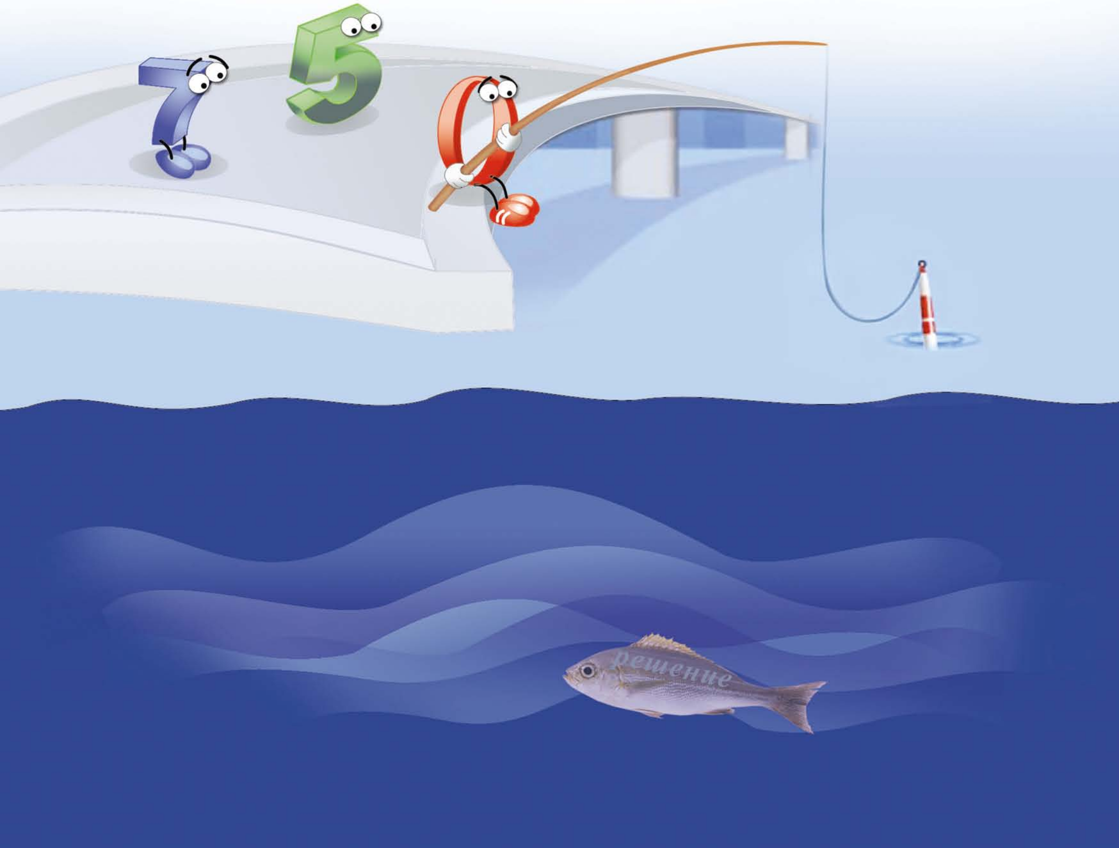
А. К. Толпыго

Турнир Городов

Тысяча задач

Международного математического Турнира городов



А. К. Толпыго

Тысяча задач Международного математического Турнира городов

Издание второе, дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2010

УДК 51
ББК 74.200.58:22.1
Т52

Толпыго А. К.
Т52 Тысяча задач Международного математического Турнира городов. 2-е изд. доп., — М.: МЦНМО, 2010. — 488 с.
ISBN 978-5-94057-580-1

Турнир городов — крупнейшее математическое соревнование школьников, проводящееся вот уже 30 лет. Его уникальность в том, что он доступен школьникам всего мира. Трудность задач самая разнообразная — от совсем легких до исключительно трудных, которые иной раз удавалось решить только 1-2 участникам.

В настоящей книге представлены все задачи 30 турниров с краткими указаниями. Автор — один из «отцов-основателей» Турнира и его бессменный организатор на протяжении всех этих лет.

