

Э. Берендс

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПЯТИМИНУТКИ



Лаборатория
ЗНАНИЙ

УДК 51(079)

ББК 22.1

Б48

Берендс Э.

Б48 Математические пятиминутки / Э. Берендс ; пер. с нем. — 6-е изд., электрон. — М. : Лаборатория знаний, 2024. — 379 с. — Систем. требования: Adobe Reader XI ; экран 10". — Загл. с титул. экрана. — Текст : электронный.

ISBN 978-5-93208-745-9

Книга представляет собой перевод широко известной зарубежному читателю книги для математического досуга. Ее автор — профессор математики Берлинского университета, блистательный популяризатор науки. В основу книги легли более 100 эссе, которые Э. Берендс публиковал в своей рубрике в газете «ДиВельт». Русское издание представляет собой перевод 3-го немецкого издания, в котором исправлены замеченные опечатки.

Книга написана живым и доступным языком, сложные математические факты излагаются под неожиданным углом зрения, при этом их научная составляющая не нарушается. Приводятся многочисленные исторические факты. Книга богато иллюстрирована. Автор поставил своей целью уверить читателя, что математика не сухой и нудный предмет, а, напротив, она полна очарования и достойна восхищения.

Книга адресована широкому кругу читателей, всем, кто готов занять свой досуг захватывающим и познавательным чтением.

УДК 51(079)

ББК 22.1

Деривативное издание на основе печатного аналога: Математические пятиминутки / Э. Берендс ; пер. с нем. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 376 с. : ил. — ISBN 978-5-9963-1735-6.

16+

В соответствии со ст. 1299 и 1301 ГК РФ при устранении ограничений, установленных техническими средствами защиты авторских прав, правообладатель вправе требовать от нарушителя возмещения убытков или выплаты компенсации

Перевод немецкого издания
Fünf Minuten Mathematik
автора Ehrhard Behrends,
опубликованного издательством
Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden
2006, 2008, 2013

Springer Fachmedien Wiesbaden is
a part of Springer Science+Business
Media

All Rights Reserved

ISBN 978-5-93208-745-9

© Лаборатория знаний, 2015

Глава 1

ГОСПОЖА УДАЧА

Представьте себе, что вы живете в большом городе, таком как Берлин или Гамбург. Вы едете в автобусе и замечаете, что один пассажир вышел, забыв зонтик. Вы берете его и собираетесь, вернувшись домой, набрать случайный телефонный номер: вдруг повезет и трубку возьмет хозяин зонтика?

Это, конечно же, надуманная история, и в реальной жизни такой план осмеяли бы как совершенно наивный. Но не смейтесь раньше времени: миллионы наших сограждан каждую субботу отмечают числа в лотерейном билете с надеждой угадать правильные, хотя вероятность успеха при этом составляет только $1/13\,983\,816$. Шансы при этом еще меньше, чем отыскать хозяина зонтика, действуя согласно описанному плану: ведь случайных последовательностей из семи цифр «всего лишь» десять миллионов.

Многие участники лотереи воображают, будто они могут обмануть удачу, выбирая числа, которые редко выпадали в прошлом. Это бессмысленная стратегия: у случайности нет памяти. Даже если, например, числа 13 не было давно, шансы на его выпадение такие же, как и у других чисел. Некоторые участники разрабатывают собственные хитроумные системы, чтобы победить случай, но все такие попытки — только напрасная трата сил. Уже несколько десятилетий тому назад было доказано, что ни одна система не может обмануть госпожу удачу.

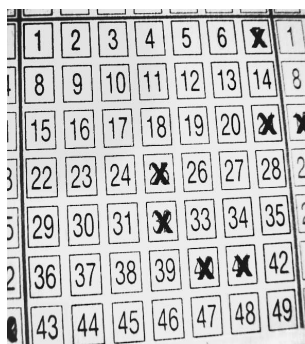
Напоследок хочется сказать хоть что-то позитивное. Кое-что участник лотереи все же может предпринять,



а именно, он может выбрать такую комбинацию чисел, которую вряд ли выберут большинство игроков. Тогда, если уж он каким-то чудом победит, ему скорее всего не придется делить выигрыш со многими. Однако сказать легче, чем сделать. В последнее время поразительно много участников выбирают числа, расположенные на карточке «крестиком».

В математике нет ни одной формулы, позволяющей выразить сладкое чувство предвкушения грядущих планов на то, как поступать с баснословным выигрышем. Удачи!

ПОЧЕМУ ИМЕННО 13983816?



Как же математики вычислили точное число 13 983 816 всех возможных комбинаций в лотерее? Выберем два числа, обозначим их n и k и предположим, что n больше k . Сколько различных k -элементных подмножеств содержится в множестве из n объектов?

Хотя на первый взгляд эта задача кажется математически абстрактной, она имеет непосредственное отношение к вопросу о лотерее, потому что, заполняя лотерейный билет, вы выбираете 6 чисел из 1, 2, 3, ..., 49, так что в этом случае $n=49$, $k=6$.

В жизни мы сталкиваемся и с другими примерами.

- При $n = 32$ и $k = 10$ речь идет о числе возможных раскладов в преферансе.
- В совещании приняли участие 14 человек, и, прощаясь, все пожали друг другу руки. Сколько всего было при этом рукопожатий? Здесь $n = 14$ и $k = 2$.

