А. В. Акопян
А. А. Заславский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. В. Акопян
А. А. Заславский

Геометрические свойства кривых второго порядка

Для учащихся старших классов

Издание 2-е, дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2011

УДК 22.151
ББК 514
А40

Книга посвящена тем свойствам коник (кривых второго порядка), которые формулируются и доказываются на чисто геометрическом языке (проективном или метрическом).

Изложение начинается с элементарных фактов и доведено до весьма нетривиальных результатов, классических и современных. Глава 2 является содержательным дополнением к традиционному курсу евклидовой планиметрии, расширяющим математический кругозор читателя.

Авторы стремились показать преимущества чисто геометрических методов, сочетающих наглядность и логическую прозрачность. В книге имеется значительное количество задач, решение которых тренирует геометрическое мышление и интуицию.

Книга будет интересна школьникам старших классов, студентам физико-математических специальностей, преподавателям и широкому кругу любителей математики.

Первое издание вышло в 2007 г. В данное издание включены наиболее интересные результаты, полученные после этого (§ 4.5—4.7).

Акопян А. В., Заславский А. А.

А40 Геометрические свойства кривых второго порядка. — 2-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2011. — 152 с.

ISBN 978-5-94057-732-4

ББК 514

ISBN 978-5-94057-732-4

Оглавление

Вступительные слова

Кривые второго порядка, или коники, традиционно считаются объектом аналитической геометрии и изучаются на первых курсах технических вузов. При этом из их геометрических свойств упоминаются, в лучшем случае, только оптические. Между тем, эти кривые обладают рядом других весьма красивых свойств, большая часть которых может быть доказана методами элементарной геометрии, вполне доступными старшеклассникам. Кроме того, коники могут применяться для решения геометрических задач, на первый взгляд никак с ними не связанных. В данной работе приводятся наиболее интересные факты, связанные с кривыми второго порядка, в том числе доказанные в последнее время.

Глава 1 книги посвящена элементарным свойствам коник. Большая часть изложенных в ней фактов широко известна, но и остальные достаточно просты, так что эта глава не требует от читателя подготовки, выходящей за рамки школьной программы. Некоторые несложные, но важные утверждения предлагаются в этой главе в качестве упражнений. Мы рекомендуем читателям, прежде чем читать решения упражнений, попытаться выполнить их самостоятельно. Это облегчит понимание дальнейших частей книги. Глава 2 носит вспомогательный характер. В ней изложены некоторые факты из классической геометрии, нужные для понимания последующих глав, которые в школе не изучаются в достаточном объеме. В главе 3 излагаются общие для всех коник проективные свойства, к числу которых относятся и довольно сложные, например теоремы о пучках коник. Наконец, глава 4 посвящена метрическим свойствам, которые, как правило, присущи только коникам определенного вида. Эта глава является наиболее сложной и требует для понимания достаточно глубокого ознакомления с предыдущими главами книги.

Авторы благодарят за ценные замечания И. И. Богданова и Е. Ю. Бунькову.

ГЛАВА 1

Элементарные свойства кривых второго порядка

§ 1.1. Определения

Пусть коза привязана веревкой к колышку. Ясно, что в этом случае она съест траву внутри круга, центром которого является колышек, а радиус равен длине веревки. Привяжем теперь козу к двум колышкам с помощью веревки и скользящего по ней кольца. В этом случае область, внутри которой коза съест траву, будет выглядеть как на рис. 1.1.

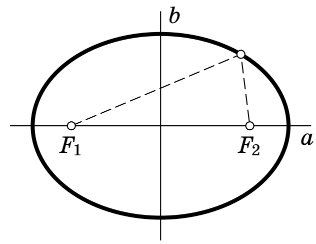

Рис. 1.1. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — большая и малая оси

Граница этой фигуры характеризуется тем свойством, что сумма расстояний от любой ее точки до колышков равна длине веревки. Такая кривая называется *эллипсом*, а точки, в которые воткнуты колышки, — *фокусами*.

