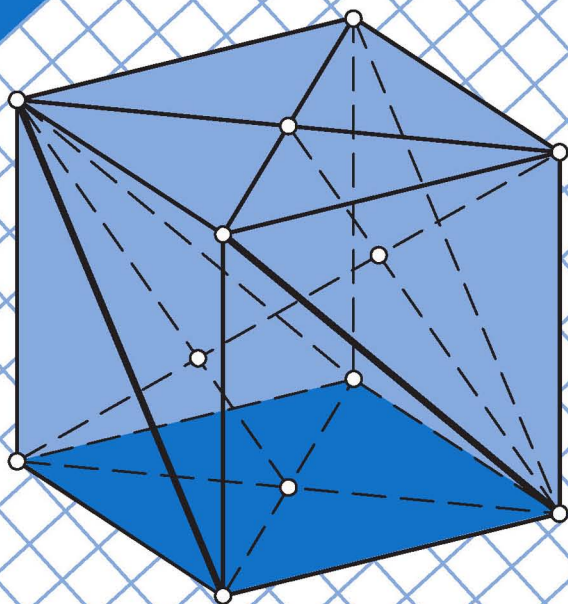


Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ТОМ 2



СТЕРЕОМЕТРИЯ

Я. П. ПОНАРИН

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ
ГЕОМЕТРИЯ

Том 2

СТЕРЕОМЕТРИЯ,
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВА

Издание третье, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2015

УДК 514.112
ББК 22.151.0
П56

Понарин Я. П.

П56 Элементарная геометрия: В 2 т. — Т. 2: Стереометрия, преобразования пространства. — 3-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2015.— 256 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-0367-5

ISBN 978-5-4439-0369-9 (том 2)

Пособие предназначено для учащихся старших классов школ с математической специализацией. Оно содержит углубленное и расширенное изложение геометрии. В нем изложена теория прямых и плоскостей, трехгранных углов, тетраэдров, сфер и других тел. Рассмотрены методы доказательства геометрических неравенств и нахождения экстремумов. Много внимания уделено преобразованиям пространства — движениям, подобиям и аффинным преобразованиям. Книга включает около 500 задач для самостоятельного решения с указаниями и ответами.

Книга может быть использована для внеклассной работы с учащимися, для самообразования учителей, для спецкурсов и спецсеминаров по элементарной геометрии в педагогических вузах.

Предыдущее издание книги вышло в 2008 г.

ББК 22.151.0

Яков Петрович Понарин

Элементарная геометрия

Том 2. Стереометрия, преобразования пространства

Редактор Семенов А. В.

Подписано в печать 04.08.2015 г. Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Печ. л. 16. Тираж 1000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–08–04.

Отпечатано в «Академиздатцентр „Наука“ РАН»,

ОП Производственно-издательский комбинат «ВНИТИ» — «Наука»,

140014, Московская обл., г. Люберцы, Октябрьский пр-т, д. 403.

Тел./факс: (495) 554–21–86, (495) 554–25–97, (495) 974–69–76.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-4439-0367-5

ISBN 978-5-4439-0369-9 (том 2)

© Понарин Я. П., 2004.

© МЦНМО, 2004.

Предисловие 11

Часть I. Стереометрия

Глава 1. Прямые и плоскости

§ 1. Параллельные прямые и плоскости 15
1.1. Параллельность прямой и плоскости (15). 1.2. Параллельность двух плоскостей (16).

§ 2. Перпендикулярные прямые и плоскости 17
2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости (17). 2.2. Перпендикулярность двух плоскостей (18).

§ 3. Скрещивающиеся прямые 19
3.1. Параллельные плоскости, заданные двумя скрещивающимися прямыми (19). 3.2. Описанный параллелепипед (19). 3.3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых (20). 3.4. Построение и вычисление длины общего перпендикуляра векторным методом (22). 3.5. Пропорциональные отрезки на скрещивающихся прямых (22).

§ 4. Углы между прямыми и плоскостями 23
Угол между скрещивающимися прямыми (23). Угол между прямой и плоскостью (23). 4.3. Двугранный угол. Угол между двумя плоскостями (24). 4.4. О сущности стереометрической задачи на построение (25).

Задачи к главе 1 27

Глава 2. Трехгранный угол

§ 1. Смежные и вертикальные триэдры. Полярные триэдры 31
1.1. Трехгранный угол и его элементы (31). 1.2. Полярные триэдры (32).

§ 2. Неравенства для углов триэдра 32
2.1. Сумма плоских углов триэдра (32). 2.2. Аналог неравенства треугольника (33). 2.3. Сумма двугранных углов триэдра (33). 2.4. Сумма косинусов плоских углов триэдра (34).