А теперь вернемся к общей задаче. Ее ответ выражается формулой, числитель которой равен $n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1)$, а знаменатель равен $1 \cdot 2 \cdots k$. Неискушенному читателю числитель может показаться несколько устрашающим, но это просто произведение k целых чисел, из которых первое n , а каждое следующее на 1 меньше предыдущего. (Тот, кто хочет узнать, как появилась эта формула, может обратиться к гл. 29.)

В наших примерах получаются такие результаты:

- В задаче о лотерее нужно разделить $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44$ на $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$. Так и появилось число 13 983 816.
- В задаче о числе раскладов в преферансе получается частное чисел $32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23$ и $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$, т. е. всего в преферансе возможно 64 512 240 раскладов. (Если учитывать расклады для всех игроков и их очередность, то это число существенно возрастет.)
- Задачу о рукопожатиях можно решить в уме: $14 \cdot 13$, деленное на 1·2, даст 91.

КОЛОДА КАРТ ВЫШИНОЙ ПОЧТИ В ЧЕТЫРЕ С ПОЛОВИНОЙ КИЛОМЕТРА

Осознать ничтожность шансов на лотерейный выигрыш помогает не только идея набирать наугад телефонный номер незнакомца. Есть и другие наглядные аналоги.¹⁾

Вспомним, что толщина колоды карт составляет около одного сантиметра. Чтобы собрать вместе 13 983 816 карт, потребуется приблизительно 437 000 колод. Если их сложить в одну стопку, ее высота окажется примерно 4,37 км. Теперь предположим, что ровно одна из этих карт отмечена. Шансы выбрать эту карту наугад из четырехкилометровой колоды такие же, как шансы выиграть в лотерею.

ЛОТЕРЕИ В ИТАЛИИ

В лотерею играют почти в каждой стране, но правила очень различаются. В качестве примера сошлемся на лотерею в Италии. Там действуют две разновидности. В «обычном» варианте следует отметить крестиком 2, 3, 4 и 5 позиций в поле из 90 номеров. Разыгрываются 5 номеров, а прибыль зависит от того, сколько позиций вы отметили правильно. Если вы выбрали вариант с 5 крестиками, анализ похож на анализ в немецкой лотерее, только на этот раз надо выбрать «5» из «90», т. е. это $90 \cdot 89 \cdot \dots \cdot 86 / 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 5 = 43\,949\,268$ возможностей, а вероятность угадать эту пятерку состав-

¹⁾Еще одну иллюстрацию этой малой вероятности можно найти в гл. 83.

ляет $1/43\,949\,268$, что значительно ниже аналогичной вероятности в нашей лотерее.

А еще есть «Суперлотерея», которая является разновидностью «6» из «90». В ней 622 614 630 миллионов возможностей выбора шести позиций, соответственно вероятность сверхприбыли — совсем крошечная.

Примечательно также, что существуют разные лотереи — как и в Германии, — которые должны быть отнесены к категории наименьшей вероятности выигрыша в случае выпадения джекпота. Поэтому можно набрать много вариантов, но только один из 6 правильных ответов приведет к весьма ощутимой выплате (около 100 млн евро). Иначе все автобусные караваны из соседних стран хлынули бы к итальянским лотерейным киоскам.

ФИЛЬМ НА ТЕМУ «ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ»

2008 год был объявлен в Германии Годом математики. По этому поводу в Берлине прошла большая выставка «Mathema» в музее технологий. Там был также представлен экспонат в виде параболы из зерен риса и сделан фильм, который демонстрировал бесконечный рост: сколько же зерен риса понадобится? Вы найдете этот фильм в YouTube:

<http://www.youtube.com/watch?v=KA-gN1h15Ko>

или непосредственно с помощью следующего QR-кода:



ВОЛШЕБНАЯ МАТЕМАТИКА: ТЫСЯЧА И ОДНО ВОЛШЕБСТВО

Я предлагаю поиграть в «угадайку». Задумайте трехзначное число и запишите его два раза подряд. Например, если вы задумали 761, запишите 761 761. Игра начинается с того, что вы делите полученное шестизначное число на 7. Остаток от этого деления и становится вашим счастливым числом. Оно может быть равным только 0, 1, 2, 3, 4, 5, или 6, поскольку других остатков при делении на 7 не бывает. Теперь запишите ваше исходное число и остаток на открытке и отправьте в редакцию газеты *Die Welt*. Редактору нужно ваше счастливое число, чтобы именно столько банкнот в 100 евро выслать вам почтовым переводом.

Если вам не повезло и ваше счастливое число равно нулю, вы оказались в хорошей компании, потому что эта участь ожидает всех читателей газеты *Die Welt*. (Иначе издатель никогда не согласился бы опубликовать эту статью.)

Причина этого явления кроется в хорошо замаскированном свойстве целых чисел. А именно, записать трехзначное число подряд дважды — все равно что умножить его на 1001. Поскольку 1001 делится на 7, шестизначное число тоже будет делиться на 7.

Эта идея годится для маленького фокуса в небольшой компании, а обещание банкнот в 100 евро можно заменить на предсказание остатка.

Между прочим, математические факты находят себе место в шляпе фокусника не так уж редко. Нужно только найти противоречащий повседневному опыту математический результат, обоснование которого глубоко запрятано в некоторой теории.

