Для кофейников

Дж. Мэйсон, Л. Бёртон, К. Стэйси

Математика – это просто 2.0

Думай математически

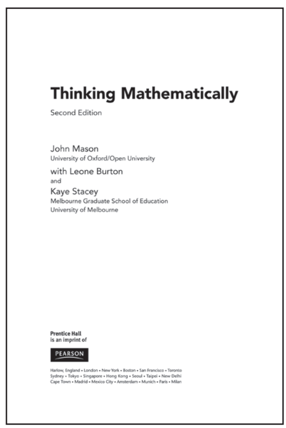
УДК 51
ББК 22.1
М97

М97 Мэйсон Дж., Бёртон Л., Стэйси К.
Математика – это просто 2.0. Думай математически
Москва: ТЕХНОСФЕРА, 2015. – 352 с., ISBN 978-5-94836-401-8

«Думай математически» – идеальное пособие для тех, кто стремится развить свои математические способности или занимается обучением математическому мышлению других. Авторы предлагают читателю интересные задания, вовлекая каждого в дискуссию, в результате которой обретается бесценный опыт. Во второе издание включены 77 новых задач и новая глава. Книга открывает глубинные процессы математического мышления и подсказывает, каким образом пробудить интерес к математике и развить природные способности.

Книга окажется полезной всем, кто знаком с азами математики и стремится научиться решать как нестандартные математические задачи, так и жизненные проблемы.

УДК 51
ББК 22.1



Thinking Mathematically
Second Edition
John Mason
University of Oxford/Open University
with Leone Burton
and
Kaye Stacey
Melbourne Graduate School of Education
University of Melbourne

Prentice Hall
is an imprint of
PEARSON
Harlow, England • London • New York • Boston • San Francisco • Toronto
Sydney • Tokyo • Singapore • Hong Kong • Seoul • Taipei • New Delhi
Cape Town • Madrid • Mexico City • Amsterdam • Munich • Paris • Milan

ISBN 978-5-94836-401-8
ISBN 978-0-273-72891-7 (англ.)

Содержание

Предисловие к первому изданию 7

Предисловие ко второму изданию..................... 11

Глава 1
Каждый может начинать 19

- Экспериментирование 19
- Обобщаем 28
- Делаем заметки 30
- Обзор и предварительный просмотр..................... 44
- Справочная литература 47

Глава 2
Этапы работы 48

- Три этапа..................... 49
- Этап погружения 51
  - Погружение 1: что я ЗНАЮ?..................... 52
  - Погружение 2: что мне НУЖНО узнать?..................... 56
  - Погружение 3: что я могу ВВЕСТИ?..................... 59
  - Погружение: подведение итогов..................... 62
- Этап штурма 62
- Этап обзора..................... 63
  - Обзор 1: ПРОВЕРЬТЕ решение..................... 65
  - Обзор 2: анализируем ключевые идеи и ключевые моменты 66
  - Обзор 3: переносим на более широкий контекст 67
  - Практикуемся в обзоре 69
  - Обзор: подведение итогов 72
- Три этапа: подведение итогов..................... 72
- Справочная литература 74

Глава 3
Что делать, если вы ЗАСТРЯЛИ 75

- В состоянии «ЗАСТРЯЛИ» 75
- Выводы 90

Глава 4
Штурм: делаем предположение 92

Что такое предположение? 92
Предположение: основа решения 97
Откуда берутся предположения? 107
Разрабатываем модель 111
Выводы 114

Глава 5
Штурм: подтверждаем и убеждаем 116

Структура 116
Ищем структурные связи 122
Когда предположение доказано? 127
Воспитываем внутреннего противника 132
Выводы 139
Справочная литература 140

Глава 6
Все еще в тупике? 141

Дистилляция и детальное обдумывание 142
Экспериментируем и обобщаем 146
Скрытые допущения 147
Выводы 151
Справочная литература 153

