлечь внимание педагогов-математиков к неиспользуемому стереометрическому арсеналу, обладающему значительным потенциалом в образовательном и воспитательном аспектах. Возрастающее стремление к «урезаниям» математического содержания среднего образования может иметь в будущем непоправимые негативные последствия. Не являясь сторонником «широкого охвата», автор хочет помочь желающим иметь возможность овладевать геометрическим богатством.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — собственно стереометрическая, вторая содержит преобразования пространства — движения, подобия, аффинные преобразования. Содержание не регламентировано заранее заданной программой. Оно сложилось в процессе многолетней работы автора со студентами педагогического института (университета), а также с учащимися физико-математического лицея г. Кирова и с учащимися Белорецкой компьютерной школы Башкортостана.

Автор не ставил целью пересказывать материал действующих школьных учебников, а стремился углубить и расширить его, показать применение излагаемых фактов к решению содержательных математических задач. Единственным отступлением от этого принципа служит первая глава «Прямые и плоскости», которая по существу является вводной к всему остальному материалу, но и она имеет оригинальные подходы к некоторым определениям и доказательствам теорем. Ее полезно прочитать читателю, даже хорошо знающему школьный учебник.

В имеющейся учебной литературе геометрические преобразования пространства освещены недостаточно. Изложение либо фрагментарно, либо архаично с точки зрения терминологии и методов доказательств. Удалось изложить теорию преобразований пространства с существенными упрощениями.

Важной частью содержания пособия являются задачи, в основном заимствованные из задачного материала отечественной учебной литературы. Их количество не очень велико, однако вполне достаточно для достижения поставленной цели. Обращаем внимание читателя, что разбор приведенных авторских решений и самостоятельное решение задач из списков, данных в конце каждой главы, должно составить необходимую часть его работы. Учитывая критические замечания педагогов, пользующихся пособием [8], автор решил отказаться от развернутых «указаний», а ограничиться только подсказками и ответами.

Нельзя обещать легкого чтения книги. Надеемся на желание и настойчивость читателя. Предполагается знание действующих школьных учебников.

Пособие может быть использовано в педагогических вузах при подготовке учителей математики для чтения спецкурсов и проведения спецсеминаров, темами которых могут служить выбранные главы. Автор надеется, что книга окажет помощь в самообразовании учителей и во внеклассной работе с учащимися, в частности, при подготовке к математическим олимпиадам.

Я. П. Понарин

Часть I

Стереометрия

Глава 1

Прямые и плоскости

§1. *Параллельные прямые и плоскости*

1.1. Параллельность прямой и плоскости. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Из этого определения сразу следует критерий параллельности прямой и плоскости.

Теорема 1. *Прямая m параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда в этой плоскости существует некоторая прямая p, параллельная данной прямой m.*

Доказательство. Пусть $m \parallel \alpha$. Проведем через прямую m произвольную плоскость β, пересекающую плоскость α (рис. 1). Тогда прямая p пересечения плоскостей α и β параллельна прямой m, так как в противном случае прямая m пересекала бы плоскость α. Обратно, если в плоскости α имеется некоторая прямая p, параллельная прямой m, то $m \parallel \alpha$, поскольку если бы m пересекала α, то их общая точка лежала бы на прямой p, что противоречит условию $m \parallel p$. □

Очевидно, при $m \parallel \alpha$ в плоскости α существует бесконечное множество (*пучок*) прямых, каждая из которых параллельна m. Доказанный критерий мог бы быть принят в качестве *определения* параллельности прямой и плоскости.