Прислушайтесь к совету: волшебство — как духи, упаковка почти столь же важна, как и содержание. Хотя умножение на 1001 эквивалентно записыванию числа

$$\begin{array}{r}
 761761 \quad | \quad 7 \\
 \underline{7} \\
 06 \\
 \underline{6} \\
 61 \\
 \underline{56} \\
 57 \\
 \underline{56} \\
 16 \\
 \underline{14} \\
 21 \\
 \underline{21} \\
 0
 \end{array}$$

дважды, никому не должно прийти в голову, что такое умножение имеет место, иначе фокус станет тривиальным. Любители разнообразия могут вместо 7 взять 11 или 13, так как число 1001 раскладывается на произведение именно этих трех множителей. Только остаток вычислить будет несколько сложнее...

ИНЫЕ ВАРИАНТЫ: 1001, 10 0001, ...

Почему нужно задумывать именно *трехзначное* число? Может быть, подойдет *двухзначное* или *четырёхзначное*?

Возьмем *двухзначное* число n , записав его в виде xu . Если мы запишем это число два раза подряд, то получим *четырёхзначное* число $xuxu$, что эквивалентно умножению исходного числа на 101. Но число 101 — простое, так что делителями числа $xuxu$ являются xu и 101. Поскольку в этом фокусе про число xu не известно ничего, нулевой остаток можно гарантировать только при делении на 101. К сожалению, просьба заняться делением на 101 убивает волшебство или по крайней мере заставляет заподозрить, что здесь что-то не так. Кроме того, деление на 101 может оказаться слишком сложным для ваших друзей и знакомых. Так что начинать с *двухзначного* числа — не самая удачная идея.

Четырёхзначные числа приводят нас к умножению на 10 001. Это число не является простым: ведь $10\,001 = 73 \cdot 137$, и оба этих сомножителя просты. Поэтому, если вы запишете *четырёхзначное* число два раза подряд, получив *восьмизначное*, можете быть уверены, что результат делится на 73 и 137. Но кому хочется делить на 73?

У числа 100 001 тоже только два простых делителя — 101 и 9091, делить на них неудобно, поэтому *пятизначные* числа тоже не вполне подходят для нашего фокуса. И так далее. Наконец, мы находим маленький делитель у числа 1 000 000 001 (оно делится на 7). Но стоит ли начинать волшебные фокусы фразой «Задумайте *девятизначное* число и запишите его два раза подряд, чтобы получить *восемнадцатизначное*»? Так что советую придерживаться первоначального варианта.

Вот таблица разложения на простые множители нескольких первых чисел вида $10 \dots 01$:

Число	Разложение на простые множители
101	101
1001	$7 \cdot 11 \cdot 13$
10001	$73 \cdot 137$
100001	$11 \cdot 9091$
1000001	$101 \cdot 9901$
10000001	$11 \cdot 909091$
100000001	$17 \cdot 5882353$
1000000001	$7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579$
10000000001	$101 \cdot 3541 \cdot 27961$
100000000001	$11 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 8779 \cdot 4093$
1000000000001	$73 \cdot 137 \cdot 99990001$

Тем, кто хочет больше узнать об отношениях между математикой и волшебством, советую обратиться к книге Мартина Гарднера «Математические чудеса и тайны»¹⁾. В этой книге математические фокусы описаны в гл. 24 и 86.

¹⁾Минск: Современное слово, 2011.

СКОЛЬКО ЛЕТ КАПИТАНУ?

Математика, что совершенно справедливо, считается точной наукой. Ее строгие логические конструкции служили моделью для других наук, как естественных, так и гуманитарных. Знаменитый пример — главный труд Исаака Ньютона «Математические начала натуральной философии», который начинается с основных определений и аксиом о мире (что такое сила? что такое масса? каковы основные законы механики?), и из них выводится — строго дедуктивным образом — модель мира, которая произвела революцию в науке.

После Ньютона возникло представление о познании, которое сегодня кажется нам несколько наивным: все явления должны быть сведены к возможно более простой механической модели. Многие из нас до сих пор испытывают особое доверие к утверждениям, выраженным в математических терминах, а еще лучше — записанным в виде математических формул. Однако нередко бывает нужна здоровая доза скептицизма, поскольку полезных результатов можно ожидать только тогда, когда в их основе лежат четкие понятия. Так, все мы согласны с определением «скорости», тогда как «комфортная температура» — все же субъективное понятие. И поэтому формула для коэффициента комфорта, например, это просто уловка; одни находят ее забавной, а другие — возмутительной.

Итак, нужно всегда помнить о существовании естественных ограничений применения математики. Вне зависимости от того, сколько интеллекта задействовано, из недостаточной информации нельзя получить разумных результатов. Иногда «результат» совершенно невозможно вывести из условий задачи, она воспринимается как шутка: «Длина корабля 45 метров, а ширина 3. Сколько лет капитану?»

В такой ситуации все понимают, что подобные вопросы бессмысленны. Однако часто спрашивают что-то вроде

«Какова вероятность того, что Германия станет чемпионом мира?» А как можно вычислить шансы выиграть в лотерею производителя пива, если никто не знает, сколько всего призов и участников лотереи?