Понятно, что эллипс выглядит как «вытянутая окружность». У него, очевидно, есть две оси симметрии. Это прямая, соединяющая фокусы, и серединный перпендикуляр к отрезку с концами в фокусах. Эти две прямые называются *большой* и *малой осями эллипса*, а длины их частей, лежащих внутри эллипса, — длинами большой и малой осей. Расстояние между фокусами называют фокусным расстоянием.

Также очевидно, что длина веревки, к которой привязана коза, равна длине большой оси эллипса, внутренность которого она выедает.

Интуитивно ясно, что коза может добраться до любой точки внутри эллипса и пожевать там траву, а до точек вне этого эллипса она добраться не может. Но если переформулировать это утверждение на чисто математическом языке, оно уже не так очевидно.

Упражнение 1. Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри эллипса до фокусов меньше, а от точки вне эллипса больше длины большой оси.

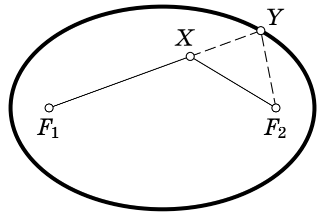

Рис. 1.2

Решение. Обозначим фокусы эллипса через F_1 и F_2, а точку через X. Точку пересечения луча F_1X с эллипсом обозначим через Y. Пусть сначала точка X лежит внутри эллипса. По неравенству треугольника $F_2X < XY + YF_2$, а значит, $F_1X + XF_2 < F_1X + XY + YF_2 = F_1Y + F_2Y$ (рис. 1.2).

Но $F_1Y + F_2Y$ равно длине веревки, к которой привязана коза, т. е. большой оси эллипса. Рассуждая аналогично в случае, если точка X лежит вне эллипса, получаем $F_2Y < XY + XF_2$. Следовательно, $F_1X + XF_2 = F_1Y + YX + XF_2 > F_1Y + F_2Y$.

Эллипсы часто встречаются в механике. Так, например, планета, двигаясь вокруг Солнца, описывает эллипс, причем Солнце находится в одном из его фокусов (закон Кеплера).

Эллипс является одним из примеров *кривых второго порядка*, или *коник*. Другими примерами таких кривых являются *парабола* и *гипербола*.

Гиперболой называется множество точек, модуль разности расстояний от которых до двух фиксированных точек, называемых *фокусами*, постоянен.

Гипербола состоит из двух дуг, которые сколь угодно близко приближаются к двум прямым, называемым *асимптотами гиперболы* (рис. 1.3). Гипербола с перпендикулярными асимптотами называется *равносторонней*.

Прямая, проходящая через фокусы гиперболы, является ее осью симметрии и называется *действительной осью*. Перпендикулярная ей прямая, проходящая через середину отрезка между фокусами, также является осью симметрии и называется *мнимой осью* гиперболы.

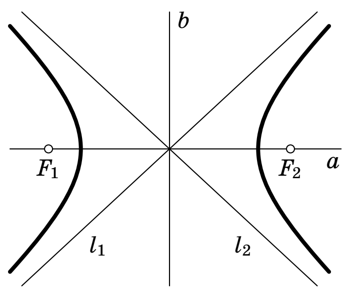

Рис. 1.3. F_1 и F_2 — фокусы, a и b — действительная и мнимая оси, l_1 и l_2 — асимптоты

Если комета летит мимо Солнца и силы притяжения Солнца недостаточно, чтобы оставить комету в пределах солнечной системы, то траекторией кометы будет дуга гиперболы, фокус которой находится в центре Солнца.

Параболой называется множество точек, расстояния от которых до фиксированных точки и прямой равны. Эти точка и прямая называются *фокусом* и *ди-*

ректрисой параболы соответственно. Прямая, перпендикулярная директрисе и проходящая через фокус, называется *осью параболы* (рис. 1.4). Очевидно, что эта прямая является осью симметрии параболы.

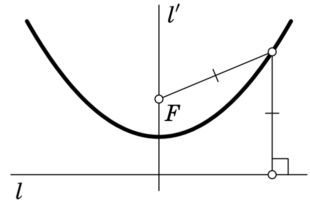

Рис. 1.4. F — фокус, l и l' — директриса и ось параболы

Например, камень, брошенный под углом к горизонту, летит по параболе.