§ 3. Теоремы косинусов и теорема синусов для триэдра 34

3.1. Две теоремы косинусов (34).	3.2. Теорема синусов для триэдра (35).	3.3. Следствия из теоремы синусов (36).	3.4. Необходимые и достаточные условия существования триэдра (36).	3.5. Применение теорем косинусов в решении задач (38).
§ 4. Замечательные прямые и плоскости триэдра	39			
4.1. Медианные плоскости триэдра (39).	4.2. Ось вписанного кругового конуса (39).	4.3. Ось описанного конуса (40).	4.4. Высотные плоскости и ортоось триэдра (41).	
§ 5. Плоскости, перпендикулярные осям описанного и вписанного конусов триэдра	43			
5.1. Плоскость перпендикулярная оси конуса, описанного около триэдра (43).	5.2. Плоскость, перпендикулярная оси вписанного в триэдр конуса (44).			
§ 6. Начальные сведения о сферической геометрии	45			
6.1. Основные понятия (45).	6.2. Связь геометрии трехгранного угла со сферической геометрией (46).			
Задачи к главе 2	47			

Глава 3. Ортогональное проектирование

§ 1. Свойства ортогонального проектирования	50			
1.1. Ортогональное проектирование как частный вид параллельного проектирования (50).	1.2. Площадь ортогональной проекции плоской фигуры (51).	1.3. Формула проекций граней тетраэдра (53).	1.4. Пример задачи (54).	
§ 2. Ортогональная проекция угла	54			
2.1. Общая формула ортогональной проекции угла (54).	2.2. Частные случаи (55).	2.3. Сравнение величины угла и величины его ортогональной проекции (57).	2.4. Примеры решения задач (58).	
§ 3. Ортогональная проекция вектора на плоскость	60			
3.1. Вектор ортогональной проекции вектора (60).	3.2. Решение задач (61).			
Задачи к главе 3	62			

Глава 4. Геометрические места точек пространства

§ 1. Основные геометрические места точек пространства	65			
1.1. Сущность задачи на нахождение ГМТ (65).	1.2. Простейшие ГМТ пространства (66).			
§ 2. ГМТ пространства, задаваемые двумя скрещивающимися прямыми	68			
2.1. Серединая плоскость скрещивающихся прямых (68).	2.2. Гиперболический параболоид (69).			

§3. Три ГМТ пространства, аналогичные ГМТ плоскости	70
3.1. Окружность Аполлония и сфера Аполлония (70). ГМТ пространства, разность квадратов расстояний (72). ГМТ пространства, сумма квадратов расстояний (73).	
§4. Метод ГМТ в стереометрических задачах на построение	74
Задачи к главе 4	75

Глава 5. Векторное и смешанное произведения векторов

§1. Определения векторного и смешанного произведений, их геометрический смысл	78
1.1. Ориентация упорядоченной тройки некопланарных векторов (78). 1.2. Определение векторного произведения, его следствия (79). 1.3. Смешанное произведение трех векторов, геометрический смысл его знака и модуля (80).	
§2. Алгебраические свойства смешанного и векторного произведений	81
2.1. Алгебраические свойства смешанного произведения (81).	
2.2. Алгебраические свойства векторного произведения (82).	
§3. Произведения в декартовых координатах	83
3.1. Координатная формула векторного произведения (83).	
3.2. Координатное представление смешанного произведения (83).	
§4. Сложные произведения векторов	84
4.1. Двойное векторное произведение (84). 4.2. Скалярное произведение двух векторных произведений (85). 4.3. Векторное произведение двух векторных произведений (85). 4.4. Квадрат смешанного произведения (85).	
§5. Некоторые геометрические приложения произведений векторов	86
5.1. Тригонометрия триэдра (86). 5.2. Теорема Менелая для триэдра (86). 5.3. Теорема Чевы для триэдра (87). 5.4. Выражение косинуса угла между противоположными ребрами тетраэдра через косинусы и синусы его двугранных углов (88).	
Задачи к главе 5	88

Глава 6. Тетраэдр

§1. Медианы и бимедианы тетраэдра. Центроид	91
1.1. Бимедианы (средние линии) тетраэдра (91). 1.2. Медианы тетраэдра (92). 1.3. Свойства центроида тетраэдра (93).	
§2. Площади граней тетраэдра	94
2.1. Теорема косинусов для тетраэдра (94). Сумма квадратов площадей граней тетраэдра (95). 2.3. Зависимость между косинусами двугранных углов тетраэдра (96).	
§3. Объем тетраэдра и объем клина	97

3.1. Первая формула Штаудта (97).	3.2. Формулы Достора (97).
3.3. Формула Сервуа (98).	3.4. Теоремы синусов для тетраэдра (99).
3.5. Выражение объема тетраэдра через длины его ребер (формула Юнгиуса) (99).	3.6. Вторая формула Штаудта (100).
3.7. Объем клина (100).	
§ 4. Бариецентрические координаты точки	102
4.1. Определение (102).	4.2. Аффинный и метрический смысл бариецентрических координат (103).
4.3. Расстояние между двумя точками, заданными относительно тетраэдра (103).	
§ 5. Сферы, касающиеся плоскостей граней тетраэдра	105
5.1. Условия существования и число сфер, касающихся плоскостей граней тетраэдра (105).	5.2. Зависимость между радиусами вписанной и невписанных сфер и высотами тетраэдра (107).
§ 6. Ортоцентрический тетраэдр	108
6.1. Высоты тетраэдра. Определение и критерий ортоцентрического тетраэдра (108).	6.2. Вектор ортоцентра (109).
6.3. Характеристические свойства ортоцентрического тетраэдра (110).	
§ 7. Равногранный тетраэдр	112
7.1. Определение и характеристическое свойство равногранного тетраэдра (112).	7.2. Свойства углов равногранного тетраэдра (112).
7.3. Критерии равногранного тетраэдра (113).	7.4. Формулы для равногранного тетраэдра (114).
Задачи к главе 6	115