Первое издание книги вышло в 2009 г.

ББК 74.200.58:22.1

ISBN 978-5-94057-580-1

Оглавление

Предисловие

Как это начиналось

> Иных уж нет, а те далече,
> Как Сади некогда сказал...

Созданный в 1980 году Турнир городов приближается к своему 30-летию. Сейчас он проводится в течение года и в нем участвуют все континенты, кроме Антарктиды. Но весной 1980 года никто ничего подобного не замышлял.

Тогда как раз заканчивался процесс ликвидации старого состава жюри Всесоюзной олимпиады. После того как студенты, аспиранты, молодые преподаватели Коля Васильев, Марк Башмаков, Коля Константинов, Толя Савин, Гарник Тоноян, Дима Фукс и прочие (не могу перечислить всех и потому приношу глубочайшие извинения неназванным) создали олимпиаду, придали ей престиж и высокий уровень, в Минпросе было решено, что ею могут руководить и другие люди. Людей, создавших олимпиаду, из жюри вывели, назначили новых.

Я представлял в жюри Украину. Поэтому лично я легко мог бы удержаться и в новом составе. Но новое руководство олимпиады мне решительно не нравилось, я сказал: «Блажен муж, иже не идет на совет нечестивых» — или что-то в этом роде, и попросил украинский Минпрос подыскать мне замену.

Со Всесоюзной олимпиады я ушел, но у меня остались московские друзья, которые затевали самые разнообразные новые мероприятия. Вот например: в Москве очень много сильных школьников, которые могли бы довольно успешно выступать на Всесоюзной олимпиаде, но не выступают, так как команда Москвы насчитывает всего лишь 6 человек. Так пусть они выступают в Москве! И москвичи стали получать задачи Всесоюзной олимпиады по телефону. В самый день олимпиады кто-то созванивался с Ташкентом или Тбилиси, записывал условия задач, которые только что были розданы участникам олимпиады, приносил их в класс — и 40 или 80 московских школьников становились как бы соучастниками Всесоюзной олимпиады. Они решали те же задачи, точно так же, как их товарищи вдали, только премий не получали.

И тут, как сказал бы Михаил Булгаков, подвернулся я. Услышав об этом, я спросил: «А нельзя ли и в Киев передать задачи? Мы бы их тоже решали».

Меня заверили, что это вполне возможно, но, как выяснилось, считали мы без хозяина. Через неделю мне позвонили в Киев и сообщили: новый состав Всесоюзного жюри не считает возможным передавать задачи в Москву (а тем более в Киев).

Досадно... Но идея уже родилась, и не хотелось от нее отказываться. Раз мы не можем пользоваться задачами Всесоюзной — отчего бы нам самим не составить набор задач, тем более что мы составим ничуть не хуже? Давайте возьмемся!

Так это началось. Первый Турнир (он назывался еще «Олимпиадой трех городов» — Москва, Киев и Рига) был проведен тогда же, т. е. весной 1980 года, параллельно Всесоюзной олимпиаде, но по другим задачам. Потом он стал расти. Если в «Олимпиаде трех городов» фактически участвовало только 2 города (Рига участвовала номинально, только в подборе задач), то через несколько лет — уже десятки. Турнир вышел за рамки Советского Союза, потом — за рамки Европы... Бессменным его руководителем все эти годы был Николай Константинов, вклад которого в математическое образование (притом — в мировом масштабе) вообще трудно переоценить. Я не могу здесь перечислить всех людей, внесших внушительный вклад в эту 30-летнюю работу; однако читатель встретит все или почти все их фамилии среди авторов задач.

Кроме наших современников читатель встретит среди авторов также и нескольких великих математиков прошлого (см., например, задачи XIV.27 или XX.25; в последнем случае задача представляет собой ключевую, хотя и вполне элементарную, лемму из разработанной Анри Лебегом теории меры).

