И. А. Кушнир

Геометрия

Поиск и вдохновение

И. А. КУШНИР

ГЕОМЕТРИЯ. ПОИСК И ВДОХНОВЕНИЕ

(ГЕОМЕТРИЯ НА БАРРИКАДАХ)

Москва
Издательство МЦНМО
2013

УДК 514.112
ББК 22.151.0
К96

Кушнир И. А.

К96 Геометрия. Поиск и вдохновение. — М.: МЦНМО, 2013. — 592 с.: ил.

ISBN: 978-5-4439-0058-2

Книга известного автора, заслуженного учителя Украины, признанного специалиста в школьной геометрии, посвящена различным геометрическим сюжетам. В книге рассматриваются как классические, так и новые интересные задачи из школьной геометрии.

Книга предназначена ученикам 7–11 классов и учителям общеобразовательных школ, лицеев, гимназий, в частности математического профиля, а также студентам педагогических вузов. Может быть использована при подготовке абитуриентов, участников математических олимпиад различного уровня.

ББК 22.151.0

Редактор А. Д. Блинков

Кушнир Исаак Аркадьевич

ГЕОМЕТРИЯ. ПОИСК И ВДОХНОВЕНИЕ

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (499) 241-74-83

Подписано в печать 09.02.2013 г. Формат 70×100 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 37. Тираж 2000. Заказ № .

Отпечатано в ППП «Типография „Наука“».
121099, Москва, Шубинский пер., д. 6.

ISBN 978-5-4439-0058-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВМЕСТО ПРЕДИСЛОВИЯ. «ИНТЕРВЬЮ, КОТОРОЕ БУДЕТ»

Посвящается 10^{в} математическому классу
206 школы г. Киева 1986 г. выпуска

Договоримся:
А — автор книги,
Ж — журналист, берущий у автора интервью.

* * *

Ж: Мне казалось, что геометрию любят учителя, ученики и их родители. Неоднократно слышал, что в 60-е годы XX столетия геометрия подвергалась педагогическому преследованию. Неоднократно говорили многие педагоги (среди них был и И. Ф. Шарыгин), что геометрию нужно защищать. Первое издание этой книги называлось «Геометрия на баррикадах». Это не претенциозно?

А: Нет, это реальность.

Ж: Странно, чтобы не сказать, что смешно: какие баррикады в геометрии? В школьной геометрии?

А: Вот перед вами зарубежная книжка-надпись: «Долой Евклида!», «Смерть треугольникам!».

Ж: Действительно, надо браться за оружие и защищаться...

А: Вот видите, вы довольно быстро согласились, но баррикады нужны не только для защиты Евклида, но всей геометрии!

Ж: От кого?

А: А от: 1) тех, кто не преподает математику в школе, но учит, как это делать; 2) математиков, забывших этот предмет; 3) тех, кто многое умеет в математике, но не умеет преподавать и боится, что все это увидят.

Ж: Судя по всему, многие из перечисленных претендуют на гегемонию в школьной математике? В текучке мы этого не замечали. Когда это началось?

А: Поиски «геометрических ведьм» начались в Европе в начале 60-х гг. XX столетия. Апогей наступил в августе 1966 г. Именно тогда в Москве был проведен очередной Международный математический конгресс (ICM — International Congress of Mathematicians).

На секции математики и вопросов преподавания математики бельгийский профессор математики Жорж Папи (Georges Papy) предложил всем радикально трансформировать самую «традиционную» из школьных математических наук — геометрию. Для этого, считал ученый, *следует отменить преподавание системы Евклида и для двенадцатилетних* (!) *школьников ввести понятие вектора любого количества измерений.*

Ж: И что? Ему не покрутили пальцем у виска?

А: Что вы! Академик В. И. Арнольд рассказывает о формализации школьного образования во Франции: «В результате ученики начальных классов на вопрос „Чему равно $2+3$?“ ответили: „Поскольку сложение является коммутативной операцией, $2+3$ равно $3+2$“».

Ж: Ну, у нас до этого не дошло.

А: До этого не дошло, но... Впрочем, со школы вы помните, что такое луч?

Ж: Кажется, да! Прямая, ограниченная с одной стороны.

А: А вот определение луча из учебника геометрии под редакцией академика А. Н. Колмогорова, кстати, одного из трех авторов учебника (Колмогоров А. Н., Семенович А. Ф., Черкасов Р. С. Геометрия. Учебное пособие для 6–8 классов средней школы): «Любая точка O прямой p разбивает множество отличных от O точек этой прямой на два непустых подмножества таких, что точка O лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным подмножествам. Объединение каждого из этих подмножеств с точкой O называется лучом с началом O».

Ж: С ума можно сойти. И что, никто, кроме вас, не кричал об этом ужасе? Ведь это должны были читать дети... и их родители!

А: Кричать вначале было трудно. Начиная именно с упомянутого Международного математического конгресса возникло целое движение, называемое «современным аспектом математики», а последователи этого движения называли себя «модернистами».

Ж: И советская педагогика не отставала?