В каком-то смысле, с геометрической точки зрения, парабола всего одна (как и окружность). Точнее говоря, все параболы подобны, т. е. они переводятся друг в друга поворотной гомотетией.

Рассмотрим семейство эллипсов с фокусом в фиксированной точке и проходящих через заданную точку. Второй же фокус устремим к бесконечности вдоль какого-то направления. Тогда эти эллипсы будут стремиться к параболе с тем же фокусом и осью, параллельной направлению, вдоль которого мы уводили второй фокус. Аналогичный эксперимент можно повторить и для гипербол. Таким образом, парабола является предельным случаем как эллипса, так и гиперболы.

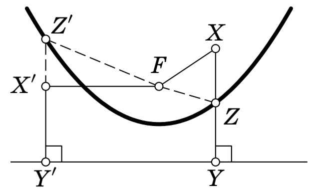

Рис. 1.5

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите для параболы и гиперболы утверждения, аналогичные утверждению из упражнения 1.

Решение. Для точек внутри параболы расстояние до фокуса меньше, чем расстояние до директрисы, а для точек вне параболы наоборот (рис. 1.5).

Проекцию точки X на директрису обозначим через Y, а точку пересечения XY с параболой через Z. Через F обозначим фокус параболы. По определению параболы $FZ = ZY$. Если точка X лежит внутри параболы, то $XY = XZ + ZY$. По неравенству треугольника $FX < FZ + ZX = ZY + ZX = XY$. Если точка X и парабола лежат по разные стороны от директрисы, то утверждение очевидно. Пусть точка X лежит вне параболы, но по ту же сторону от директрисы, тогда $ZY = ZX + XY$, и по неравенству треугольника $FX + XZ > FZ = ZY = ZX + XY$. А значит, $FX > XY$, что и требовалось доказать.

В случае с гиперболой это утверждение формулируется следующим образом: пусть модуль разности расстояний от любой точки на гиперболе до фокусов F_1 и F_2 равен d. Обозначим дугу гиперболы, внутри которой лежит F_1, через Γ. Тогда для точек X вне Γ величина $XF_2 - XF_1$ меньше d, а внутри — больше.

Пусть точка X лежит внутри части, отсекаемой дугой Γ. Обозначим точку пересечения луча F_2X и Γ через Y. Получаем, что

$F_2X = F_2Y + YX$. По неравенству треугольника $F_1X < F_1Y + YX$, значит, $F_2X - F_1X > (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$.

Если же точка X лежит вне Γ, то, взяв за точку Y пересечение F_1X и Γ, получим $F_1X = F_1Y + YX$. По неравенству треугольника $F_2X < F_2Y + YX$. Следовательно, $F_2X - F_1X < (F_2Y + YX) - (F_1Y + YX) = F_2Y - F_1Y = d$.

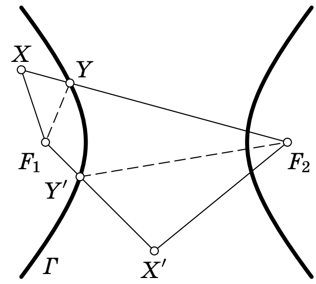

Рис. 1.6

Отметим (пока без доказательства), что и эллипс, и парабола, и гипербола обладают следующими свойствами: любая прямая пересекает каждую из этих кривых не более чем в двух точках, и из любой точки плоскости к кривой можно провести не более двух касательных. Эти свойства являются очевидными следствиями результатов § 1.5.

Упражнение 3. Найдите геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных.

Решение. Рассмотрим для определенности случай, когда окружности с центрами O_1, O_2 и радиусами r_1, r_2 лежат одна вне другой. Если окружность с центром O и радиусом r касается обеих окружностей внешним образом, то $OO_1 = r + r_1$, $OO_2 = r + r_2$ и, значит, $OO_1 - OO_2 = r_1 - r_2$, т. е. O лежит на одной из ветвей гиперболы с фокусами O_1, O_2. Аналогично если окружность касается обеих данных внутренним образом, то ее центр лежит на другой ветви этой гиперболы. Если же одно из касаний внешнее, а другое внутреннее, то модуль разности расстояний OO_1 и OO_2 равен $r_1 + r_2$, т. е. O описывает другую гиперболу с теми же фокусами. Аналогично если одна окружность лежит внутри другой, то искомое ГМТ состоит из двух эллипсов с фокусами O_1, O_2 и большими осями, равными $r_1 + r_2$ и $r_1 - r_2$. Случай пересекающихся окружностей разберите самостоятельно.