Глава 7. Вычисление объемов тел

§ 1. Формула Ньютона–Симпсона и ее применение	119
1.1. Вывод формулы Ньютона–Симпсона (119).	1.2. Объем пирамиды и усеченной пирамиды (120).
1.3. Объем клина (121).	
§ 2. Объем шара и его частей	123
2.1. Объем шара и шарового сегмента (123).	2.2. Объем шарового сектора (124).
2.3. Объем шарового слоя и шарового кольца (125).	
§ 3. Принцип Кавальери	126
3.1. Сущность принципа Кавальери (126).	3.2. Объем шара и шарового сегмента (127).
3.3. Объем тора (128).	
§ 4. Объем тела вращения	129
4.1. Лемма о площади поверхности, образованной вращением отрезка (129).	4.2. Объем тела вращения треугольника (130).
4.3. Объем тела вращения центрально-симметричной фигуры (132).	4.4. Эквивалентная замена вращающейся фигуры (133).
4.5. Замена оси вращения (134).	
Задачи к главе 7	136

Глава 8. Сфера

- §1. Касательные плоскости и прямые. Малые окружности сферы . 139
1.1. Касательные плоскости к сфере (139). 1.2. Малые окружности сферы (140). 1.3. Касательные прямые к сфере (141). 1.4. Пересечение двух сфер (142).
- §2. Площадь сферы и ее частей 143
2.1. Площадь сферы (143). 2.2. Площадь сферического сегмента (143). 2.3. Площадь сферического пояса (144). 2.4. Площадь сферы, сферического сегмента и сферического пояса как поверхностей вращения (144). 2.5. Площадь сферического двуугольника и сферического треугольника (145).
- §3. Радикальная плоскость, радикальная ось и радикальный центр сфер 146
3.1. Степень точки относительно сферы (146). 3.2. Радикальная плоскость двух сфер (147). 3.3. Радикальная ось трех сфер и радикальный центр четырех сфер (148). 3.4. Ортогональные сферы (148).
- §4. Инверсия пространства относительно сферы 149
4.1. Определение инверсии и его следствия (149). 4.2. Образы плоскостей и сфер, прямых и окружностей при инверсии (150). 4.3. Инвариантность величины угла между кривыми при инверсии (151). 4.4. Вывод второй формулы Штаудта для объема тетраэдра (152). 4.5. Стереометрическое обобщение тождества Брегшнайдера (153).
- §5. Стереографическая проекция 154
5.1. Определение и свойства стереографической проекции (154).
5.2. Координатные формулы стереографической проекции (155).
- Задачи к главе 8 156

Глава 9. Стереометрические неравенства и экстремумы

- §1. Классические алгебраические неравенства, используемые для доказательства геометрических неравенств 159
1.1. Неравенство Коши (159). 1.2. Сравнение квадрата суммы и суммы квадратов действительных чисел (160). 1.3. Тождество Лагранжа и неравенство Коши–Буняковского (160).
- §2. Получение неравенств из тождественных равенств 161
- §3. Некоторые избранные неравенства 164
3.1. Неравенства для углов триэдра, тетраэдра и косоугольного тетраэдра (164). 3.2. Неравенства для прямоугольного тетраэдра (165). 3.3. Неравенства для произвольного тетраэдра (167).

§4. Стереометрические экстремумы	168
4.1. Экстремумы как следствия нестрогих неравенств (168).	
4.2. Экстремумы суммы и произведения положительных чисел (169). Сведение задачи к планиметрической (170).	
§5. Точка Люилье тетраэдра	172
5.1. Задача Люилье (172). 5.2. Бариецентрические координаты точки Люилье (173). 5.3. Точка Люилье — центроид ее тетраэдра проекций (173).	
§6. Экстремальные свойства правильного тетраэдра	174
6.1. Тетраэдр минимальной площади поверхности с данным основанием и данной высотой (175). 6.2. Правильный тетраэдр — объект с экстремальными свойствами (176).	
Задачи к главе 9	177

Часть II. Преобразования пространства

Глава 10. Движения пространства

§1. Перенос, центральная, осевая и зеркальная симметрии пространства	183
1.1. Определения движения и равных фигур (183). 1.2. Перенос (183). 1.3. Центральная симметрия (183). 1.4. Осевая симметрия (183). 1.5. Зеркальная симметрия (184). 1.6. Представление переноса композициями зеркальных и осевых симметрий (184).	
§2. Общие свойства движений пространства	185
2.1. Два рода движений пространства (185). 2.2. Множества неподвижных точек движений пространства (185). 2.3. Инварианты движений пространства (186). 2.4. Признак зеркальной симметрии (188).	
§3. Поворот пространства около оси	188
3.1. Поворот как частный вид движения (188). 3.2. Признак поворота (189). 3.3. Представление поворота композициями симметрий (189).	
§4. Переносная и поворотная симметрии, винтовое движение	190
4.1. Переносная симметрия (190). 4.2. Поворотная симметрия (192). 4.3. Винтовое движение (192).	
§5. Конструктивное задание движения пространства	193
5.1. Теорема о задании движения (193). 5.2. Следствия (195).	
§6. Классификация движений пространства	195
6.1. Движения второго рода (195). 6.2. Движения первого рода (196).	