А: Конечно. Еще и сегодня с почтенным придыханием произносятся фамилии группы французских математиков Дьедонне, Анри Картана, Мандельбройта и др., которые публиковались под общим псевдонимом Бурбаки.

Ж: Можете подтвердить документально?

А: Конечно. В Москве в 1970 г. в издательстве «Мир» вышла книга Шоке Г. «Геометрия» (перевод с французского, под редакцией И. М. Яглома). В предисловии титульный редактор писал:

«Сегодня, кажется, уже почти все согласны с тем, что традиционная система Евклида, в русской учебной литературе наиболее последовательно проведенная в созданных еще в прошлом столетии учебниках Киселёва, не заслуживает сохранения: ведь ни в науке, ни в практической жизни выпускнику средней школы далее не придется иметь дело со многими теоремами сложившегося курса геометрии и с типичными для этого курса методами рассуждений».

Ж: Убедили. Но ведь действительно — где применяется, например, формула Герона?

А: Я думаю, что после окончания нашей беседы у вас не возникнет такого вопроса. Скажу только, что популярный английский математик очень эмоционально и близко мне сказал: «Выпьем за математику, которая нигде не имеет применения!».

Ж: Мы отвлеклись. Как общественность Советского Союза в то время восприняла идеи модернистов?

А: Как и следовало ожидать, оказались многие «впереди планеты всей». Один из академиков, представитель отдела математики Российской академии наук при Министерстве просвещения, заявил:

«У математики нет ничего общего с геометрией... И поэтому я предлагаю из всех математических курсов (будь то в университете, в средней школе или в детском саду) геометрию полностью исключить» (А р н о л ь д В. И. Что такое математика. — М.: МЦНМО, 2002).

Ж: Кто же первый антимодернистский диссидент, не побоявшийся сказать: «А король-то гол»?

А: «На кухне» шептались многие. В «Учительской газете» мне удалось опубликовать статью со «смелым» по тем временам заголовком «Моя любовь — треугольник». Но основной удар нанес журнал «Математика в школе» (№ 1, 1973), опубликовав статью Рене Тома (René Thom), одного из самых известных французских математиков современности, лауреата премии Филдса (1958 г.), «Современная математика — существует ли она?». Каждый раз и сегодня перечитываю ее с удовольствием:

«*Модернисты... были приведены своими философскими предпосылками к тому, чтобы, с одной стороны, покинуть такую идеальную почву для обучения поискам*, такой неисчерпаемый кладезь упражнений, который дается евклидовой геометрией, а с другой стороны, заменить его общими вопросами множественных логических структур, т. е. материалом *самым бедным, самым пустым*, самым разочаровывающим по отношению к любой интуиции, какой только существует».

Рене Том подытоживает: «Настало время отбросить лживые обещания».

Ж: Ну, слава Богу! А вам не приходилось «драться на дуэли» с модернистами?

А: Пришлось однажды. В Киеве проводил лекцию о «современной школьной математике» гость из Москвы И. Яглом (помните — титульный редактор книги Густава Шоке?). Слушателями были преподаватели вузов, среди которых «затесался» один школьный учитель. Когда докладчик предложил задавать вопросы, я отважился: «Два вопроса. Первый: Где ваши задачи? Второй: Как вы относитесь к статье Рене Тома „Современная математика — существует ли она?“».

И. Яглом ответил так: «У нас нет своих Шапошникова и Вальцева». А на второй что-то промямлил. У меня было такое впечатление, что ни он, ни сидящие в зале слушатели не поняли, о чем речь. Да и неудивительно — «слишком далеки они от школы».

Время нас рассудило. В 1984 г. в городе Аделаида (Австралия) прошел V Международный конгресс математического образования (ICME). Вот некоторые выводы конгресса.

«Участники конгресса подчеркнули значение геометрии для формирования развития творческого мышления учеников...

Евклидову геометрию следует вернуть в школьные программы, отведя ей то место, которое она имела до модернизации».

Ж: Считаете ли вы, что школьная алгебра находится в привилегированном положении в сравнении с геометрией?

А: Конечно. И дело не только в бóльшем количестве часов по алгебре. «Чистым математикам» (в основном — преподавателям вузов) алгебра намного ближе, чем геометрия. Геометрию (школьную и классическую) они забыли и ею не занимаются. Зато из «родственных» алгебре дисциплин они навязывают школе целые разделы. Так в школу пришли элементы высшей математики, статистики и даже теории вероятностей. И это для выпускников массовых школ, которые кроме слова «дискриминант» ничего не узнали! А в геометрии из школьной программы исключалась даже формула Герона, а, например, прямая Эйлера — откровение даже для многих учителей.

Ж: Может быть, отменить не только геометрию, но разные математики-информатики и ввести три урока физкультуры в день? Шучу, конечно!

А: Вы не так далеки от истины. Сегодня существуют «элитные» школы с итальянскими туалетами, где явно намечается подобная тенденция. Детям не надо трудиться — все наперед куплено их супербогатыми родителями.

Ж: Мне как-то попалось ваше четверостишье: «Скажите правду, кто бы мог подумать, что даже в первом классе надо думать».