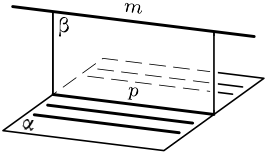


Рис. 1

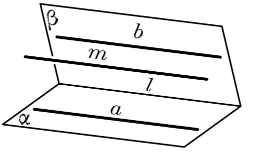


Рис. 2

Теорема 2. *Если прямая m параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей α и β, то она параллельна их линии пересечения.*

Доказательство. Пусть $m \parallel \alpha$ и $m \parallel \beta$. Согласно теореме 1 в плоскости α существует прямая a, параллельная m, в плоскости β существует прямая b, параллельная m (рис. 2). Тогда $a \parallel b$ (транзитивность параллельности прямых). По той же теореме 1 $a \parallel \beta$ и, значит, прямая a параллельна прямой $l = \alpha \cap \beta$, так как иначе a пересекала бы β. Из $m \parallel a$ и $l \parallel a$ следует $m \parallel l$. □

Обратное утверждение очевидно на основании достаточного условия критерия параллельности прямой и плоскости.

Теорема 3. *Если три плоскости попарно пересекаются и не имеют общей прямой, то прямые их пересечения либо имеют общую точку, либо параллельны.*

Доказательство. Пусть даны плоскости α, β и γ и $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, $\alpha \cap \beta = c$. По условию прямая c не лежит в плоскости γ. Для нее возможны только два случая: либо прямая c пересекает плоскость γ в некоторой точке M, либо $c \parallel \gamma$. В первом случае будет $M \in a$ и $M \in b$, т. е. $M \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Тогда точка M будет общей точкой прямых a, b и c (рис. 3, а). Во втором случае по теореме 2 будет $c \parallel a$ и $c \parallel b$ (рис. 3, б). □

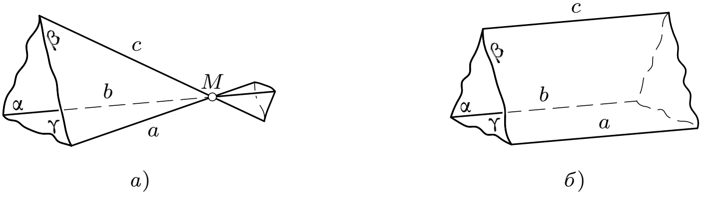


Рис. 3

1.2. Параллельность двух плоскостей. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 4. *Если в одной из двух данных плоскостей существуют две непараллельные прямые, каждая из которых параллельна другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство. Пусть даны плоскости α и β, прямые a и b непараллельны и лежат в плоскости α, $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$. Если бы плоскости α и β пересекались по некоторой прямой l, то по теореме 2 было бы $a \parallel l$ и $b \parallel l$, откуда $a \parallel b$, что противоречит условию теоремы. □

Если плоскости параллельны, то любая прямая одной плоскости параллельна другой плоскости. Если же плоскости пересекаются, то в каждой из них имеется пучок параллельных прямых, параллельных другой плоскости (все они параллельны линии пересечения этих плоскостей).

Задача. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a. Соответственно параллельные им плоскости β и β_1 пересекаются по прямой b. Доказажите, что прямые a и b параллельны.

Решение. Из $\alpha \parallel \beta$ и $a \subset \alpha$ следует $a \parallel \beta$. С равным правом $a \parallel \beta_1$. По теореме 2 будет $a \parallel b$.

§ 2. *Перпендикулярные прямые и плоскости*

2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости. Две *пересекающиеся* прямые называются *перпендикулярными*, если один из углов между ними равен своему смежному. Две *скрещивающиеся* прямые называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны соответственно параллельные им пересекающиеся прямые.

Прямая и плоскость называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна *каждой* прямой, лежащей в данной плоскости.

Теорема 5 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна каждой из двух непараллельных прямых данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямые a и b непараллельны и лежат в плоскости α; прямая h им перпендикулярна, m — *произвольная* прямая плоскости α (рис. 4). Докажем, что $h \perp m$. Для этого выберем ненулевые векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{h}$, $\overline{m}$, коллинеарные соответственно прямым a, b, h, m. Вектор $\overline{m}$ разложим по неколлинеарным векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$: $\overline{m} = x\overline{a} + y\overline{b}$. Согласно распределительному закону скалярного умножения