Глава 7
Развиваем внутренний монитор 154

Роли монитора 156
Эмоциональные снимки 157
Приступаем 160
Углубляемся 162
Обдумываем в деталях 164
Не сдаемся 166
Озарение 168
Сомневаемся 170
Размышляем 172
Выводы 172

Глава 8
Сам себе вопрошающий 174

Спектр вопросов 175
Некоторые «сомнительные» обстоятельства 177
Замечаем 183
Препятствия «вопросительному» отношению 185
Выводы 189
Справочная литература 190

Глава 9
Развиваем математическое мышление 191

Улучшаем математическое мышление 193
Провоцируем математическое мышление 196
Помогаем математическому мышлению 199
Поддерживаем математическое мышление 201
Выводы 205
Справочная литература 207

Глава 10
Пища для размышления 208

Справочная литература 260

Глава 11
Мыслим математически в программных темах 261

Разрядное значение и арифметические алгоритмы 262
Множители и простые числа 265
Дроби и проценты 270
Пропорции и скорости 273
Уравнения 280
Модели и алгебра 283
Графики и функции 288
Функции и математический анализ 293
Последовательности и рекурсии 299
Математическая индукция 303
Абстрактная алгебра 306
Периметр, площадь и объем 312
Геометрические рассуждения 316
Логика 321

Справочная литература 325

Глава 12
Способности, темы, миры и внимание 326

Природные способности и процессы 326
Математические темы 333
Математические миры 335
Внимание 337
Выводы 338

Литература 340

Список задач 343

Предметный указатель 347

ГЛАВА I

КАЖДЫЙ МОЖЕТ НАЧИНАТЬ

Эта глава познакомит вас с занятиями, которые запустят мыслительный процесс, над каким бы вопросом вы ни работали. Так что не надо пугаться вопроса из области математики и не стоит с тоской на лице смотреть на чистый лист бумаги. Пускаться во все тяжкие по первому пути, который взбредет на ум, в надежде, что грубая сила победит, тоже неумно с точки зрения тактики. Однако есть и продуктивные ходы.

Экспериментирование[1]

Лучше всего начать с практики, например вот с такой задачки:

Склад

На складе вы получите 20%-ю скидку, но вам придется заплатить 15%-й налог с оборота. Как вы думаете, что лучше посчитать сначала — скидку или налог?

Как подступиться к такому вопросу? Для начала нужно точно понять, о чем вас спрашивают, но это может произойти не сразу, а только после некоторых усилий. Надеюсь, вам пришло в голову посчитать, что к чему для товара стоимостью, скажем, £100.

ПРИСТУПАЙТЕ, ЕСЛИ ЕЩЕ НЕ ПРИСТУПИЛИ

[1] Автор использует термин specializing, т.е. конкретизация, или специализация, но, по словам В.И. Арнольда, математика — наука экспериментальная, поэтому здесь термин «specializing» переведен как экспериментирование. — *Прим. ред.*

Удивлены результатом? Большинство людей удивляются, и именно это удивление питает математическое мышление. А теперь посмотрим, таков же результат для товара стоимостью, скажем, £120?

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

Запишите ваши подсчеты и ваши соображения. Это единственный способ развивать мыслительные способности.

ПОПРОБУЙТЕ И УВИДИТЕ!

А теперь, можно с помощью калькулятора, решите оба примера. Вы преследуете сразу две цели: получить представление, какой может быть ответ, и в то же самое время получить ощущение, почему ваш ответ может быть правильным. Другими словами, решив примеры, вы наполните вопрос смыслом для себя и, может быть, начнете видеть скрытую модель для всех частных случаев, что и послужит ключом к окончательному решению вопроса.

Какую же модель, или схему, может скрывать под собой этот вопрос? Может, у вас есть опыт решения подобных задач и вы знаете, что делать. Если так, то подумайте, как вы могли бы побудить кого-либо менее искушенного взяться за эту задачу, затем прочитайте мои предложения. Важно проработать все мои доводы, потому что именно там вводятся и иллюстрируются важные моменты математического мышления.