§ 1.2. Аналитическое определение и классификация кривых второго порядка

В предыдущем параграфе мы упомянули, что эллипс, парабола и гипербола являются частными случаями кривых второго порядка. Сейчас мы уточним это утверждение и покажем, что, в определенном смысле, других кривых второго порядка не существует.

Определение. *Кривой второго порядка* называется множество точек, координаты которых в некоторой (а значит и в любой) декартовой системе координат удовлетворяют уравнению второго порядка:

(1) $$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

Если левая часть уравнения (1) разлагается на два множителя первой степени, то кривая является объединением двух прямых (возможно, совпадающих). В этом случае она называется *вырожденной*. Вырожденной считается также кривая, содержащая ровно одну действительную точку (например, $x^2+y^2=0$).

В курсе аналитической геометрии показывается (см., например, [1]), что для любой невырожденной кривой существует система координат, в которой ее уравнение имеет достаточно простой вид. Опишем основную идею этого упрощения.

Вначале совершим поворот осей координат на угол φ. Это значит, что в уравнении (1) координаты x и y надо заменить соответственно на $x\cos\varphi - y\sin\varphi$ и $x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Выбирая значение φ, можно добиться того, что коэффициент при произведении xy станет равен нулю. Затем перенесем начало координат в точку (x_0, y_0), т. е. заменим x на $x+x_0$ и y на $y+y_0$. Выбором значений (x_0, y_0) можно добиться того, что уравнение (1) примет один из следующих канонических видов (I), (II), (III).

Непосредственное вычисление показывает, что кривая

(I) $\quad \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad a \geqslant b > 0,$

является *эллипсом* с центром в начале координат, фокусами в точках $(\pm\sqrt{a^2-b^2}, 0)$ и большой и малой полуосями (т. е. половинами длин соответствующих осей), равными соответственно a, b. В частном случае $a=b$ эллипс (I) является окружностью.

Кривая

(II) $\quad \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1, \quad a>0,\ b>0,$

является *гиперболой*, пересекающей свою действительную ось в двух точках, расстояние между которыми равно $2a$. Величина a называется действительной, а b — мнимой полуосью гиперболы. Прямые $x/y = \pm a/b$ являются асимптотами гиперболы, а точки $(\pm\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ — ее фокусами. При $a=b$ гипербола (II) будет равносторонней.

В случае

(III) $\quad y^2=2px, \quad p>0,$

кривая является параболой, ось которой совпадает с осью абсцисс, фокус находится в точке $(p/2, 0)$, а уравнение директрисы $x=-p/2$.

Кривая

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

называется *мнимым эллипсом* и не содержит ни одной действительной точки.

В дальнейшем, если не оговорено противное, кривая второго порядка подразумевается невырожденной и не мнимой.

Задача 1. Докажите, что уравнение $y = 1/x$ задает гиперболу, и найдите ее фокусы.

§ 1.3. Оптическое свойство

Как известно, если луч света падает на зеркальную поверхность, то отражается он от нее под таким же углом, под которым упал. Это связано с так называемым принципом Ферма, гласящим, что свет всегда выбирает кратчайший путь. Давайте докажем, что этот путь действительно будет кратчайшим.

Итак, дана прямая l и точки F_1 и F_2, лежащие по одну сторону от нее. Требуется найти такую точку P на прямой, что сумма расстояний от P до F_1 и F_2 будет минимальной. Отразив F_2 относительно прямой l, получим точку F_2'. Очевидно, что $F_2X = F_2'X$ для любой точки X на прямой l. Поэтому нам достаточно найти такую точку P, что сумма расстояний от P до F_1 и F_2' будет как можно меньше. Очевидно, минимум достигается, когда точка P лежит на отрезке F_1F_2', пересекающем прямую l. Тогда требуемые углы, очевидно, равны (рис. 1.7).