§7. Координатные формулы движений пространства	197
7.1. Вывод формул движений (197). Матрица движения (198).	
7.3. Формулы обратного движения (200). 7.4. О критериях част-	
ных видов движений (200). 7.5. Формулы частных видов движе-	
ний при специальном выборе прямоугольной декартовой системы	
координат (201).	
§8. Композиции движений пространства	202
8.1. Композиция поворота и переноса (202). 8.2. Композиция зер-	
кальной и осевой симметрий (202). 8.3. Композиция двух пово-	
ротов (203). 8.4. Композиция трех зеркальных симметрий (203).	
8.5. Композиция симметрий относительно трех попарно скрещи-	
вающихся прямых (205).	
§9. Группы самосовмещений правильного тетраэдра и куба	205
9.1. Группа самосовмещений правильного тетраэдра (205).	
9.2. Группа самосовмещений куба (207).	
§10. Решение задач с использованием движений пространства	208
Задачи к главе 10	211

Глава 11. Подобия пространства

§1. Гомотетия пространства	219
1.1. Обзор теории (219). 1.2. Композиция гомотетии и перено-	
са (220). 1.3. Гомотетия пространства в задачах (220).	
§2. Преобразования подобия	222
2.1. Определение и инварианты подобий пространства (222). Ко-	
ординатные формулы подобий пространства (222). 2.3. Центр по-	
добия пространства (223). 2.4. Построение центра подобия перво-	
го рода плоскости (223). 2.5. Классификация подобий простран-	
ства (224).	
Задачи к главе 11	225

Глава 12. Аффинные преобразования

§1. Начала теории аффинных преобразований пространства	228
1.1. Определение аффинного преобразования пространства и его	
следствия (228). 1.2. Задание аффинного преобразования про-	
странства (228). 1.3. Координатные формулы аффинного преоб-	
разования (229).	
§2. Изменение объемов тел при аффинном преобразовании	231
2.1. Выражение смешанного произведения векторов в аффин-	
ных координатах (231). 2.2. Зависимость между объемом тела	
и объемом его образа при аффинном преобразовании простран-	
ства (231).	

§3. Родство	233
3.1. Определение и свойства родства (233). 3.2. Представление аффинного преобразования пространства композицией подобия и родства (234).	
§4. Метод аффинных преобразований в геометрических задачах .	234
4.1. Сущность метода аффинных преобразований (234). 4.2. При- меры решения задач методом аффинных преобразований (235).	
Задачи к главе 12	236
Задачи общего содержания	238
Ответы, указания	243
Литература	254
Предметный указатель	255

Предисловие

Эта книга предназначена для учащихся школ, лицеев, гимназий с математической специализацией. Она является непосредственным продолжением учебного пособия [8] того же автора. Обе эти книги содержат углубленное изложение планиметрии и стереометрии для желающих знать больше школьного уровня и научиться лучше решать задачи. Их содержание находится, образно говоря, посередине между школьной и вузовской геометриями.

К написанию книги автора побудило большое желание привлечь внимание педагогов-математиков к неиспользуемому стереометрическому арсеналу, обладающему значительным потенциалом в образовательном и воспитательном аспектах. Возрастающее стремление к «урезаниям» математического содержания среднего образования может иметь в будущем непоправимые негативные последствия. Не являясь сторонником «широкого охвата», автор хочет помочь желающим иметь возможность овладевать геометрическим богатством.

Книга состоит из двух частей. Первая часть — собственно стереометрическая, вторая содержит преобразования пространства — движения, подобия, аффинные преобразования. Содержание не регламентировано заранее заданной программой. Оно сложилось в процессе многолетней работы автора со студентами педагогического института (университета), а также с учащимися физико-математического лицея г. Кирова и с учащимися Белорецкой компьютерной школы Башкортостана.

Автор не ставил целью пересказывать материал действующих школьных учебников, а стремился углубить и расширить его, показать применение излагаемых фактов к решению содержательных математических задач. Единственным отступлением от этого принципа служит первая глава «Прямые и плоскости», которая по существу является вводной к всему остальному материалу, но и она имеет оригинальные подходы к некоторым определениям и доказательствам теорем. Ее полезно прочитать читателю, даже хорошо знающему школьный учебник.

В имеющейся учебной литературе геометрические преобразования пространства освещены недостаточно. Изложение либо фрагментарно, либо архаично с точки зрения терминологии и методов доказательств. Удалось изложить теорию преобразований пространства с существенными упрощениями.

Важной частью содержания пособия являются задачи, в основном заимствованные из задачного материала отечественной учебной литературы. Их количество не очень велико, однако вполне достаточно для достижения поставленной цели. Обращаем внимание читателя, что раз-

бор приведенных авторских решений и самостоятельное решение задач из списков, данных в конце каждой главы, должно составить необходимую часть его работы. Учитывая критические замечания педагогов, пользующихся пособием [8], автор решил отказаться от развернутых «указаний», а ограничиться только подсказками и ответами.

Нельзя обещать легкого чтения книги. Надеемся на желание и настойчивость читателя. Предполагается знание действующих школьных учебников.

Пособие может быть использовано в педагогических вузах при подготовке учителей математики для чтения спецкурсов и проведения спецсеминаров, темами которых могут служить выбранные главы. Автор надеется, что книга окажет помощь в самообразовании учителей и во внеклассной работе с учащимися, в частности, при подготовке к математическим олимпиадам.

Я. П. Понарин

Часть I

Стереометрия

Прямые и плоскости

§1. Параллельные прямые и плоскости

1.1. Параллельность прямой и плоскости. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Из этого определения сразу следует критерий параллельности прямой и плоскости.