Как окончательная цена зависит от порядка вычисления скидки и налога? В примерах, которые вы решили, должна прослеживаться схема. Если ее нет, то проверьте свои расчеты! А будет ли такой же результат для других цен? Если вы не уверены, попробуйте другие примеры. Когда будете уверены, ищите объяснение (или читайте ниже).

ПРОБУЙТЕ НА ДРУГИХ ПРИМЕРАХ, ПОКА НЕ БУДЕТЕ УВЕРЕНЫ

Многое зависит от формы, в которой вы делаете расчеты. Обычная форма для скидки и последующего налога следующая:

подсчитайте скидку:	для £100 скидка составляет £20,
вычтите ее из цены:	$\pounds 100 - \pounds 20 = \pounds 80$,

подсчитайте налог:	15% от £80 — это £12,
добавьте налог и получите окончательную цену:	$\pounds 80 + \pounds 12 = \pounds 92$.

Попробуйте найти другие способы подсчета, пока не найдете тот, что показывает, почему ваш результат всегда правильный. Например, вы хотите найти форму подсчета, которая не зависит от начальной цены. Чтобы сделать это, попробуйте посчитать, какой процент от исходной цены вы платите, когда налог уже вычтен и какой процент от исходной цены вы платите, когда добавлен налог.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

В любом случае вы узнаете, что:

(а) вычесть 20% из цены — все равно что заплатить 80%, т.е. вы платите 0,80 от цены;

(б) добавить 15% к цене — все равно что заплатить 115%, т.е. вы платите 1,15 от цены.

Затем для любой исходной цены, скажем, £100, посчитав

сначала скидку:	вы платите $1{,}5 \times (0{,}80 \times \pounds 100)$,
сначала налог:	вы платите $0{,}8 \times (1{,}15 \times \pounds 100)$.

Записав подсчет в такой форме, вы убедитесь, что порядок вычисления не имеет значения, потому что в итоге мы умножаем исходную цену на два числа в любом порядке. Если исходная цена £P, то, посчитав

сначала скидку:	вы платите $1{,}5 \times 0{,}80 \times \pounds P$,
сначала налог:	вы платите $0{,}8 \times 1{,}15 \times \pounds P$,

и они всегда равны.

Обратите внимание, сколь важно отстраниться от деталей подсчета и посмотреть на его форму или вид. Подобная мыслительная деятельность является основой для развития вашего математического мышления.

«*Склад*» иллюстрирует несколько важных аспектов математического мышления, на два из которых я хочу обратить ваше внимание. Во-первых, есть особые процессы, которые помогают математическому мышлению. В данном случае процесс, на который делается упор, — это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ, что подразумевает обращение к примерам, чтобы выяснить все про вопрос. Выбранные вами примеры особенные — в том смысле, что они представляют собой частные случаи более общей ситуации в самом вопросе. Во-вторых, если вы ЗАСТРЯЛИ, ничего сверхъестественного в этом нет и, как правило, можно найти тот или иной выход. В данном случае это ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЕ. Это простой способ, использовать который может каждый, и, когда вопрос ставит людей в тупик, предложения типа

А вы не пробовали на конкретном примере?

и

Что произойдет в этом отдельном случае?

сталкивают их с мертвой точки.

Следующий пример, взятый нами из сборника Banwell, Saunders and Tahta (1986), иллюстрирует другие формы экспериментирования.

Полоска бумаги

Представьте себе длинную узкую полоску бумаги, вытянутую перед вами слева направо. Представьте, что взялись за ее концы и положили тот конец полоски, что у вас в правой руке, поверх левого. А теперь плотно прижмите полоску и сложите пополам, чтобы получилась складка. Повторите всю операцию полностью на получившейся полоске еще два раза. Сколько всего получится складок? А сколько будет складок, если операцию повторить 10 раз?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Экспериментируйте в уме, сосчитав складки после двух сложений.