Упражнение 1. а) Когда достигается максимум модуля разности расстояний от точки P до точек F_1 и F_2, лежащих по разные стороны от прямой l?

б) Пусть даны две прямые l и l' и точка F, не лежащая на них. Найдите такую точку P на прямой l, что разность расстояний от нее до прямой l' и до точки F (взятая со знаком) максимальна.

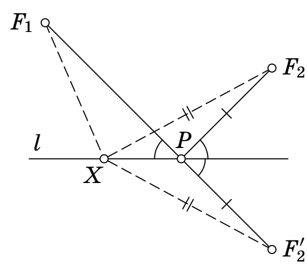

Рис. 1.7

Решение. а) Обозначим через F_2' точку, симметричную F_2 относительно прямой l. Очевидно, что $F_2X = F_2'X$ для любой точки X на прямой l. Нам достаточно найти такую точку P, что разность расстояний от P до F_1 и F_2' будет как можно больше. Из неравенства треугольника следует что $|F_1P - F_2'P| < F_1F_2'$. И достигается этот максимум тогда и только тогда, когда точки F_1, F_2', P лежат на одной прямой. Поскольку точки F_2 и F_2' симметричны, углы, которые образуют прямые F_1P и F_2P с прямой l, равны (рис. 1.8).

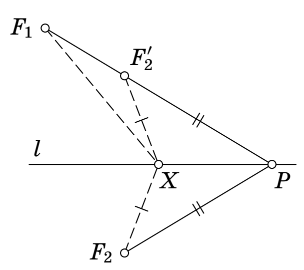

Рис. 1.8

б) Обозначим через F' точку, симметричную F относительно l. Выберем ту из точек F и F', расстояние от которой до прямой l'

минимально (расстояние берется со знаком). Пусть это точка F. Расстояние от F до l' обозначим через d. Тогда для любой точки P на прямой l расстояние до l' не больше чем $PF+d$. А значит, требуемая в задаче разность всегда не превосходит d. С другой стороны, она равна в точности d, когда точка P лежит на перпендикуляре к l', проведенном из точки F (рис. 1.9).

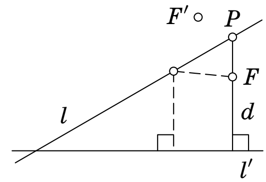

Рис. 1.9

Стоит также отметить, что если в п. а) прямая F_1F_2' параллельна l, а в п. б) прямая l' перпендикулярна l, то рассматриваемого максимума не существует (он достигается на бесконечности).

Теперь сформулируем одно из важнейших свойств коник — так называемое оптическое свойство.

Теорема 1.1 (оптическое свойство эллипса). *Пусть прямая l касается эллипса в точке P. Тогда прямая l — это внешняя биссектриса угла F_1PF_2* (рис. 1.10).

Доказательство. Пусть X — произвольная точка на прямой l, отличная от P. Так как X лежит вне эллипса, мы имеем $XF_1+XF_2 > > PF_1+PF_2$, т. е. из всех точек прямой l точка P имеет наименьшую сумму расстояний до F_1 и F_2. Но в силу вышесказанного это означает, что углы, образованные прямыми PF_1 и PF_2 с l, равны. $\square$

Упражнение 2. Сформулируйте и докажите оптическое свойство для парабол и гипербол.

Решение. Для парабол оптическое свойство формулируется следующим образом. Пусть прямая l касается параболы в точке P. Проекцию точки P на директрису обозначим через P'. Тогда l является биссектрисой угла FPP' (рис. 1.11).