Теорема 1. *Прямая t параллельна плоскости α тогда и только тогда, когда в этой плоскости существует некоторая прямая p , параллельная данной прямой t .*

Доказательство. Пусть $t \parallel \alpha$. Проведем через прямую t произвольную плоскость β , пересекающую плоскость α (рис. 1). Тогда прямая p пересечения плоскостей α и β параллельна прямой t , так как в противном случае прямая t пересекала бы плоскость α . Обратное, если в плоскости α имеется некоторая прямая p , параллельная прямой t , то $t \parallel \alpha$, поскольку если бы t пересекала α , то их общая точка лежала бы на прямой p , что противоречит условию $t \parallel p$. \square

Очевидно, при $t \parallel \alpha$ в плоскости α существует бесконечное множество (*пучок*) прямых, каждая из которых параллельна t . Доказанный критерий мог бы быть принят в качестве *определения* параллельности прямой и плоскости.

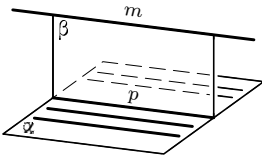


Рис. 1

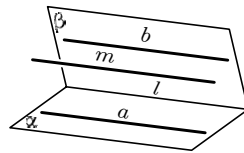


Рис. 2

Теорема 2. *Если прямая t параллельна каждой из двух пересекающихся плоскостей α и β , то она параллельна их линии пересечения.*

Доказательство. Пусть $t \parallel \alpha$ и $t \parallel \beta$. Согласно теореме 1 в плоскости α существует прямая a , параллельная t , в плоскости β существует прямая b , параллельная t (рис. 2). Тогда $a \parallel b$ (транзитивность параллельности прямых). По той же теореме 1 $a \parallel \beta$ и, значит,

прямая a параллельна прямой $l = \alpha \cap \beta$, так как иначе a пересекала бы β . Из $m \parallel a$ и $l \parallel a$ следует $m \parallel l$. \square

Обратное утверждение очевидно на основании достаточного условия критерия параллельности прямой и плоскости.

Теорема 3. *Если три плоскости попарно пересекаются и не имеют общей прямой, то прямые их пересечения либо имеют общую точку, либо параллельны.*

Доказательство. Пусть даны плоскости α , β и γ и $\beta \cap \gamma = a$, $\gamma \cap \alpha = b$, $\alpha \cap \beta = c$. По условию прямая c не лежит в плоскости γ . Для нее возможны только два случая: либо прямая c пересекает плоскость γ в некоторой точке M , либо $c \parallel \gamma$. В первом случае будет $M \in a$ и $M \in b$, т. е. $M \in \alpha \cap \beta \cap \gamma$. Тогда точка M будет общей точкой прямых a , b и c (рис. 3, а). Во втором случае по теореме 2 будет $c \parallel a$ и $c \parallel b$ (рис. 3, б). \square

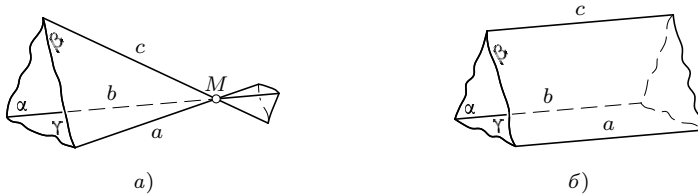


Рис. 3

1.2. Параллельность двух плоскостей. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Теорема 4. *Если в одной из двух данных плоскостей существуют две непараллельные прямые, каждая из которых параллельна другой плоскости, то эти плоскости параллельны.*

Доказательство. Пусть даны плоскости α и β , прямые a и b непараллельны и лежат в плоскости α , $a \parallel \beta$, $b \parallel \beta$. Если бы плоскости α и β пересекались по некоторой прямой l , то по теореме 2 было бы $a \parallel l$ и $b \parallel l$, откуда $a \parallel b$, что противоречит условию теоремы. \square

Если плоскости параллельны, то любая прямая одной плоскости параллельна другой плоскости. Если же плоскости пересекаются, то в каждой из них имеется пучок параллельных прямых, параллельных другой плоскости (все они параллельны линии пересечения этих плоскостей).

Задача. Плоскости α и α_1 пересекаются по прямой a . Соответственно параллельные им плоскости β и β_1 пересекаются по прямой b . Докажите, что прямые a и b параллельны.

Решение. Из $\alpha \parallel \beta$ и $a \subset \alpha$ следует $a \parallel \beta$. С равным правом $a \parallel \beta_1$. По теореме 2 будет $a \parallel b$.

§2. Перпендикулярные прямые и плоскости

2.1. Перпендикулярность прямой и плоскости. Две пересекающиеся прямые называются *перпендикулярными*, если один из углов между ними равен своему смежному. Две *скрещивающиеся* прямые называются *перпендикулярными*, если перпендикулярны соответственно параллельные им пересекающиеся прямые.

Прямая и плоскость называются *перпендикулярными*, если эта прямая перпендикулярна *каждой* прямой, лежащей в данной плоскости.