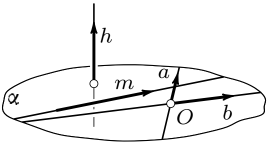


Рис. 4

$$\overline{m}\,\overline{h} = x(\overline{a}\,\overline{h}) + y(\overline{b}\,\overline{h}).$$

По условию теоремы $\overline{a}\,\overline{h} = 0$ и $\overline{b}\,\overline{h} = 0$. Тогда и $\overline{m}\,\overline{h} = 0$, т. е. $h \perp m$. По определению перпендикулярности прямой и плоскости и в силу произвольного выбора прямой m плоскости α прямая h перпендикулярна этой плоскости. □

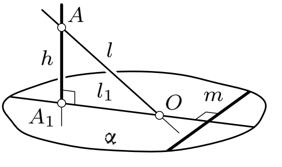


Рис. 5

Далее традиционным способом можно построить плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой, т. е. доказать существование такой плоскости, и доказать существование и единственность перпендикуляра к плоскости, содержащего данную точку ([2], с. 39–41).

Теорема 6 (о трех перпендикулярах). *Для того чтобы прямая m, лежащая в плоскости α (или в плоскости, ей параллельной), была перпендикулярна наклонной к плоскости α, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая m была перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на плоскость α.*

Доказательство. Пусть прямая $l = (AO)$ — наклонная к плоскости α, $h = (AA_1)$ — перпендикуляр к α. Тогда $(OA_1) = l_1$ — ортогональная проекция прямой l на α (рис. 5). Пусть $m \subset \alpha$, $m \perp l_1$. Тогда $h \perp m$ по определению перпендикулярности прямой и плоскости и прямая m перпендикулярна плоскости (OAA_1) (теорема 5). Поэтому $m \perp l$. Обратно, если предположить, что $m \perp l$, то будет следовать $m \perp l_1$. $\square$

Задача 1. В тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB, OC попарно перпендикулярны. Докажите, что основание H высоты OH этого тетраэдра есть ортоцентр треугольника ABC (рис. 6).

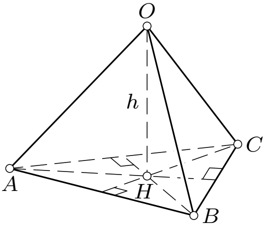


Рис. 6

Решение. Поскольку $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то $OA \perp (OBC)$ и поэтому $OA \perp BC$. Прямая AH есть проекция прямой OA на плоскость ABC. Так как $BC \perp OA$, то по теореме 6 $BC \perp AH$. Аналогично $AB \perp CH$ и $CA \perp BH$, т.е. точка H — ортоцентр треугольника ABC.

Задача 2. На перпендикуляре h к плоскости остроугольного треугольника ABC в его ортоцентре H выбрана точка O так, что угол AOB является прямым. Докажите, что углы BOC и COA также прямые.

Решение. По условию $OH \perp (ABC)$ и $BC \perp AH$ (рис. 6). По теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AO$. Из того, что $AO \perp BC$ и $AO \perp OB$ следует $AO \perp OC$. Аналогично $BO \perp OC$.

2.2. Перпендикулярность двух плоскостей. Плоскость α называется *перпендикулярной* плоскости β, если она содержит перпендикуляр h к плоскости β (рис. 7):

$$\alpha \perp \beta \Longleftrightarrow (\exists h \subset \alpha \mid h \perp \beta).$$

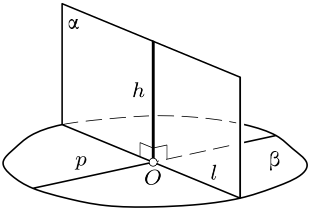


Рис. 7

В этом определении плоскости α и β занимают неравноправное положение. Поэтому надо доказать, что *из* $\alpha \perp \beta$ *следует* $\beta \perp \alpha$. Для этого построим в плоскости β перпендикуляр p к прямой l пересечения плоскостей α и β в точке $O = \beta \cap h$. Тогда $p \perp \alpha$, так как $h \perp p$ и $p \perp l$. Следовательно, в плоскости β существует перпендикуляр p к плоскости α. Согласно принятому определению $\beta \perp \alpha$.