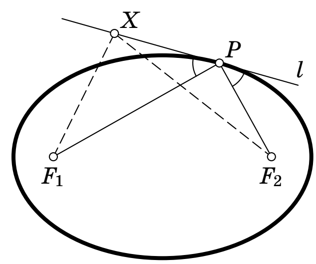

Рис. 1.10

Предположим, что биссектриса угла FPP' (обозначим ее через l') пересекает параболу еще в какой-нибудь точке. Обозначим эту точку через Q, а ее проекцию на директрису — через Q'. По определению параболы $FQ=QQ'$. С другой стороны, треугольник FPP' равнобедренный, и биссектриса угла P — это серединный перпендикуляр к FP'. А значит, для любой точки Q, лежащей на этой биссектрисе, выполняется равенство $QP'=QF=QQ'$. Но этого не может быть, так как Q' — единственная точка на директрисе параболы, в которой достигается минимум расстояния до точки Q.

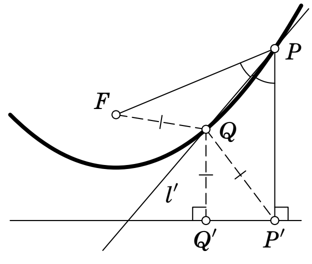

Рис. 1.11

Теперь сформулируем оптическое свойство для гиперболы.

Если прямая l касается гиперболы в точке P, то l является биссектрисой угла F_1PF_2, где F_1 и F_2 — фокусы гиперболы (рис. 1.12).

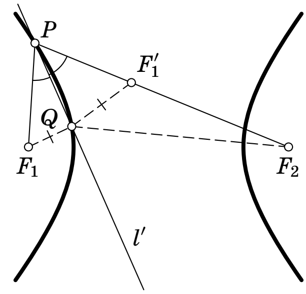

Рис. 1.12

Предположим, что биссектриса l' угла F_1PF_2 пересекает гиперболу еще в какой-нибудь точке Q (лежащей на той же дуге, что и P). Для удобства будем считать, что точка P лежит на дуге, которая ближе к фокусу F_1. Обозначим через F_1' точку, симметричную F_1 относительно l'. Тогда $F_1Q = QF_1'$, $F_1P = PF_1'$; кроме того, точки F_2, F_1' и P лежат на одной прямой. Итак, $F_2P - PF_1 = F_2Q - F_1Q$. В силу вышеуказанных равенств получаем $F_2F_1' = F_2P - PF_1' = F_2Q - QF_1'$. Но по неравенству треугольника $F_2F_1' > F_2Q - QF_1'$.

Можно также получить доказательства этих утверждений, аналогичные доказательству оптического свойства для эллипса. Для этого достаточно воспользоваться результатами упражнения 1.

Оптическое свойство параболы было известно еще древним грекам. Скажем, Архимед, расположив много медных щитов так, что они образовали параболическое зеркало, сжег осаждавший Сиракузы флот римлян.

Упражнение 3. Рассмотрим семейство софокусных коник (так называются коники, у которых фокусы совпадают). Докажите, что любые гипербола и эллипс из этого семейства пересекаются под прямыми углами (углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в данной точке их пересечения, см. рис. 1.13).

Решение. Пусть эллипс и гипербола с фокусами F_1 и F_2 пересекаются в точке P. Тогда касательные к ним в этой точке будут биссектрисами внешнего и внутреннего углов F_1PF_2 соответственно. Следовательно, они будут перпендикулярны.

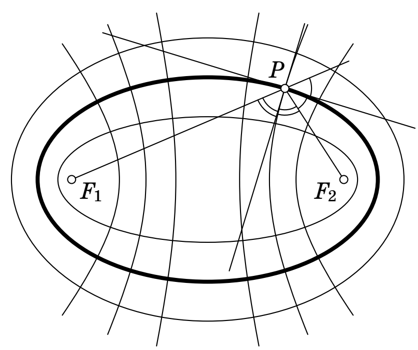

Рис. 1.13

В книге использованы шрифты гарнитуры Школьная фирмы ParaType.

Эскизы иллюстраций выполнены А. В. Акопяном в свободно распространяемой программе Kig (KDE Interactive Geometry). При подготовке издания они были перерисованы в программе MetaPost.

А. В. Акопян
А. А. Заславский

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Технический редактор *В. Ю. Радионов*
Редактор *Е. Ю. Бунькова*
Корректор *О. А. Васильева*

Подписано в печать 27.06.2011. Тираж 1000 экз.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ППП «Типография „Наука“»
121099, Москва, Шубинский пер., 6