КОЭФФИЦИЕНТ КОМФОРТА И ЕГО РОДСТВЕННИКИ

Одна из формул, по которой вычисляют комфортность погоды, выглядит так:

$$T_k = (0.478 + 0.237\sqrt{v} - 0.12v)(T - 33),$$

где T — реальная температура в градусах по Фаренгейту, а v — скорость ветра.

Эта формула — прекрасный пример ложно понимаемой точности. Все согласятся, что когда дует пронизывающий ветер, нам холоднее. Но трудно найти двух человек, для которых «воспринимаемая температура» при -5 градусах по Фаренгейту и скорости ветра 7 км/ч совпадает с точностью до четырех знаков. Температура, которую мы ощущаем, зависит от чувствительности вашего организма, одежды, и множества других факторов.

Однако формулы для коэффициента комфорта, слепленные из различных параметров, дают температуру точно, до четырех значащих цифр. Конечно же, следует ожидать монотонности: чем сильнее ветер, тем ниже кажется температура. Но как бы то ни было, вместо формулы лучше было бы привести грубую таблицу значений, поскольку формула приводит к абсолютно неверному впечатлению, что здесь мы имеем дело с точной наукой.

Тем временем на сцене появляются толпы подражателей. Например, существуют формулы для высоты каблука (см. рис. 3.1) и уровня «напряженности» приключенческого романа. Такие «научные попытки» часто попадают в газеты в разделе «Смесь». Читая газету за утренней чашкой кофе, мы поражаемся, какой жуткий вздор пытаются порой обосновать математическими формулами.

$$h = Q(12 + 3s/8)$$

Рис. 3.1. Попытка математического юмора: оптимальная высота дамского каблучка как функция от количества выпитых напитков

ГОЛОВОКРУЖИТЕЛЬНО БОЛЬШИЕ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Конечно же, нет чисел проще натуральных, т. е. тех, которые мы используем при счете: 1, 2, 3, ... Некоторые из этих чисел обладают особым свойством: их нельзя записать в виде произведения меньших чисел. Это относится, например, к 2, 3, 5, к 101 и даже 1234271. Такие числа называются *простыми*; они привлекали к себе внимание с самого возникновения математики.

Как велики бывают простые числа? Более двух тысяч лет назад Евклид доказал, что простых чисел бесконечно много, а значит, они бывают сколь угодно большими.¹⁾ В основе знаменитого доказательства лежит следующая идея. Евклид описывает что-то вроде машины, в которую закладывают некоторые простые числа, а она в ответ выдает простое число, отличное от всех заложенных. Это подтверждает, что простых чисел бесконечно много.

Следствия из этого факта замечательны и даже головокружительны. Например, результат Евклида гарантирует, что существует настолько большое простое число, что для его записи потребовалось бы больше чернил, чем было произведено за всю историю человечества; конечно же, нам никогда не увидеть этого монстра воочию. В самом большом известном на данный момент (2006 г.) числе почти десять миллионов цифр²⁾. (Чтобы представить себе, насколько велико это число-рекордсмен, вообразите, что вы решили напечатать его в книге — для этого потребовалось бы более 800 страниц.) Большие простые числа используются

¹⁾В гл. 54 рассказывается, как в наше время находят «очень большие» простые числа.

²⁾Наибольшим известным простым числом по состоянию на февраль 2011 г. является $2^{43112609} - 1$. Оно содержит 12978189 десятичных цифр и является простым числом Мерсенна. Его нашли 23 августа 2008 года на математическом факультете университета UCLA в рамках проекта по распределенному поиску простых чисел Мерсенна GIMPS.

в криптографии, а маленькими считаются числа всего только с несколькими сотнями цифр.

Одна из важнейших задач раздела математики — *теории чисел* — раскрывать секреты простых чисел, и поэтому великий математик Карл Фридрих Гаусс называл теорию чисел «королевой математики».

МАШИНА ЕВКЛИДА

Теперь опишем, как функционирует машина простых чисел Евклида. Пусть даны n простых чисел, которые обозначим p_1, p_2, \dots, p_n . Если это вам кажется слишком абстрактным, то просто возьмите для примера четыре простых числа 7, 11, 13, 29, в этом случае $n = 4$, $p_1 = 7$, $p_2 = 11$, $p_3 = 13$ и $p_4 = 29$.

Теперь прибавим 1 к произведению этих простых чисел. Результат обозначим m . Таким образом,

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1.$$

В рассмотренном примере $m = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 29 + 1 = 29\,030$.

У каждого числа, а значит, и у m , есть по крайней мере один простой делитель, обозначим его p . Заметим, что он не может быть равен ни одному из чисел p_1, p_2, \dots, p_n . Действительно, если m разделить на одно из этих чисел, получится остаток 1. (В нашем примере мы можем выбрать $p = 5$ — простой делитель числа 29 030. При этом число 5 не равно 7, 11, 13 или 29.)

Итак, мы видим, что для произвольного набора простых чисел p_1, p_2, \dots, p_n получается новое простое число, которого не было среди введенных. Значит, множество простых чисел не может быть конечным, поскольку любой конечный набор простых чисел, введенный в машину, приводит к простому числу, отличному от введенных.