Попутно с расширением Турнира ставились разные организационные эксперименты, иногда удачные, иногда не очень. Например: запретить решать более 3 задач (чтобы не распылялись); разрешить школьникам писать (и сдавать) коллективную работу (оказалось, что от такой работы слишком много шума в классе), и др. Турнир стали проводить дважды в год: осенью и весной. А поскольку задачи достаточно трудны, решено было наряду с «основным» туром устраивать еще и «тренировочный». Замечу, что это название оказалось неудачным, так как большинство школьников склонны считать «тренировку» недостойным занятием, хотя дай им бог хоть на тренировочном-то решить что-нибудь!

Неудачей окончилась и попытка давать основной и тренировочный туры параллельно. В итоге мы пришли к тому, что в году проходит 4 тура: два осенью и два весной.

Таким образом, сейчас Турнир стал всемирным и длится почти весь год, начинаясь в октябре и заканчиваясь летом очередной Летней конференцией Турнира. Четырежды в году школьники разных городов в разных странах и на разных континентах в один день и, насколько позволяет география, в один час собираются — как правило, в одной из городских школ — и решают одни и те же задачи. Замечу кстати, что идея проводить Турнир городов (а не стран), возникшая по совершенно случайным обстоятельствам, оказалась весьма удачной в том смысле, что политические пертурбации 1990-х, распад государств никак не сказались на Турнире. В развитие этого принципа ниже я не указываю страну, в которой находится тот или иной город.

Добавлю к сказанному кое-какие сведения о том, как именно проходят Турниры в разных городах[1].

В Северной Америке число участников обычно невелико. Как рассказывал представитель Канады Энди Лю, в Эдмонтоне участвует обычно человек 10 («если 20 — они прыгают от радости»). При этом сами учителя не хотят, чтобы их ученики ходили на Турнир, потому что после Турнира они спрашивают у учителей, как решать эти задачи, а учителя (что, кстати, совершенно естественно) ответить не могут.

В Азии, где профессия учителя очень престижна, ситуация иная. На Тайване участие в Турнире платное. Деньги не очень большие, 200 тайваньских долларов, что примерно соответствует 200 российским рублям, но характерен сам факт. При этом на Тайване в 2004/05 году в Турнире приняло участие 2200 человек, которые съехались со всего острова в три города.

В Минске на Турнир приходит порядка 1500 человек, однако половина, по словам организаторов, приходит по распоряжению своих учителей и, отметившись, тут же уходит. Однако я должен заметить, что и 700 добровольных участников — цифра весьма внушительная.

В Аргентине (как рассказал Н. Константинов) турниром заправляют четыре женщины. При этом школьники для участия съезжаются со всей страны, даже с Огненной Земли. Когда Кон-

[1]На основе выступлений в ходе общей дискуссии на Летней конференции Турнира в 2005 году в городе Мир в Белоруссии.

стантинов выразил удивление, как они смогли сделать так много — бразильский профессор вздохнул и сказал: «Ведь у них много людей»... Сам он работает в одиночку.

Турнир, как и всякое соревнование, выработал свой стиль. Если задачи на раскраску, на четность или делимость на подходящее число встречаются примерно с одинаковой частотой на любом соревновании юных математиков, то на Турнире (и здесь он заметно отличается от других подобных ему соревнований) часто предлагается построить контрпример к какому-то более или менее очевидному утверждению. (См. например, задачи VIII.10; XI.15; XVII.40; XX.10; XX.21; XX.39; XXII.21, XXV.10; XXVII.40.) Замечу, что при этом чаще, чем в других математических соревнованиях, появляются задачи, требующие совершенно зубодробительной конструкции в качестве примера или, напротив, в качестве доказательства (таковы, например, задачи XIV.20, XXII.44 и др.).

Впрочем, ситуацию с «зубодробительными конструкциями» облегчает то обстоятельство, что никто не обязан их решать. Согласно правилам Турнира, школьнику засчитывается не более трех задач (даже если он решит все 6 или 7). Смысл такого ограничения в том, чтобы никто не пытался решить всё, а выбрал себе задачу по вкусу — в конце концов, есть и любители заковыристых конструкций — и занялся ею всерьез. В этом смысле Турнир, хотя бы в слабой мере, сближается с работой настоящего математика, который решает одну задачу, и не пять, а пять тысяч часов.