Следствие. *Если плоскости* α *и* β *перпендикулярны, то все перпендикуляры к плоскости* β*, проведенные из точек плоскости* α*, лежат в плоскости* α*,* поскольку каждый из них параллелен одному и тому же перпендикуляру $h \subset \alpha$.

Теорема 7. *Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то прямая их пересечения перпендикулярна этой (третьей) плоскости.*

Доказательство. Пусть $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ и $\alpha \cap \beta = l$. Тогда $l \perp \gamma$. В самом деле, через произвольную точку P прямой l проведем перпендикуляр p к плоскости γ. На основании предыдущего следствия он принадлежит как плоскости α, так и плоскости β, следовательно, совпадает с прямой l. □

§ 3. *Скрещивающиеся прямые*

3.1. Параллельные плоскости, заданные двумя скрещивающимися прямыми. Две прямые называются *скрещивающимися*, если не существует плоскости, которой они обе принадлежат.

Теорема 8. *Существует единственная пара параллельных плоскостей, каждая из которых содержит одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельна другой из них.*

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 8). Через произвольную точку M прямой a проведем прямую b_1, параллельную прямой b. Прямые a и b_1 непараллельны, поэтому задают плоскость α, параллельную прямой b (теорема 1). Аналогично через произвольную точку N прямой b проведем прямую $a_1 \parallel a$. Плоскость β, заданная прямыми a_1 и b, параллельна плоскости α. Пара плоскостей α и β — единственная. Действительно, если бы существовала аналогичная пара (α_1, β_1), т. е. $\alpha \cap \alpha_1 = a$, $\beta \cap \beta_1 = b$ и $\alpha_1 \parallel \beta_1$, то согласно утверждению задачи § 1 прямые a и b оказались бы параллельными, что противоречит их выбору. □

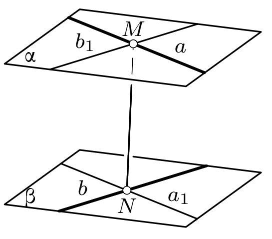


Рис. 8

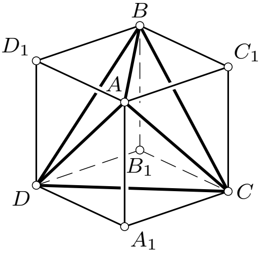


Рис. 9

3.2. Описанный параллелепипед. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Прямые AB и CD, BC и AD, AC и BD определяют три пары параллельных плоскостей (теорема 8), которые своим пересечением образуют параллелепипед, называемый *описанным параллелепипедом* данного тетраэдра (рис. 9). Ребра тетраэдра служат диагоналями граней его описанного параллелепипеда. В частности, если тетраэдр $ABCD$ правильный, то его описанный параллелепипед — куб.

3.3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых. Отрезок с концами на двух данных скрещивающихся прямых, перпендикулярный каждой из этих прямых, называется *общим перпендикуляром* этих скрещивающихся прямых. Так называют также и прямую, содержащую этот отрезок.

Теорема 9. *Для двух данных скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр. Его длина меньше длины любого другого отрезка с концами на этих прямых.*

Доказательство. Пусть прямые a и b скрещиваются. Докажем сначала существование их общего перпендикуляра. Для этого выберем некоторую плоскость π перпендикулярную прямой a (рис. 10), и построим перпендикуляр MM_1 на эту плоскость из произвольной точки $M \in b$. Плоскость ω, определяемая прямыми MM_1 и b, пересекает плоскость π по прямой b_1 (ортогональной проекции прямой b). Из точки $O = \pi \cap a$ проведем перпендикуляр OH на прямую b_1, $H \in b_1$. Далее строим $HB \parallel a$ $(B \in b)$ и $BA \parallel OH$ $(A \in a)$. Тогда отрезок AB и является общим перпендикуляром данных скрещивающихся прямых a и b. В самом деле, так как $OH \perp b_1$, то $OH \perp b$ (теорема о трех перпендикулярах). Поскольку $OH \perp a$, то $AB \perp a$. Так как $AB \parallel OH$, то $AB \perp b$.