На рис. 4.1 приведены несколько дополнительных примеров, в которых на выходе даются *все* простые делители числа $p_1 \cdot p_2 \cdots p_n + 1$. Обратите внимание на второй и третий примеры: вводимые простые числа не обязаны быть разными.

Генерирует ли машина Евклида *все* простые числа? Имеется в виду следующее: мы считаем известным, что

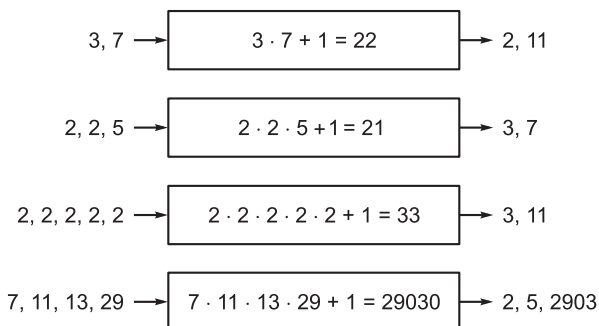


Рис. 4.1. Евклидова машина для генерирования простых чисел в действии

2 — простое число. Вводим его в машину, которая на выходе дает число 3 («произведение» одного числа — это само число, поэтому вывод равен $2 + 1$). Теперь мы можем ввести в машину числа 2 и 3, получив при этом 7, так что теперь мы можем работать с числами 2, 3 и 7. Эти три числа — возможные вводы, и мы не обязаны вводить их все одновременно, к тому же одно или несколько из них могут быть использованы больше одного раза. Возникает такой вопрос: каждое ли простое число возникнет на выходе из этой машины Евклида?

Ответ положительный, поскольку для каждого простого числа p число $p - 1$ — это произведение нескольких (не обязательно различных) простых чисел p_1, p_2, \dots, p_r . Поэтому при вводе p_1, p_2, \dots, p_r на выходе получится простое число p , ведь $p_1 \cdot p_2 \cdots p_r + 1 = p$. Это рассуждение может быть использовано для доказательства методом математической индукции утверждения о том, что все простые числа, не превышающие некоторого числа n , могут быть получены на машине Евклида, каким большим бы ни было число n .

ПРОИГРЫШ + ПРОИГРЫШ = ВЫИГРЫШ

Математика, и в особенности теория вероятностей, полна удивительных явлений. Когда какой-то результат резко контрастирует с общими ожиданиями, он называется *парадоксом*. Не так давно испанский физик Хуан Паррондо пополнил зверинец таких парадоксов новым примером.

Рассмотрим две случайные игры, в которых игрок проигрывает игорному дому в среднем небольшую сумму. Игрок должен заплатить небольшой первоначальный взнос, чтобы принять участие в игре, а затем с вероятностью $\frac{1}{2}$ выигрывает или проигрывает один евро в каждом раунде игры. В другой игре шансы на победу зависят от предыдущего хода игры. Есть более или менее благоприятные раунды, но в среднем шансы все равно составляют 50 на 50.



Фокус вот в чем: если перед каждым раундом подбрасывать монетку, чтобы определить, играть первую или вторую игру, то у игрока есть выигрышная стратегия. Если игроку позволить играть достаточно долго, то может стать сколь угодно богатым. После открытия парадокса Паррондо стали появляться сообщения, что теперь существует математическая теория для всех возможных ситуаций, в которых любое кажущееся проигрышным предложение заканчивается выигрышем. У каждого был такой опыт. Например, в шахматах вы можете пожертвовать почти любую фигуру и все равно победить.

Конечно же, такой теории не существует. Однако интересно, что все математические результаты, которые просачиваются сквозь стены академической башни из

слоновой кости в ежедневные газеты, почти всегда вселяют в читателей необоснованные надежды на грандиозный успех. Как многие помнят, так случилось с фракталами и с теорией хаоса. А вот у парадокса Паррондо обнаружилось несколько интересных приложений. Например, он объясняет, как микроорганизм может чередовать две химические реакции, чтобы плыть против течения.

ТОЧНЫЕ ПРАВИЛА ВТОРОЙ ИГРЫ

Правила первой игры Паррондо уже были описаны. Правила второй игры несколько сложнее.

Если сумма выигрыша к данному моменту делится на 3, то шансы неблагоприятны: с вероятностью $9/10$ игрок теряет один евро, а с вероятностью $1/10$ — выигрывает¹⁾.

Все не так плохо, когда сумма выигрыша не делится на 3. Тогда игрок выигрывает с вероятностью $3/4$ и проигрывает с вероятностью $1/4$.

Таким образом, для игрока ситуация благоприятна или неблагоприятна в зависимости от того, делится сумма выигрыша на 3 или нет. Можно показать, что эта игра абсолютно честная. Однако из-за того, что требуется первоначальный взнос, в длинной серии это проигрышная игра.

ПАРАДОКС!

В разных разделах математики имеются свои парадоксы. Как правило, их следует ожидать при описании явлений, недоступных нашему повседневному опыту: очень большие или очень малые числа, бесконечные множества и т. д.²⁾

Несколько удивляет, что парадоксы так часто появляются в теории вероятностей: ведь в ходе эволюции мы развили способность чувствовать многие аспекты случайности. Например, мы надежно умеем оценить

¹⁾Например, из десятикарточной колоды можно наудачу вынимать одну. На девяти картах написано «Вы только что проиграли один евро!», а на одной — «Вы выиграли один евро!»