Теорема 5 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). *Если прямая перпендикулярна каждой из двух непараллельных прямых данной плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.*

Доказательство. Пусть прямые a и b непараллельны и лежат в плоскости α ; прямая h им перпендикулярна, m — произвольная прямая плоскости α (рис. 4). Докажем, что $h \perp m$. Для этого выберем ненулевые векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{h} , \vec{m} , коллинеарные соответственно прямым a , b , h , m . Вектор \vec{m} разложим по неколлинеарным векторам \vec{a} и \vec{b} : $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Согласно распределительному закону скалярного умножения

$$\vec{m}\vec{h} = x(\vec{a}\vec{h}) + y(\vec{b}\vec{h}).$$

По условию теоремы $\vec{a}\vec{h} = 0$ и $\vec{b}\vec{h} = 0$. Тогда и $\vec{m}\vec{h} = 0$, т. е. $h \perp m$. По определению перпендикулярности прямой и плоскости и в силу произвольного выбора прямой m плоскости α прямая h перпендикулярна этой плоскости. \square

Далее традиционным способом можно построить плоскость, проходящую через данную точку перпендикулярно данной прямой, т. е. доказать существование такой плоскости, и доказать существование и единственность перпендикуляра к плоскости, содержащего данную точку ([2], с. 39–41).

Теорема 6 (о трех перпендикулярах). *Для того чтобы прямая m , лежащая в плоскости α (или в плоскости, ей параллельной), была перпендикулярна наклонной к плоскости α , необходимо и достаточно, чтобы эта прямая m была перпендикулярна ортогональной проекции наклонной на плоскость α .*

Доказательство. Пусть прямая $l = (AO)$ — наклонная к плоскости α , $h = (AA_1)$ — перпендикуляр к α . Тогда $(OA_1) = l_1$ — ортогональная проекция прямой l на α (рис. 5). Пусть $m \subset \alpha$, $m \perp l_1$. Тогда $h \perp m$ по

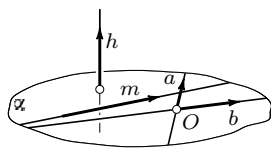


Рис. 4

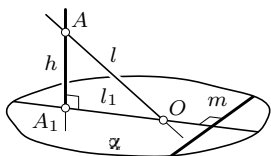


Рис. 5

определению перпендикулярности прямой и плоскости и прямая m перпендикулярна плоскости (OAA_1) (теорема 5). Поэтому $m \perp l$. Обратно, если предположить, что $m \perp l$, то будет следовать $m \perp l_1$. \square

Задача 1. В тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB, OC попарно перпендикулярны. Докажите, что основание H высоты OH этого тетраэдра есть ортоцентр треугольника ABC (рис. 6).

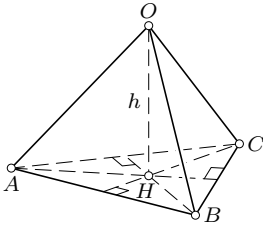


Рис. 6

Решение. Поскольку $OA \perp OB$ и $OA \perp OC$, то $OA \perp (OBC)$ и поэтому $OA \perp BC$. Прямая AH есть проекция прямой OA на плоскость ABC . Так как $BC \perp OA$, то по теореме 6 $BC \perp AH$. Аналогично $AB \perp CH$ и $CA \perp BH$, т.е. точка H — ортоцентр треугольника ABC .

Задача 2. На перпендикуляре h к плоскости остроугольного треугольника ABC в его ортоцентре H выбрана точка O так, что угол AOB является прямым. Докажите, что углы BOC и COA также прямые.

Решение. По условию $OH \perp (ABC)$ и $BC \perp AH$ (рис. 6). По теореме о трех перпендикулярах $BC \perp AO$. Из того, что $AO \perp BC$ и $AO \perp OB$ следует $AO \perp OC$. Аналогично $BO \perp OC$.

2.2. Перпендикулярность двух плоскостей. Плоскость α называется перпендикулярной плоскости β , если она содержит перпендикуляр h к плоскости β (рис. 7):

$$\alpha \perp \beta \iff (\exists h \subset \alpha \mid h \perp \beta).$$

В этом определении плоскости α и β занимают неравноправное положение. Поэтому надо доказать, что из $\alpha \perp \beta$ следует $\beta \perp \alpha$. Для этого построим в плоскости β перпендикуляр p к прямой l пересечения плоскостей α и β в точке $O = \beta \cap h$. Тогда $p \perp \alpha$, так как $h \perp p$ и $p \perp l$. Следовательно, в плоскости β существует перпендикуляр p к плоскости α . Согласно принятому определению $\beta \perp \alpha$.

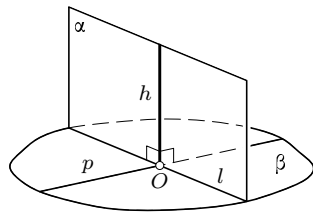


Рис. 7

Следствие. Если плоскости α и β перпендикулярны, то все перпендикуляры к плоскости β , проведенные из точек плоскости α , лежат в плоскости α , поскольку каждый из них параллелен одному и тому же перпендикуляру $h \subset \alpha$.

Теорема 7. Если две пересекающиеся плоскости перпендикулярны третьей, то прямая их пересечения перпендикулярна этой (третьей) плоскости.

Доказательство. Пусть $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ и $\alpha \cap \beta = l$. Тогда $l \perp \gamma$. В самом деле, через произвольную точку P прямой l проведем перпендикуляр p к плоскости γ . На основании предыдущего следствия он принадлежит как плоскости α , так и плоскости β , следовательно, совпадает с прямой l . \square

§3. Скрещивающиеся прямые

3.1. Параллельные плоскости, заданные двумя скрещивающимися прямыми. Две прямые называются *скрещивающимися*, если не существует плоскости, которой они обе принадлежат.