Из других идей, часто встречающихся в задачах, хочу отметить идею «дискретной теоремы Коши» (например, XXIII.7); в таких задачах обычно надо заметить, что некая величина принимает только целые значения, притом разных знаков, за один шаг меняется не более чем на единицу и, следовательно, переходит через нуль.

И еще одно замечание. По задачам Турнира иной раз можно следить не только за идеями математического образования, но и за политической ситуацией. По этому поводу отсылаю читателя, например, к задачам XIII.23 или XV.31.

Подведение итогов

Школьников, конечно же, очень интересовал результат: «Как я выступил?» и «Как выступил мой город?».

В первых двух Турнирах (1980 и 1981 год) оценка результатов проводилась по традиционной для олимпиад системе «плюсминусов», и потому сравнить результаты было невозможно или очень трудно. Поэтому начиная с третьего турнира была введена система баллов.

Чтобы большие города не имели преимуществ над малыми, с самого начала было решено, что число зачетных участников от города равно $N/100\,000$, т. е. от ста тысяч жителей — один зачетный участник, если население не меньше 500 тысяч; при меньшем населении от города должно быть 5 зачетных участников (т. е. тех, кто выступил лучше всех), но результат города умножается на поправочный коэффициент. Попутно замечу, что существует еще один поправочный коэффициент: поскольку 8- и 9-классникам[2] дают одни и те же задачи, то для «уравнивания шансов» 8-классники имеют льготный коэффициент 4/3, т. е. их результат умножается на 4/3. Аналогично 10-классники имеют по сравнению с 11-классниками коэффициент 5/4.

Но эта книга — сборник задач, и только. Поэтому я лишь вскользь упомянул о Летней конференции Турнира, и поэтому же здесь я не буду ни перечислять победителей, ни даже приводить баллы, которые выставлялись за разные задачи. Но все-таки интересно же, как именно выступили разные города?

Непосредственно сравнивать результаты разных лет бессмысленно, так как, даже если не говорить о разной трудности задач в разные годы, многое зависело просто от того, сколько баллов давалось за задачи: от 3 до 7 или от 20 до 50. Вспоминается, как Минпрос решил сравнить результаты олимпиад по математике, физике и химии; математики подсчитали баллы, вывели средний, а потом Савин сказал: «А теперь давайте все баллы умножим на десять...»

Я думаю, что сравнить все-таки можно. Примем условно, что Москва всегда выступала одинаково (для определенности — что Москва всегда получала по своим 89 зачетным участникам балл 100). Такой подход более или менее разумен исходя из того, что Москва — город большой и «реальное среднее» по 89 участникам вряд ли так уж сильно колебалось. Соответственно, «приведем» все результаты всех городов к результату Москвы (см. ниже).

[2]В 1980-е годы обучение в СССР было 10-летним, и «старшими» считались 9—10 классы, а «младшими» — 7—8 классы.

I Турнир городов
(Олимпиада трех городов, 1980)

1. На окружности имеются синие и красные точки. Разрешается добавить или убрать красную точку и поменять цвета ее соседей. Менее двух точек оставлять не разрешается. Пусть первоначально было всего две красные точки. Докажите, что за несколько разрешенных операций нельзя получить картину, состоящую из двух синих точек.

К. Казарновский

2. В таблице $N \times N$, заполненной числами, все строки различны (две строки называются различными, если они отличаются хотя бы в одном элементе). Докажите, что из таблицы можно так вычеркнуть некоторый столбец, что в оставшейся таблице опять все строки будут различны.

А. Анджанс

3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{101}$ — такая перестановка чисел $2, 3, \ldots$ $\ldots, 102$, что a_k делится на k при каждом k. Найдите все такие перестановки.

Фольклор

4. В пространстве имеется 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45°.