²⁾О некоторых парадоксах бесконечности говорится в гл. 15 и 70.

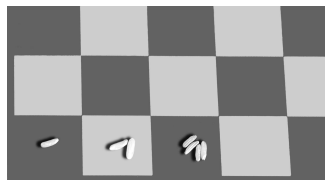
настроение собеседника, основываясь лишь на выражении лица, и неплохо умеем оценивать риски.

Хорошо известен парадокс дней рождения, описанный в гл. 11. Еще один хорошо известный пример — *парадокс перестановок*. Человек пишет десять писем и надписывает десять конвертов. Затем он раскладывает письма по конвертам в случайном порядке. Попадет ли хотя бы одно письмо в соответствующий конверт? Наивные представления говорят о том, что вероятность этого крайне мала. На самом деле, согласно теории вероятностей она составляет около 64%. Попробуйте сами! (Под маской выбора партнера в игре этот парадокс появляется в гл. 29.)

ИНТУИЦИЯ ПОДВОДИТ НАС, КОГДА РЕЧЬ ИДЕТ О БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ

История человечества плохо подготовила нас к недавним открытиям в физике и математике. С точки зрения продолжения рода и выживаемости интересны только такие вещи, как средняя скорость, расстояния — не очень большие и не очень маленькие, — вообще, сравнительно небольшие числа. Поэтому сложно усвоить современные взгляды на природу вселенной, где при больших скоростях возникают удивительные явления. Можно сказать, что в нас встроен барьер, который мешает воспринимать некоторые математические истины.

Поговорим, например, о больших числах. В физике все же существует возможность представлять расстояния, далеко выходящие за рамки повседневного опыта и интуиции, с помощью подходящего масштаба. Например, можно представить миниатюрную модель Солнечной системы, в которой Солнце сжалось до размеров апельсина. В математике таких возможностей меньше, и наши способности вообразить, что происходит, быстро тают.



Особенно сложно осознать экспоненциальный рост. Многие слышали притчу о рисовом зернышке. Изобретатель шахмат обратился к своему правителю с просьбой, на первый взгляд необременительной. Он хотел, казалось, немного рису, но суммированному так, чтобы на первой клетке шахматной доски лежало одно зернышко риса, на второй — вдвое больше, на третьей — *еще* вдвое больше, и т. д. Оказалось, что через 64 шага число зерен превзойдет количество произведенного риса во всем мире за год.

Конечно же, раскладывание риса на шахматной доске не относится к повседневным занятиям. Другая аналогия, более близкая к реальной жизни, — это «письма счастья».

Допустим, вы получили письмо — одно из цепи распространяющихся, — в котором сказано, что вы должны разослать его копии десяти знакомым, указав свои имя и адрес. Предполагается, что они поступят так же. Каждому, чье имя окажется ниже уровня пяти поколений, полагается цветная открытка (или 100 евро, или еще что-нибудь). На первый взгляд — это великолепная идея, и наивные люди верят, что она должна принести выгоду (выраженную в открытках или евро). Чтобы сохранить жизнеспособность системы, посылая одну открытку, в результате вы должны получить огромную корзину почты (на самом деле корзины не хватит — если все игроки сделают то, что от них требуется, вам достанется более 100 000 открыток). Однако эта игра всегда прекращается еще на ранних этапах, поскольку слишком много людей получают слишком много писем от слишком большого числа друзей с требованием выслать десять писем.

Математики испытывают особое благоговение перед экспоненциальным ростом. Задачи, степень сложности которых растет экспоненциально относительно размеров входных данных, считаются особенно сложными. Так, например, пытаются показать, что задача взлома процедуры шифрования экспоненциально сложна.

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЙ РОСТ I: РИСОВЫЙ ПОТОП

Сколько же всего рисовых зерен в притче о рисовом зернышке? Чтобы ответить на этот вопрос, нужно найти сумму $1+2+4+\dots+2^{63}$. Такие вычисления удобно проводить по формуле *геометрической прогрессии*:

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{при } q \neq 1 \text{ и } n = 1, 2, \dots$$

В нашем случае

$$\frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 18 \cdot 10^{18}.$$

Так много риса!

Когда речь идет о таких больших числах, наша интуиция подводит нас. И правда, даже четырнадцать миллионов различных комбинаций в лотерее кружат нам

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	5
Предисловие ко второму изданию	6
Предисловие	7
«Пять минут математики» в газете Die Welt	8
Введение	10
Глава 1. Госпожа удача	13
<i>Насколько вероятно выиграть главный приз в лотерее?</i>	
Глава 2. Волшебная математика: тысяча и одно волшебство	17
<i>Фокус с числом 1001</i>	
Глава 3. Сколько лет капитану?	20
<i>Математическая точность. Коэффициент комфорта</i>	
Глава 4. Головокружительно большие простые числа	22
<i>Простых чисел бесконечно много. Доказательство Евклида</i>	
Глава 5. Проигрыш + проигрыш = выигрыш	25
<i>Парадоксы теории вероятностей: Паррондо, дней рождения и перестановок</i>	
Глава 6. Интуиция подводит нас, когда речь идет о больших числах	28
<i>Письма счастья. Рисовый сель</i>	
Глава 7. Ключ к шифру — в телефонной книге	33
<i>Криптография с открытым ключом. Шифрование с помощью случайных чисел</i>	
Глава 8. Деревенский цирюльник, который сам себя бреет	37
<i>Парадокс Рассела</i>	
Глава 9. Уйди, пока ты впереди	40
<i>Правило остановки. Теорема о правиле остановки</i>	
Глава 10. Может ли обезьяна создать великое литературное произведение?	43
<i>Шимпанзе за клавиатурой</i>	
Глава 11. Парадокс дней рождения	46
<i>Насколько вероятно совпадение дней рождения?</i>	
Глава 12. Horror vacui	51
<i>Пустое множество. Объединение и пересечение</i>	