Теорема 8. *Существует единственная пара параллельных плоскостей, каждая из которых содержит одну из двух данных скрещивающихся прямых и параллельна другой из них.*

Доказательство. Пусть даны скрещивающиеся прямые a и b (рис. 8). Через произвольную точку M прямой a проведем прямую b_1 , параллельную прямой b . Прямые a и b_1 непараллельны, поэтому задают плоскость α , параллельную прямой b (теорема 1). Аналогично через произвольную точку N прямой b проведем прямую $a_1 \parallel a$. Плоскость β , заданная прямыми a_1 и b , параллельна плоскости α . Пара плоскостей α и β — единственная. Действительно, если бы существовала аналогичная пара (α_1, β_1) , т.е. $\alpha \cap \alpha_1 = a, \beta \cap \beta_1 = b$ и $\alpha_1 \parallel \beta_1$, то согласно утверждению задачи §1 прямые a и b оказались бы параллельными, что противоречит их выбору. \square

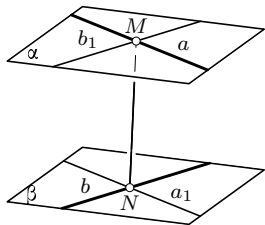


Рис. 8

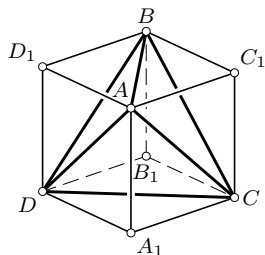


Рис. 9

3.2. Описанный параллелепипед. Рассмотрим тетраэдр $ABCD$. Прямые AB и CD , BC и AD , AC и BD определяют три пары параллельных плоскостей (теорема 8), которые своим пересечением образуют параллелепипед, называемый *описанным параллелепипедом* данного тетраэдра (рис. 9). Ребра тетраэдра служат диагоналями граней его описанного

параллелепипеда. В частности, если тетраэдр $ABCD$ правильный, то его описанный параллелепипед — куб.

3.3. Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых. Отрезок с концами на двух данных скрещивающихся прямых, перпендикулярный каждой из этих прямых, называется *общим перпендикуляром* этих скрещивающихся прямых. Так называют также и прямую, содержащую этот отрезок.

Теорема 9. *Для двух данных скрещивающихся прямых существует единственный общий перпендикуляр. Его длина меньше длины любого другого отрезка с концами на этих прямых.*

Доказательство. Пусть прямые a и b скрещиваются. Докажем сначала существование их общего перпендикуляра. Для этого выберем

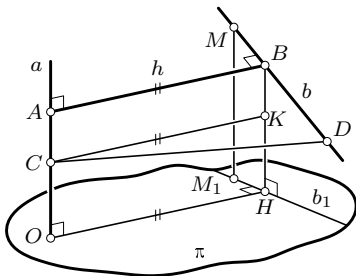


Рис. 10

некоторую плоскость π перпендикулярную прямой a (рис. 10), и построим перпендикуляр MM_1 на эту плоскость из произвольной точки $M \in b$. Плоскость ω , определяемая прямыми MM_1 и b , пересекает плоскость π по прямой b_1 (ортogonalной проекции прямой b). Из точки $O = \pi \cap a$ проведем перпендикуляр OH на прямую b_1 , $H \in b_1$. Далее строим $HB \parallel a$ ($B \in b$) и $BA \parallel OH$ ($A \in a$). Тогда отрезок AB и является общим перпендикуляром данных скрещивающихся прямых a и b . В самом деле, так как $OH \perp b_1$, то $OH \perp b$ (теорема о трех перпендикулярах). Поскольку $OH \perp a$, то $AB \perp a$. Так как $AB \parallel OH$, то $AB \perp b$.

Докажем теперь *единственность* общего перпендикуляра данных прямых a и b . Допустим, что отрезок CD — также общий перпендикуляр этих прямых. Тогда как AB , так и CD перпендикулярны плоскости $\omega = (b, b_1)$, поскольку оба они перпендикулярны прямым b и BH этой плоскости. Следовательно, $AB \parallel CD$. Оказалось, что прямые a и b принадлежат плоскости ACD , что противоречит условию их скрещивания.

Наконец, покажем, что $AB < CD$, где CD — любой отрезок с концами на прямых a и b , отличный от их общего перпендикуляра AB . Пусть $CK \perp \omega$, $K \in \omega$. Тогда $CK = AB$, CD — наклонная к ω и, значит, $CK < CD$, а потому $AB < CD$. \square

Описанное в этом доказательстве построение есть один из возможных способов построения общего перпендикуляра скрещивающихся прямых.

О п р е д е л е н и е. Длина общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых называется *расстоянием* между этими прямыми.

Для вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми нет необходимости строить их общий перпендикуляр, так как $AB = OH$. Искомое расстояние равно также расстоянию между параллельными плоскостями α и β , существование которых утверждается теоремой 8.

Задача 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все ребра имеют длину a . Постройте общий перпендикуляр прямых BC и AB_1 (рис. 11) и найдите его длину.