А: Вопросу тысячи лет: Спарта и Афины. Невнимание к развитию интеллекта привело к поражению Спарты, примера неразумности и примитивизма, а Афины всегда будут восхищать человечество, дав миру не только Архимеда и Евклида (!), но и сотни выдающихся мыслителей.

Ж: Так что, можно тренировать не только тело, но и мозг?

А: Спортсмен может увеличить свои результаты в несколько раз. А мозг в результате «разумных тренировок» увеличивает свои возможности в миллионы и миллиарды раз! В истории многократно было доказано, что мыслительная сфера деятельности — единственная, где *один-единственный ученый может оказаться «сильнее» всего человечества*.

Ж: И этому помогает геометрия?

А: В школе — в первую очередь, потому что построена на тысячелетних: «что дано» и «что требуется доказать».

Ж: Баррикады и компьютеры. Последние — по какую сторону баррикад?

А: На этот вопрос процитирую И. Ф. Шарыгина: «Возможно, именно геометрия должна сыграть важную роль в сохранении хомо сапиенс. Ведь передоверяя компьютеру многочисленные функции, человек рискует исчезнуть с лица земли как биологический вид, и именно геометрия может сопротивляться всеобщей компьютеризации. Именно в геометрии человек не проиграл интеллектуальные соревнования компьютеру».

Ж: Существует мнение, что методике преподавания математики не более 150 лет. Кто первый отметил особое значение геометрии для школы?

А: В XVII столетии Феофан Прокопович (1681–1736), ректор Киево-Могилянской академии, писал: «Ни одна из наук, которые существуют для того, чтобы облегчить или украсить жизнь человека, без помощи геометрии не могла бы не только развиваться и совершенствоваться, но даже не могла бы и возникнуть.

Для занятия философией не годится ум, не освещенный ярким сиянием геометрических знаний».

Ж: Вы любите цитировать немецкого ученого-педагога Ф.А̇. В. Дистервега (Diesterweg). Почему?

А: С удовольствием отвечу. Россия, шестидесятые годы девятнадцатого столетия. Только что отменили крепостное право. Казалось бы — государству не до геометрии. А оно, государство, издает «Элементарную геометрiю», где для нас особенно ценен «Комментарiй къ элементарной геометрiи для учителей».

Комментарий Ф. А. В. Дистервега надо было бы сегодня издать полностью в сафьяновом переплете, потому что так умно, так страстно, так злободневно, кроме него, о геометрии не писал никто, разве что Игорь Фёдорович Шарыгин.

Не откажу себе в удовольствии процитировать немецкого ученого:

«В народных школах учение о числах *необходимо* геометрии по своим приложениям к обыденной жизни в виде искусства счисления. Геометрия же *образовательна и привлекательна* по присущей ей всюду чувственной познаваемости и образности…

Геометрия азиатцев, африканцев, американцев та же, что и геометрия европейцев: свойства треугольников повсюду те же. Геометрия есть предмет общенародный; мало того — мировой».

«Геометрия есть акт духовного освобождения».

«Геометрия становится часом духовного развития и чистым наслаждением для учеников… Этот предмет можно сделать доступным и для самых тупоголовых…».

«Чтобы был успех, преподавание геометрии должно прежде всего доставлять удовольствие ученикам. Где этого не будет, где оно упадет до того, что обратится в принудительный предмет преподавания, там пусть лучше совсем его не будет».

Ж: Какие учебники по школьной геометрии пользуются уважением на баррикадах? Ведь учебник Андрея Петровича Киселёва наверняка с вами? Кстати, в чем феномен этого автора и его учебника?

А: По порядку. Уважением на баррикадах пользуется любой учебник геометрии. Нельзя не считаться с тем, что автор или авторы собрали научно-педагогический материал. И в каждом, подчеркиваю, в каждом учебнике найдется полезная информация, особенно в подборе задач. Хорошо, когда учебник написан школьным учителем, как учебник Киселёва. В этом феномен его популярности. Следует учесть, что более тридцати лет он использовался как основной и единственный учебник школы и, как пишет в своей статье «Перечитывая Киселёва» Н. Розов, «практически все старшее поколение нашего общества знает и помнит фамилию этого человека — именно с его именем в наибольшей степени ассоциируется воспоминание о школьных учебниках далекой юности...».

«Геометрию мы проходили по Киселёву, еще не испорченному последующими переработками» — И. М. Гельфанд, один из крупнейших математиков современности (журнал «Квант», № 1, 1989).

Ж: Чем вас не устраивает учебник Киселёва?

А: Отсутствием раздела о векторах и геометрических преобразованиях.

Ж: А чем отличается этот учебник от современных?

А: Разумной полнотой теоретического материала по классической геометрии, удивительным набором задач и «исключительным педагогическим потенциалом» (Н. Розов). Добавлю, что я уверен в отсутствии плагиата.

Ж: А что, и в школьных учебниках это есть?

А: Есть (это можно доказать), но обсуждать это мы пока не будем.

Ж: Я знаю, что не только ученики, но и некоторые учителя «боятся» задач на построение. Что вы думаете по этому поводу?