Глава 13. Достаточная сложность математической логики необходима	54
<i>Необходимость и достаточность</i>	
Глава 14. Менять или не менять? Парадокс Монти Холла	57
<i>Задача про козлика. Условные вероятности. Формула Байеса</i>	
Глава 15. В отеле Гильберта всегда есть свободные номера	67
<i>Отель Гильберта</i>	
Глава 16. Это удивительное число π	70
<i>Число π в библии. Простые оценки</i>	
Глава 17. Вычисляемая случайность	73
<i>Предельная теорема теории вероятностей</i>	
Глава 18. Миллионная награда: как распределены простые числа?	77
<i>Распределение простых чисел. Теорема о простых числах. Гипотеза Римана</i>	
Глава 19. Пятимерный торт	80
<i>Размерность. Четырехмерный куб (гиперкуб)</i>	
Глава 20. Казнить нельзя помиловать	84
<i>Ассоциативный и коммутативный законы в математике и речи</i>	
Глава 21. Возьми меня на Луну	90
<i>Конкретные приложения математики</i>	
Глава 22. Остатки сладки	93
<i>$a \bmod b$. Вычисления по модулю. Теорема Ферма</i>	
Глава 23. Совершенно секретно!	96
<i>Алгоритм RSA. Теорема Эйлера</i>	
Глава 24. Волшебная математика: порядок среди хаоса ...	101
<i>Фокус Джилбрейта</i>	
Глава 25. Как вступить в контакт с гением	104
<i>Гаусс. 17-угольник. Простые числа Ферма</i>	
Глава 26. О полутонах и корнях двенадцатой степени	109
<i>Пифагорова и хроматическая гаммы</i>	
Глава 27. Вечно я не в той очереди!	112
<i>Теория очередей</i>	
Глава 28. Незаслуженно недооцененное число	115
<i>Ноль</i>	
Глава 29. Я люблю считать!	118
<i>Некоторые комбинаторные результаты. Биномиальные коэффициенты</i>	
Глава 30. Гений-самоучка. Индийский математик Рамануджан	123
<i>Удивительная судьба индийского математика</i>	

Глава 31. Я терпеть не могу математику, ведь...	126
<i>Почему эту науку так не любят?</i>	
Глава 32. Путешествующий коммивояжер. Современная Одиссея	129
<i>Задача о коммивояжере. $P=NP$?</i>	
Глава 33. Квадратура круга	132
<i>Построения циркулем и линейкой</i>	
Глава 34. Шаг в бесконечность	139
<i>Принцип индукции</i>	
Глава 35. Математика в твоём CD-плеере	144
<i>Кодирование. Теорема отсчетов</i>	
Глава 36. Логарифм. Вымирающее племя	147
<i>Умножение как сложение логарифмов</i>	
Глава 37. Математика, достойная награды	150
<i>Абелевская премия. Медаль Филдса</i>	
Глава 38. Почему именно аксиомы?	153
<i>Аксиоматика</i>	
Глава 39. Компьютерное доказательство	156
<i>Задача о четырех красках</i>	
Глава 40. Лотерея. Маленькие выигрыши	159
<i>Вероятность угадать 1, 2, ..., 6 правильных номеров</i>	
Глава 41. Формулы = концентрат мысли	162
<i>Преимущество буквенных обозначений. Декарт</i>	
Глава 42. Бесконечный рост	165
<i>Число e. Экспонента</i>	
Глава 43. Как кванты вычисляют?	169
<i>Квантовый компьютер. Кубиты</i>	
Глава 44. Крайности!	174
<i>Типичная задача об экстремальных значениях. Имитация отжига</i>	
Глава 45. Бесконечно малые?	177
<i>Бесконечно малые величины. Нестандартный анализ</i>	
Глава 46. Математика в пожарной части	180
<i>Ошибки первого и второго рода</i>	
Глава 47. Первому доказательству уже 2500 лет	183
<i>Элементы Евклида. Теорема Фалеса</i>	
Глава 48. В математике есть трансцендентное, хотя нет ничего мистического	186
<i>Иерархия чисел: натуральные, целые, рациональные... числа</i>	
Глава 49. Каждое четное число равно сумме двух простых?	191
<i>Гипотеза Гольдбаха</i>	