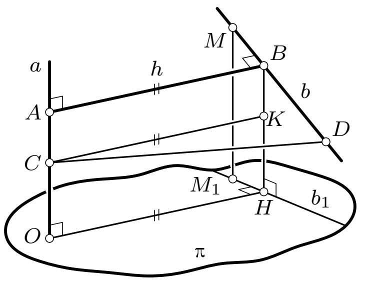


Рис. 10

Докажем теперь *единственность* общего перпендикуляра данных прямых a и b. Допустим, что отрезок CD — также общий перпендикуляр этих прямых. Тогда как AB, так и CD перпендикулярны плоскости $\omega = (b,\, b_1)$, поскольку оба они перпендикулярны прямым b и BH этой плоскости. Следовательно, $AB \parallel CD$. Оказалось, что прямые a и b принадлежат плоскости ACD, что противоречит условию их скрещивания.

Наконец, покажем, что $AB < CD$, где CD — любой отрезок с концами на прямых a и b, отличный от их общего перпендикуляра AB. Пусть $CK \perp \omega$, $K \in \omega$. Тогда $CK = AB$, CD — наклонная к ω и, значит, $CK < CD$, а потому $AB < CD$. □

Описанное в этом доказательстве построение есть один из возможных способов построения общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

О п р е д е л е н и е. Длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых называется *расстоянием* между этими прямыми.

Для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми нет необходимости строить их общий перпендикуляр, так как $AB = OH$. Искомое расстояние равно также расстоянию между параллельными плоскостями α и β, существование которых утверждается теоремой 8.

З а д а ч а 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра имеют длину a. Постройте общий перпендикуляр прямых BC и AB_1 (рис. 11) и найдите его длину.

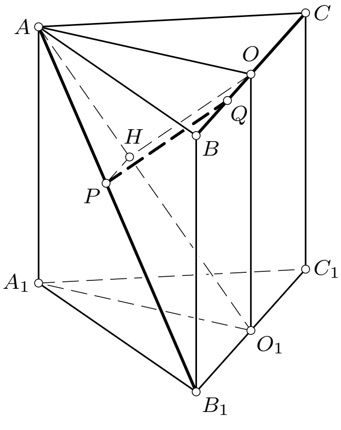


Рис. 11

Р е ш е н и е. В качестве плоскости π служит плоскость AOO_1 (O и O_1 — середины ребер BC и B_1C_1). Прямая AB_1 проектируется на нее в прямую AO_1. В плоскости π построим перпендикуляр OH к прямой AO_1. В прямоугольном треугольнике AOO_1 катеты OO_1 и AO соответственно равны a и $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Перпендикуляр OH делит гипотенузу AO_1 в отношении квадратов прилежащих катетов, т. е. $AH : HO_1 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : a^2 = 3 : 4$. Это отношение сохраняется на изображении, что и определяет положение точки H. Далее проводим $HP \parallel BC$ и $PQ \parallel OH$, получая PQ — общий перпендикуляр прямых BC и AB_1. Так как $AO \cdot OO_1 = AO_1 \cdot OH$, то $OH = PQ = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

З а д а ч а 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1

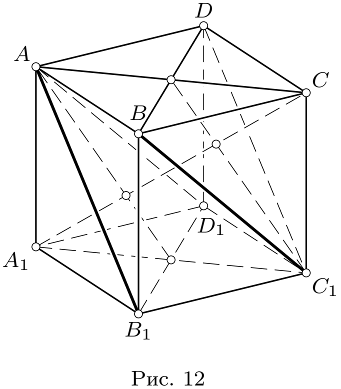


Рис. 12

Р е ш е н и е. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 (рис. 12), которые делят диагональ CA_1 куба на три равные части (задача 1.19). Руководствуясь теоремой о трех перпендикулярах, убеждаемся, что эта диагональ перпендикулярна указанным плоскостям. Следовательно, расстояние между прямыми AB_1 и BC_1, равно $\frac{1}{3}CA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Для решения задачи не потребовалось строить общий перпендикуляр.