А: Может быть, задачи на построение были обязательны для учеников Евклида и Архимеда, но в массовую школу, как мне кажется, они пришли после книги Юлиуса Петерсена «Методы и теории для решения геометрических задач на построение», вышедшей в 1866 г. в Копенгагене:

«*...кое-кто считает решение геометрических задач на построение в некоторой степени загадками, справиться с которыми удается только одиночкам, от природы особо одаренным особам. Вследствие этого геометрические задачи на построение вошли лишь частично в систему школьного преподавания, тогда как именно в школах их достойное место, так как никакие задачи не способствуют так развитию у учеников наблюдательности, правильного мышления, будучи в то же время для них наиболее привлекательными, как геометрические задачи на построение*» (*из предисловия к книге*).

Ж: А кто из современных ученых-методистов пропагандировал задачи на построение?

А: В первую очередь — Иван Иванович Александров (1856—1919). Его «Сборник геометрических задач на построение» переиздавался 18 раз и является «классическим трудом, завоевавшим глубокую признательность широких математических кругов всего мира» (из аннотации). Лучше не скажешь!

Из предисловия к первому изданию:

«...никогда не следует скрывать ни от самих себя, ни, тем более, от учащихся те трудности, которые приходится нам самим преодолевать *при решении геометрических задач, и то, что часто их решение находится с помощью произвольных попыток, которые хотя и могут быть известным образом направляемы, но, однако, иногда довольно долго бывают безуспешны для умов наиболее проницательных. Даже в этой наиболее развитой отрасли человеческого знания весьма заметна недостаточность наших средств к исследованию и их некоторая случайность. Вот почему скрывать друг от друга соб-*

ственные затруднения — значит забыть взаимную друг другу помощь и отказаться служить развитию наших знаний сообразно нашим силам».

Наш современник!

Ж: Вы меня во многом убедили. Но меня не покидает мысль, что по натуре вы скорее геометр, чем алгебраист, и этим многое объясняется в вашем творчестве, в ваших баррикадах.

А: Ах, как жаль! Вы ничего не поняли. Я такой же геометр, как и алгебраист, точнее, я не геометр, и я не алгебраист. Я — школьный учитель! — ШКРАБ, как любили говорить раньше. Но я знаю эту профессию и владею ею (судя по результатам). И хорошо, когда математик, тем более блестящий математик, понимает и горюет, что он не учитель:

«Игорь Фёдорович мне часто говорил, что не знает, что такое педагогика и методика преподавания математики, что ничего в этом не смыслит. Он был неправ» (Ерганжиева Л. Н. Геометр // Геометрические олимпиады им. И. Ф. Шарыгина. — М.: МЦНМО, 2007. — С. 121).

На баррикадах собираются те, кто понимает, что без Геометрии нет высокой школьной математики. Всю жизнь мы ищем панацею в преподавании, не замечая, что сама Жизнь дает ее нам — это ее величество *Элементарная геометрия*. Но за это надо платить — платить любовью к ней.

Окупится!

Глава I

Обучение в бою

Обучение — потому что учим и учимся. Учитель и ученик. Они могут поменяться местами. «Учитель, научи ученика, чтоб было у кого потом учиться».

В бою? Опять война? Точнее, не война, а борьба. Борьба за геометрию. За Геометрию! Учим друг друга. Учимся друг у друга. Удачи!

§ 1. ГАНТЕЛИ ДЛЯ СЕМИКЛАССНИКА

> Математик — это тот, кто умеет находить аналогии между утверждениями; *лучший математик — тот, кто устанавливает аналогии доказательств*; более сильный математик — тот, кто замечает аналогии теорий; но можно представить себе и такого, кто между аналогиями видит аналогии.
>
> *Стефан Банах*

Обращение к семикласснику[1]

> Гантель (*нем*. Hantel) — гимнастический ручной снаряд для развития мышц.

На баррикадах гантелями будут теоремы и задачи... для развития мозга. В этой главе — **педальный треугольник.** Задачи о нем не простые. Они повышенной сложности (иначе мозг развиваться не будет!). Но посильны! (Иначе мозг их не воспримет.) Желательно эти задачи попробовать решить самостоятельно. Но если и не получится, разбери по книге, а главное — воспроизведи: расскажи сам себе, другу, родителям, наконец. Если какой-нибудь из терминов непонятен или раньше не встречался, спроси у учителя, а лучше почитай другие книги этого автора, тогда термины «ортоцентр», «инцентр», «точка W», «теорема трилистника» станут для тебя родными. Итак...

* * *

Пусть точка X находится внутри треугольника и из нее опущены перпендикуляры на стороны треугольника ABC (рис. 1).

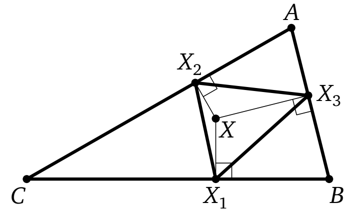

Рис. 1

Назовем **внутренним педальным треугольником** треугольник $X_1X_2X_3$ (где X — произвольная точка внутри треугольника ABC, $XX_1 \perp BC$, $X_1 \in BC$, $XX_2 \perp AC$, $X_2 \in AC$, $XX_3 \perp AB$, $X_3 \in AB$).