Глава 50. Почему мы неправильно обращаем условные вероятности	195
<i>Формула Байеса</i>	
Глава 51. Миллионер или миллиардер?	199
<i>Обозначения на разных языках</i>	
Глава 52. Математика и шахматы	202
<i>Правила игры и аксиомы</i>	
Глава 53. «Книга природы написана языком математики»	205
<i>Математика и реальность. Как применяется математика?</i>	
Глава 54. Поиск простых чисел Мерсенна	208
<i>Простые числа-рекордсмены</i>	
Глава 55. Берлин, XVIII век: открыта самая красивая формула	212
<i>Разложение в ряд экспоненты, синуса и косинуса</i>	
Глава 56. Первое действительно сложное число	215
<i>Иррациональность корня из двух</i>	
Глава 57. $P=NP$: Нужно ли везение в математике?	218
<i>P- и NP-задачи</i>	
Глава 58. Вам всего лишь 32 года!	221
<i>Разные системы счисления</i>	
Глава 59. Игла Бюффона	224
<i>Эксперимент Бюффона по вычислению π</i>	
Глава 60. Жара и холод: контролируемое охлаждение как способ решения задач оптимизации	228
<i>Имитация отжига. Задача о коммивояжере</i>	
Глава 61. Кто не заплатил?	232
<i>Неконструктивное доказательство существования. Принцип кроликов и клеток</i>	
Глава 62. О чем говорит статистика?	235
<i>Статистический контроль качества</i>	
Глава 63. Арбитраж	238
<i>Опционы. Принцип арбитража для определения цены</i>	
Глава 64. Прощай, риск. Опционы	241
<i>Опционы пут и колл</i>	
Глава 65. Отражает ли математика реальный мир?	244
<i>Правдоподобны ли следствия из аксиом? Парадокс Банаха–Тарского</i>	
Глава 66. Математика, которую слышно	247
<i>Анализ Фурье. Синус как собственная частота черного ящика</i>	
Глава 67. Случай-композитор	252
<i>Игральные кости: метод Моцарта</i>	

Глава 68. Бывает ли игральным костям совестно?	255
<i>Совпадение</i>	
Глава 69. Клубничное мороженое убивает!	257
<i>Как лжет статистика</i>	
Глава 70. Процветание для всех	260
<i>Письма счастья в бесконечном мире</i>	
Глава 71. Никакого риска, спасибо!	263
<i>Хеджирование в финансовой математике</i>	
Глава 72. Нобелевская премия в математике?	266
<i>Абелевская премия</i>	
Глава 73. Случай-вычислитель: метод Монте-Карло	270
<i>Как вычисляют площади с помощью датчика случайных чисел</i>	
Глава 74. Нечеткая логика	274
<i>Нечеткое управление</i>	
Глава 75. Секретные послания в Библии	277
<i>Мистика чисел. Библейские коды. Закон малых чисел</i>	
Глава 76. Насколько узловатым может быть узелок?	281
<i>Теория узлов. Инварианты узлов</i>	
Глава 77. Сколько математики нужно человеку?	285
<i>Почему математика?</i>	
Глава 78. Много, больше, еще больше!	288
<i>Иерархия бесконечностей. Диагональный метод Кантора</i>	
Глава 79. Вероятно, это верно	291
<i>Вероятностное доказательство. Алгоритм Шора для квантового компьютера</i>	
Глава 80. Живем ли мы в скрюченном мире?	294
<i>Неевклидова геометрия</i>	
Глава 81. Бывают ли в математике стандарты?	297
<i>Математическая речь (за небольшим исключением) стандартизована</i>	
Глава 82. Взмах крыльев бабочки	301
<i>Теория хаоса. Линейные задачи</i>	
Глава 83. Разбогатеть гарантированно	304
<i>Феномен больших чисел</i>	
Глава 84. Не доверяйте тем, кому за тридцать	307
<i>Правда ли, что математическая креативность с возрастом быстро убывает?</i>	
Глава 85. Равенство в математике	309
<i>Тождество зависит от контекста</i>	
Глава 86. Волшебные инварианты	311
<i>Математика и волшебство</i>	

Глава 87. Математика идет в кино	315
<i>Как представлена математика в кинематографе</i>	
Глава 88. Ленивая восьмерка: бесконечность	317
<i>Как математики работают с бесконечностью</i>	
Глава 89. Поля книг должны быть шире!	320
<i>Задача Ферма. Бесконечный спуск</i>	
Глава 90. Математика: что у нас внутри	324
<i>Компьютерная томография. Обратная задача</i>	
Глава 91. Мозг внутри компьютера	326
<i>Нейронная сеть. Перцептрон</i>	
Глава 92. Cogito, ergo sum	330
<i>Декарт. Декартовы координаты</i>	
Глава 93. Есть ли в мире дыры?	333
<i>Гипотеза Пуанкаре</i>	
Глава 94. Так ли страшны комплексные числа?	336
<i>Комплексные числа</i>	
Глава 95. Эшер и бесконечность	340
<i>Морис Эшер. Паркетты</i>	
Глава 96. В начале единица встречается чаще двойки	344
<i>Закон Бенфорда</i>	
Глава 97. Подсолнух и ратуша в Лейпциге	348
<i>Золотое сечение. Последовательность Фибоначчи. Цепные дроби</i>	
Глава 98. Оптимально упакованная информация	354
<i>Теория кодирования. Контрольные биты. Коды Хэмминга</i>	
Глава 99. Четырех красок достаточно	358
<i>Задача о четырех красках. Графы</i>	
Глава 100. Математики становятся миллионерами	363
<i>Алгоритмы Гугла</i>	
Что читать дальше	367