3.4. Построение и вычисление длины общего перпендикуляра векторным методом. Решим ту же задачу 2 векторно. Выберем векторный базис $(\overline{a}, \overline{b}, \overline{c})$, где $\overline{a} = \overline{BA}$, $\overline{b} = \overline{BC}$, $\overline{c} = \overline{BB_1}$ (рис. 13). Пусть P и Q — некоторые точки соответственно прямых BC_1 и AB_1. Положим $\overline{BP} = x\overline{BC_1} = x(\overline{b}+\overline{c})$, $\overline{AQ} = y\overline{AB_1} = y(\overline{c}-\overline{a})$. Тогда $\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BA} + \overline{AQ} = -x(\overline{b}+\overline{c}) + y(\overline{c}-\overline{a}) = (1-y)\overline{a} - x\overline{b} + (y-x)\overline{c}$. Найдем такие числа x и y, чтобы вектор $\overline{PQ}$ был ортогонален векторам $\overline{BC_1}$ и $\overline{AB_1}$, т. е. чтобы имели место равенства:

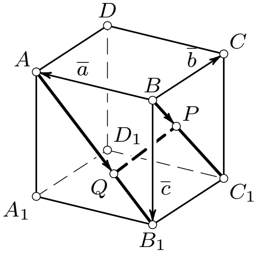


Рис. 13

$$\begin{cases} ((1-y)\overline{a} - x\overline{b} + (y-x)\overline{c})(\overline{b}+\overline{c}) = 0, \\ ((1-y)\overline{a} - x\overline{b} + (y-x)\overline{c})(\overline{c}-\overline{a}) = 0. \end{cases}$$

Полагая $|\overline{a}| = |\overline{b}| = |\overline{c}| = 1$ и учитывая, что $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{c} = \overline{c}\overline{a} = 0$, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

из которой $x = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{2}{3}$. Точки P и Q искомого общего перпендикуляра строятся согласно полученным равенствам $\overline{BP} = \dfrac{1}{3}\overline{BC_1}$ и $\overline{AQ} = \dfrac{2}{3}\overline{AB_1}$. А так как $\overline{PQ} = \dfrac{1}{3}(\overline{a} - \overline{b} + \overline{c})$, то $PQ^2 = \dfrac{1}{3}a^2$, $PQ = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

3.5. Пропорциональные отрезки на скрещивающихся прямых. *Если две скрещивающиеся прямые u и v пересечены параллельными плоскостями α, β, γ, ..., то отрезки, отсекаемые ими на одной прямой, пропорциональны соответственным отрезкам на другой прямой* (рис. 14):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \ldots$$

Для доказательства через точку $A = u \cap \alpha$ проведем прямую l параллельно прямой v. Пусть прямая l пересекает плоскости β, γ, ... в точках B_2, C_2, ... Тогда $A_1B_1 = AB_2$, $B_1C_1 = B_2C_2$, ... и $\dfrac{AB}{A_2B_2} = \dfrac{BC}{B_2C_2} = \ldots$, откуда и следует сформулированное утверждение.

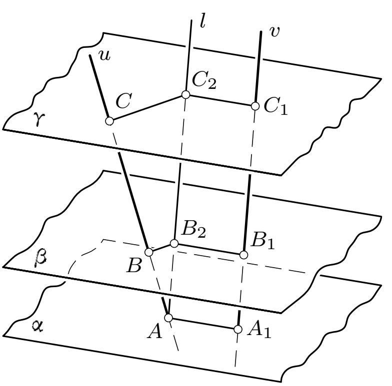


Рис. 14