Назовем **внешним педальным треугольником** треугольник $Y_1Y_2Y_3$, где Y — произвольная точка внутри треугольника ABC, $YY_1 \perp BC$ и $YQ_1 = Q_1Y_1$, Q_1 — точка пересечения перпен-

[1]Здесь используется и материал 8–9 классов, например, подобие треугольников в 7 классе не изучают.

дикуляра YY_1 с прямой BC. Аналогично $YY_2 \perp AC$ и $YQ_2 = Q_2Y_2$, $YY_3 \perp AB$ и $YQ_3 = Q_3Y_3$ (см. рис. 2).

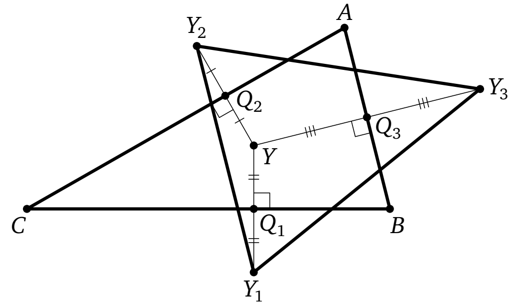

Рис. 2

Задача 1. Докажите, что если точка X совпадает с ортоцентром[1] H_X треугольника $X_1X_2X_3$, то она есть центр O окружности, описанной около треугольника ABC.

Короткая запись условия: $X \equiv H_X \Rightarrow X \equiv O$.

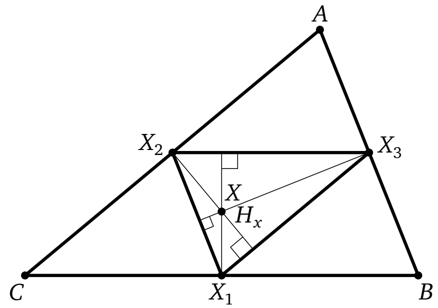

Рис. 3

Доказательство. Так как X — ортоцентр треугольника $X_1X_2X_3$ (рис. 3), стороны этого треугольника параллельны соответствующим сторонам треугольника ABC, а значит, четырехугольники $AX_2X_1X_3$, $BX_1X_2X_3$, $CX_2X_3X_1$ — параллелограммы. Тогда отрезки XX_1, XX_2, XX_3 принадлежат серединным перпендикулярам к сторонам BC, AC и AB соответственно. Итак, X — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 1° (аналогия). Докажите, что если точка Y совпадает с ортоцентром H_Y треугольника $Y_1Y_2Y_3$, то она есть центр O окружности, описанной около треугольника ABC, т. е.

$$Y \equiv H_Y \Rightarrow Y \equiv O.$$

Доказательство. Пусть Q_1, Q_2, Q_3 — точки пересечения прямых YY_1 и BC, YY_2 и AC, YY_3 и AB (см. рис. 4). Отрезки Q_2Q_3, Q_1Q_3, Q_1Q_2 — средние линии треугольников YY_2Y_3, YY_1Y_3 и YY_1Y_2 соответственно. Значит, $Q_2Q_3 \parallel Y_2Y_3$.

[1] Ортоцентр — точка пересечения высот треугольника, обозначается H, H_X и т. п.

Но кроме того, $Y_2Y_3 \parallel BC$, значит, $Q_2Q_3 \parallel BC$. Аналогично $Q_1Q_3 \parallel AC$ и $Q_2Q_1 \parallel AB$. Таким образом, четырехугольники $CQ_2Q_3Q_1$ и $BQ_3Q_2Q_1$ — параллелограммы:

$$Q_2Q_3 = CQ_1 = Q_1B.$$

Следовательно, YQ_1 — серединный перпендикуляр к стороне BC. Проведя аналогичные рассуждения относительно YQ_2, получим, что точка Y совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $Y_1Y_2Y_3$.

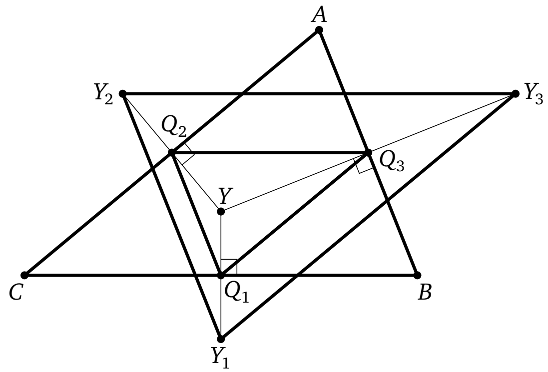

Рис. 4

Задача 2. Докажите, что если точка X треугольника $X_1X_2X_3$ совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $X_1X_2X_3$, то точка X совпадает с инцентром[1] треугольника ABC.

Короткая запись условия: $X \equiv O_X \Rightarrow X \equiv I$.

Доказательство. Действительно, в данном случае $XX_1 = XX_2 = XX_3 = r$ (r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC), что доказывает утверждение задачи.