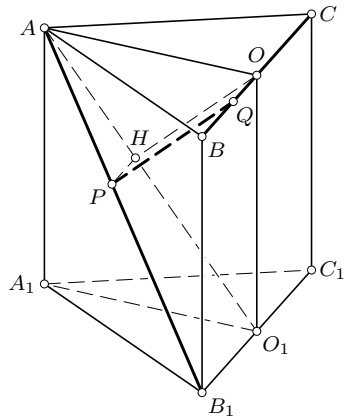


Рис. 11

Решение. В качестве плоскости π служит плоскость AOO_1 (O и O_1 — середины ребер BC и B_1C_1). Прямая AB_1 проецируется на нее в прямую AO_1 . В плоскости π построим перпендикуляр OH к прямой AO_1 . В прямоугольном треугольнике AOO_1 катеты OO_1 и AO соответственно равны a и $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Перпендикуляр OH делит гипотенузу AO_1 в отношении квадратов прилежащих катетов, т. е.

$AH : HO_1 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 : a^2 = 3 : 4$. Это отношение сохраняется на изображении, что и определяет положение точки H . Далее проводим $HP \parallel BC$ и $PQ \parallel OH$, получая PQ — общий перпендикуляр прямых BC и AB_1 . Так как $AO \cdot OO_1 = AO_1 \cdot OH$, то $OH = PQ = a\sqrt{\frac{3}{7}}$.

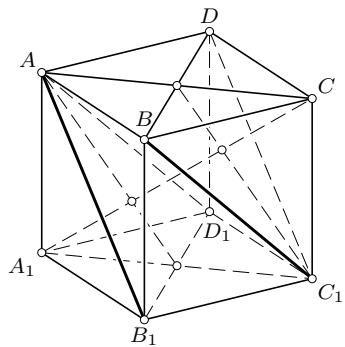


Рис. 12

Задача 2. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a найдите расстояние между прямыми AB_1 и BC_1

Решение. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными плоскостями AB_1D_1 и BDC_1 (рис. 12), которые делят диагональ CA_1 куба на три равные части (задача 1.19). Руководствуясь теоремой о трех перпендикулярах, убеждаемся, что эта диагональ перпендикулярна указанным плоскостям. Следовательно, расстояние между прямыми AB_1 и BC_1 , равно $\frac{1}{3}CA_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Для решения задачи не потребовалось строить общий перпендикуляр.

3.4. Построение и вычисление длины общего перпендикуляра векторным методом. Решим ту же задачу 2 векторно. Выберем векторный базис $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, где $\vec{a} = \overline{BA}$, $\vec{b} = \overline{BC}$, $\vec{c} = \overline{BB_1}$ (рис. 13). Пусть P и Q — некоторые точки соответственно прямых BC_1 и AB_1 . Положим $\overline{BP} = x\overline{BC_1} = x(\vec{b} + \vec{c})$, $\overline{AQ} = y\overline{AB_1} = y(\vec{c} - \vec{a})$. Тогда $\overline{PQ} = \overline{PB} + \overline{BA} + \overline{AQ} = -x(\vec{b} + \vec{c}) + y(\vec{c} - \vec{a}) = (1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c}$. Найдем такие числа x и y , чтобы вектор \overline{PQ} был ортогонален векторам $\overline{BC_1}$ и $\overline{AB_1}$, т. е. чтобы имели место равенства:

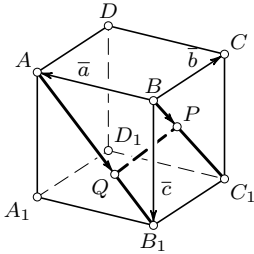


Рис. 13

$$\begin{cases} ((1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c})(\vec{b} + \vec{c}) = 0, \\ ((1 - y)\vec{a} - x\vec{b} + (y - x)\vec{c})(\vec{c} - \vec{a}) = 0. \end{cases}$$

Полагая $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и учитывая, что $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a} = 0$, получаем систему:

$$\begin{cases} 2x - y = 0, \\ x - 2y + 1 = 0, \end{cases}$$

из которой $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$. Точки P и Q искомого общего перпендикуляра строятся согласно полученным равенствам $\overline{BP} = \frac{1}{3}\overline{BC_1}$ и $\overline{AQ} = \frac{2}{3}\overline{AB_1}$. А так как $\overline{PQ} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, то $PQ^2 = \frac{1}{3}a^2$, $PQ = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

3.5. Пропорциональные отрезки на скрещивающихся прямых. Если две скрещивающиеся прямые u и v пересечены параллельными плоскостями $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, то отрезки, отсекаемые ими на одной прямой, пропорциональны соответственным отрезкам на другой прямой (рис. 14):

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots$$

Для доказательства через точку $A = u \cap \alpha$ проведем прямую l параллельно прямой v . Пусть прямая l пересекает плоскости β, γ, \dots в точках B_2, C_2, \dots . Тогда $A_1B_1 = AB_2$, $B_1C_1 = B_2C_2, \dots$ и $\frac{AB}{A_2B_2} = \frac{BC}{B_2C_2} = \dots$, откуда и следует сформулированное утверждение.

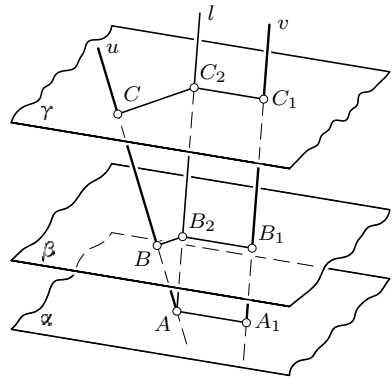


Рис. 14