А. Толпыго

5. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ (площади S). Каждая его сторона разбита на K равных частей. Точки деления, принадлежащие стороне AB, так соединены прямыми с точками деления, принадлежащими стороне CD, что первая, считая от A, точка деления соединена с первой точкой деления, считая от D, вторая — со второй, и т. д. (первая серия прямых), а точки деления, принадлежащие стороне BC, аналогичным образом соединены с точками деления, принадлежащими стороне DA (вторая серия прямых). Образовалось K^2 маленьких четырехугольников, которые образуют, условно говоря, K «строк» и K «столбцов». Из них выбрано K четырехугольников так, чтобы в каждой «строке» и в каждом «столбце» было выбрано по одному. Докажите, что сумма площадей выбранных четырехугольников равна S/K.

А. Анджанс

6. В квадрате со стороной 1 проведено конечное количество отрезков, параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые разбивается квадрат этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.

А. Берзиньш, А. Анджанс

II Турнир городов (1981)

7—8 классы

1. Найдите все целые решения уравнения $y^k = x^2 + x$ (k — натуральное число, большее 1).

Фольклор

2. Пусть M — множество точек на плоскости. Точка O называется «почти центром симметрии» множества M, если из M можно так выбросить одну точку, что для оставшегося множества O является центром симметрии в обычном смысле. Сколько «почти центров симметрии» может иметь конечное множество на плоскости? Укажите все такие числа.

В. Прасолов

3. В окружность с центром O вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны. Докажите, что ломаная AOC делит четырехугольник на две части равной площади.

В. Варваркин

4. См. задачу 9 а).

5. См. задачу 7 при $K = 50$.

9—10 классы

6. Будем говорить, что две пирамиды соприкасаются гранями, если эти пирамиды не имеют общих внутренних точек и некоторая грань одной пирамиды пересекается с некоторой гранью другой пирамиды по многоугольнику. Можно ли расположить 8 пирамид в пространстве так, чтобы каждые две соприкасались гранями?

А. Анджанс

7. На бесконечной плоскости играют двое: один передвигает одну фишку-волка, другой — одну из K фишек-овец. После хода волка ходит какая-нибудь из овец, затем, после следующего хода волка, опять какая-нибудь из овец и т. д. И волк, и овцы передвигаются за один ход в любую сторону не более чем на один метр. Верно ли, что для любого числа овец, участвующих в игре, существует такая первоначальная позиция, что волк не поймает ни одной овцы?

Фольклор

8. Докажите, что любое действительное положительное число можно представить в виде суммы девяти чисел, десятичная запись каждого из которых состоит из цифр 0 и 7.

Э. Туркевич

9. Однажды K друзей одновременно узнали K новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится 1 час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Рассмотрите в этой задаче три случая:

а) $K = 64$, **б)** $K = 55$, **в)** $K = 100$.

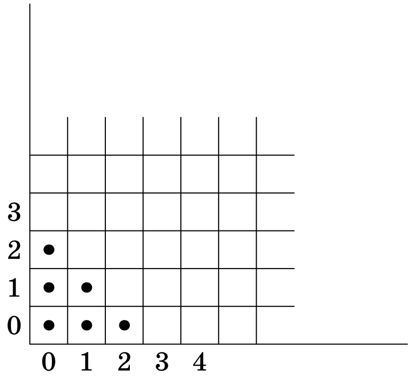
А. Анджанс

10. На бесконечной клетчатой бумаге отмечено шесть клеток (см. рисунок). На некоторых клетках стоят фишки. Положение фишек разрешается преобразовывать по следующему правилу: если обе соседние сверху и справа от данной фишки клетки свободны, то в эти клетки ставится по фишке, а старая фишка убирается. Ставится цель за некоторое количество таких операций освободить все шесть отмеченных клеток. Можно ли достигнуть этой цели, если

а) в исходной позиции имеются всего 6 фишек и они стоят на отмеченных клетках;

б) в исходной позиции имеется всего одна фишка и она стоит в левой нижней отмеченной клетке.

М. Концевич



Алексей Кириллович Толпыго

ТЫСЯЧА ЗАДАЧ МЕЖДУНАРОДНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ТУРНИРА ГОРОДОВ

Подписано в печать 03.12.2009 г. Формат 60×90 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 30,5. Тираж 2000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241–74–83.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., 6.