Задача 2° (аналогия). Докажите, что если точка Y совпадает с центром окружности, описанной около треугольника $Y_1Y_2Y_3$, то точка Y совпадает с инцентром треугольника ABC, т. е.

$$Y \equiv O_Y \Rightarrow Y \equiv I.$$

Доказательство. По условию

$$YY_1 = YY_2 = YY_3,$$

поэтому

$$YQ_1 = YQ_2 = YQ_3,$$

а это значит, что утверждение задачи доказано.

Задача 3. Докажите, что если точка X треугольника $X_1X_2X_3$ — инцентр этого треугольника, то точка X совпадает с ортоцентром треугольника ABC.

Короткая запись условия:

$$X \equiv I_X \Rightarrow X \equiv H.$$

[1]Инцентр — центр окружности, вписанной в треугольник, обозначается I, I_X и т. п.

Эмоциональная справка

Задачи этой главы авторские. Часть из них была опубликована в книге: К у ш н і р І. А. Методи розв'язання задач з геометрії. — К.: Абрис, 1994.

Читателям представляется возможность по задачам 3 и 3° проследить, как менялось доказательство. Особенно интересно в данном случае, как доказательство задачи 3° для внешнего педального треугольника повлияло на доказательство для внутреннего педального треугольника. Итак, вернемся к задаче 3.

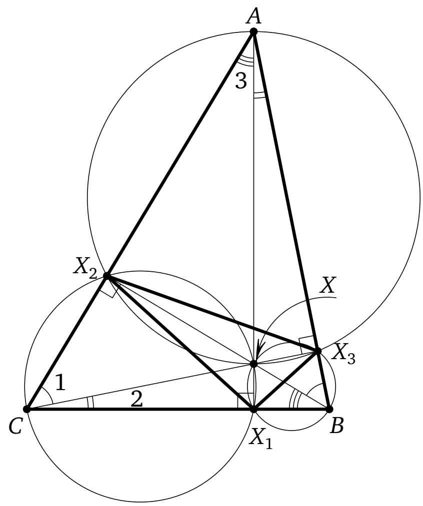

Рис. 5

Первое доказательство. Докажем, что точки A, X, X_1 принадлежат одной прямой, т. е.

$$\angle X_2XX_1 + \angle X_2XA = 180^\circ.$$

Опишем окружности около четырехугольников XX_1BX_3, XX_1CX_2, X_3XX_2A (рис. 5). Докажем равенство углов, обозначенных одинаковыми дугами на рисунке. Например,

$$\angle XBX_3 = \angle XX_1X_3 = \angle XX_1X_2 = \angle XCX_2 \quad \text{и т. д.}$$

В четырехугольнике XX_2CX_1 имеем

$$\angle X_2XX_1 + \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$

В треугольнике XX_2A угол при вершине X_2 равен 90°. Тогда

$$\angle 3 + \angle X_2XA = 90^\circ.$$

Из двух последних равенств получим

$$\angle X_2XX_1 + \angle X_2XA + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 270^\circ.$$

Учитывая, что

$$2(\angle 1+\angle 2+\angle 3)=\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ,$$

из предыдущего равенства получаем

$$\angle X_2XX_1+\angle X_2XA=180^\circ.$$

Второе доказательство.

1) $$\angle ACX=\angle X_2X_1X=\angle X_3X_1X=\angle ABX.$$

Аналогично

2) $$\angle BCX=\angle BAX \quad \text{и} \quad \angle CAX=\angle CBX.$$

Следовательно, $\angle 1+\angle 2+\angle 3=90^\circ$, т. е. X лежит на AX_1, BX_2 и CX_3, значит, X совпадает с H_{ABC}.

Третье доказательство рассмотрим позднее.

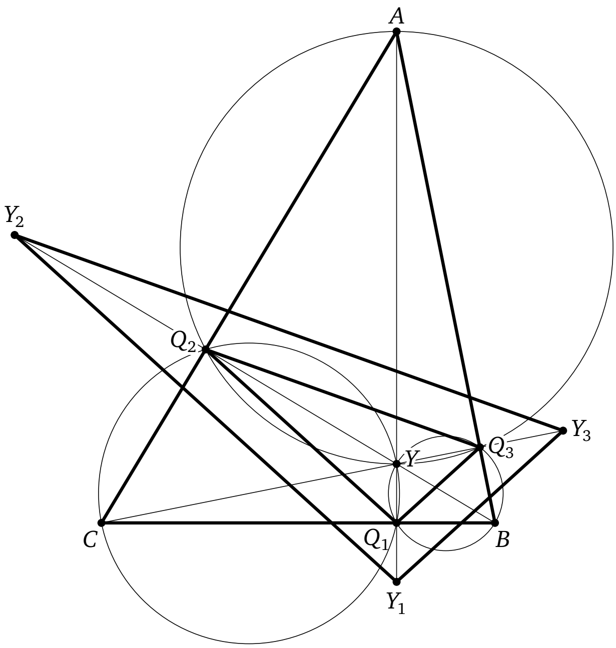

Рис. 6

Задача 3° (аналогия). Докажите, что если точка Y совпадает с инцентром I_Y треугольника $Y_1Y_2Y_3$, то она является ортоцентром треугольника ABC, т. е.

$$Y\equiv I_Y \Rightarrow Y\equiv H_{ABC}.$$

Доказательство. Первые два способа решения задачи 3 полностью могут быть перенесены на внешний педальный треугольник с использованием (для второго способа) треугольника $Q_1Q_2Q_3$ (рис. 6).

Внимание! Целесообразность изобретения внешнего педального треугольника подтверждается способом доказательства, который может быть перенесен на внутренний педальный треугольник: итак, $Y \equiv I_Y$ (рис. 7).

Поскольку

$$CY_2 = CI_Y = CY_1,$$

точка C есть центр окружности, которая описана около треугольника $Y_2I_YY_1$, а это значит, что точка C будет точкой W треугольника[1] $Y_1Y_2Y_3$ (теорема «трилистника»).

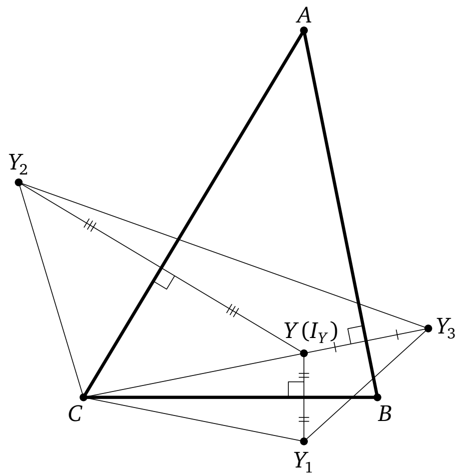

Рис. 7

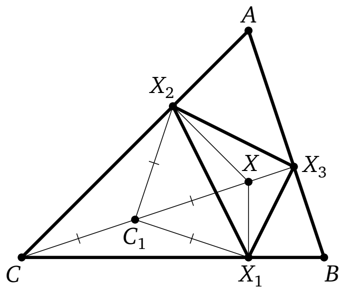

Рис. 8

Следовательно, треугольник ABC будет треугольником $W_1W_2W_3$ треугольника $Y_1Y_2Y_3$, т. е. инцентр треугольника (точка I_Y) будет ортоцентром H треугольника ABC.

Очевидно, что способ доказательства не похож на предыдущие и... он, по аналогии (!), может быть перенесен во внутренний педальный треугольник!

Третье доказательство задачи 3 (!) (аналогия!). Разделим отрезок CX пополам (см. рис. 8). Поскольку

$$X_2C_1 = C_1X = C_1X_1$$

(в прямоугольных треугольниках CX_2X и CX_1X медиана, проведенная к гипотенузе треугольника, равна половине гипотенузы), точка C_1 будет точкой W для треугольника $X_1X_2X_3$. Аналогично можно построить точки B_1 и A_1, а значит,

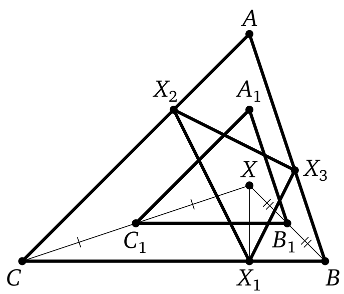

Рис. 9

[1]Точка W, а также W_1, W_2, W_3 — точки пересечения биссектрис треугольника с описанной окружностью.

и треугольник $W_1W_2W_3$ для треугольника $X_1X_2X_3$, в котором инцентр $I_X = X$ будет ортоцентром (I_X — ортоцентр треугольника $C_1B_1A_1$). Но

$$C_1B_1 \parallel BC, \quad B_1A_1 \parallel AB \quad \text{и} \quad C_1A_1 \parallel AC$$

(см. рис. 9). Значит, ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ будет ортоцентром треугольника ABC!

* * *

Другими глазами

1. Ортоцентрический треугольник[1] $H_1H_2H_3$ — внутренний педальный треугольник треугольника ABC ($X_1X_2X_3$).

2. Ортоудвоенный треугольник[2] $N_1N_2N_3$ (см. «Треугольник и тетраэдр в задачах». — К.: Факт, 2004) — это внешний педальный треугольник треугольника ABC ($Y_1Y_2Y_3$).

И, наконец, такая задача.

Задача. Докажите, что если внешний педальный треугольник $Y_1Y_2Y_3$ равен треугольнику ABC, то точки Y и O совпадают[3].

Доказательство. Имеем (см. рис. 4)

$$\angle Y_2YY_3 = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - \angle Y_2Y_1Y_3.$$

Аналогично

$$\angle Y_1YY_3 = 180^\circ - \angle Y_1Y_2Y_3 \quad \text{и}$$
$$\angle Y_2YY_1 = 180^\circ - \angle Y_2Y_3Y_1.$$

Отсюда следует, что Y — ортоцентр треугольника $Y_1Y_2Y_3$, поэтому

$$YY_1 \perp Y_2Y_3, \quad \text{а значит,}$$
$$Y_2Y_3 \parallel BC.$$

Аналогично $Y_1Y_2 \parallel AB$, $Y_1Y_3 \parallel AC$. Поскольку Q_2Q_3 — средняя линия треугольника YY_2Y_3, получаем, что $Q_2Q_3 = \frac{1}{2}Y_2Y_3 = \frac{1}{2}BC$. Но $YY_2 \perp AC$, значит, $Y \equiv O$, что и требовалось доказать.

[1] Ортоцентрический треугольник — треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника.

[2] Ортоудвоенный треугольник — треугольник, полученный из ортотреугольника гомотетией с центром H и коэффициентом 2.

[3] Точка O — центр окружности, описанной около треугольника.

§ 2. ПРЯМАЯ, БЕЗ КОТОРОЙ НАМ НЕ ЖИТЬ

Первое «серьезное» дополнительное построение в седьмом классе, в начале курса геометрии, проходит буднично: через вершину A треугольника ABC проведем прямую, параллельную стороне BC (см. рис. 1). Очередная эмоциональная потеря: как догадался Древний Грек именно так доказывать теорему? В честь Великого Евклида назовем эту прямую **прямой Евклида** и покажем ее применения.

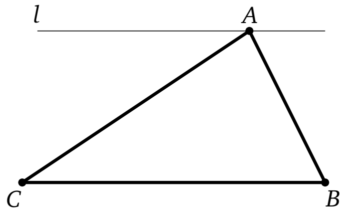

Рис. 1

Задача 1. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Доказательство. Проведем прямую Евклида (см. рис. 2) и продолжим медиану CM_3 до пересечения с этой прямой в точке E. Треугольники AM_3E и BM_3C равны (см. равные элементы на рис. 2), значит, $AE = BC$.

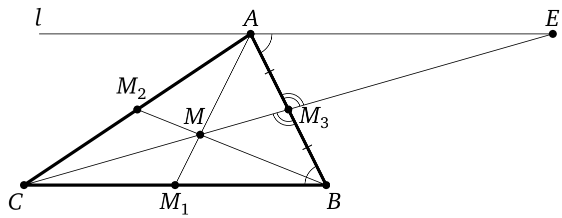

Рис. 2

Треугольники AEM и M_1CM подобны (M_1 — середина CB), следовательно,

$$\frac{AM}{MM_1} = \frac{AE}{CM_1} = \frac{2}{1}.$$

Аналогично доказывается, что

$$BM : MM_2 = 2 : 1 \quad \text{и} \quad CM : MM_3 = 2 : 1$$

(M_2 — середина AC, M_3 — середина AB).

Значит, медианы AM_1, BM_2 и CM_3 пересекаются в точке M и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины.

Задача 2. Докажите, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Доказательство. Через вершину A треугольника ABC проведем прямую Евклида (см. рис. 3). Продолжение биссектрисы CD пересечет эту прямую в точке K. Поскольку

$$\angle ACK = \angle KCB = \angle CKA,$$

то треугольник CAK равнобедренный и $AK = AC$. Из подобия треугольников ADK и BDC следует, что

$$AK : BC = AD : DB,$$

а так как $AK = AC$, мы получаем, что $AC : BC = AD : DB$.

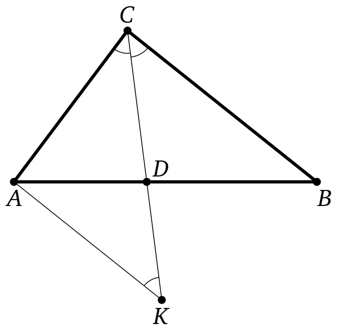

Рис. 3

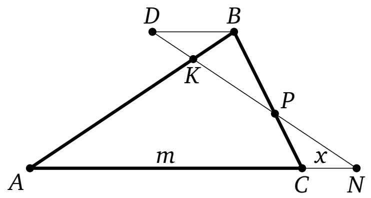

Рис. 4

Задача 3. На медиане AM_1 треугольника ABC взята такая точка E, что $AE : EM_1 = 1 : 3$. В каком отношении прямая BE делит сторону AC?

Задача решается аналогично задаче 1.

Указание: через вершину B проведите прямую Евклида.

Ответ: $1 : 6$, считая от точки A.

Задача 4. Точки K и P лежат на сторонах AB и BC треугольника ABC соответственно, причем

$$BK : KA = 1 : 4, \quad BP : PC = 3 : 2.$$

Прямая PK пересекает продолжение стороны AC в точке N. Найдите отношение $AC : CN$.

Решение. Через точку B проведем прямую Евклида (см. рис. 4). Прямая KN пересечет ее в точке D. Обозначим $AC = m$, $CN = x$. Треугольники DBK и NAK подобны с коэффициентом $k = \frac{1}{4}$. Тогда $DB = \frac{1}{4}AN = \frac{m+x}{4}$.

Треугольники DBP и NCP также подобны, $k = \frac{3}{2}$:

$$DB = \frac{3}{2}CN = \frac{3x}{2}.$$

Имеем

$$\frac{m+x}{4} = \frac{3x}{2}, \quad x = \frac{m}{5}.$$

Значит,

$$AC : CN = m : \frac{m}{5} = 5 : 1.$$