– Может, рисунок поможет укрепить мысленный образ.
– Экспериментируйте, попробовав сложить полоску бумаги.
– Попробуйте сделать три сложения, а потом четыре сложения. Ищите схему.
– Что вы хотите найти? Будьте внятны и точны.
– Есть ли нечто, имеющее отношение к складкам, что можно подсчитать более простым способом?
– Проверьте все предположения на новых примерах!

Я не собираюсь давать полного решения этого вопроса. Если вы ЗАСТРЯЛИ, не огорчайтесь. Оказаться в положении «ЗАСТРЯЛИ» — это здорово, если рассматривать эту ситуацию как возможность чему-либо научиться. Может, вы вернетесь к этому вопросу с новой энергией, когда одолеете следующую главу! Прежде чем покончить с этим вопросом, попробуйте мысленно до пяти сложений с помощью рисунков или с настоящей бумажной полоской. Сосчитайте складки и начертите таблицу с результатами. Если в «*Складе*» конкретизация означает обращение к числовым примерам, то в «*Полоске бумаги*» надо использовать рисунки или настоящие бумажные полоски и экспериментировать.

Важно использовать то, чем вы можете уверенно манипулировать. Это могут быть физические предметы или математические, например диаграммы, числа или алгебраические символы.

Экспериментирование само по себе вряд ли решит для вас любой вопрос, но оно наверняка подтолкнет вас к действиям и настроит на нужный лад. Вопрос теряет свой пугающий внешний вид и становится уже не таким неприступным. Более того, частные случаи должны помочь вам почувствовать, в чем именно состоит вопрос, и это натолкнет на верную догадку. Дальнейшая тщательная конкретизация с упором не на «что», а на «почему» может привести к осознанию того, что на самом деле происходит.

Следующий вопрос относится к более знакомой области.

Палиндромы

Палиндромом называется число, например 12321, если оно читается одинаково — как слева направо, так и справа налево. Один мой друг уверяет, что все четырехзначные палиндромы делятся на 11. Так ли это?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Найдите несколько четырехзначных палиндромов.
– Вы верите моему другу?
– Что вы хотите показать?

Вариант решения

Помните, что это всего лишь вариант и в полировке он не нуждается, — это всего лишь один из способов размышления над вопросом. Единственно разумный путь — начать с экспериментирования. Я хочу прочувствовать, о каких числах идет речь. Что же такое палиндромы?

747 — это палиндром,

88 и 6 — тоже палиндромы.

В вопросе речь идет лишь о палиндромах с четырьмя разрядами, т. е. таких числах, как 1221, 3003, 6996 и 7557. Что же мне нужно узнать? Мне нужно узнать, все ли такие числа делятся на 11.

ПРОВЕРЬТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Попробовав на отдельных числовых примерах, я убедился в том, что такой результат вполне возможен. Однако заметьте: я не могу быть уверен в том, что мой результат *всегда* верен на основании исключительно экспериментирования, разумеется, если я не собираюсь проверить *все* четырехзначные палиндромы. Поскольку их всего около 90, целесообразнее поискать скрытую модель.

СДЕЛАЙТЕ ЭТО ПРЯМО СЕЙЧАС

Я взял для примера четыре конкретных случая:

$$1221/11 = 111,$$

$$3003/11 = 273,$$

$$6996/11 = 636,$$

$$7557/11 = 687,$$

но не нашел в них никакой очевидной модели. Это наводит на мысль об исключительно важном моменте относительно экспериментирования. Выбирать примеры наугад — неплохой способ прояснить вопрос и понять, может ли утверждение или догадка быть верной, но если мы ищем модели, успех более вероятен, если экспериментирование осуществлять систематически. Как я могу действовать систематически в данном случае?

ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

ЗАСТРЯЛИ?

– Какой самый маленький четырехзначный палиндром?
– Какой следующий за ним самый маленький?
– Каким образом из одного палиндрома сделать другой?

Один способ состоит в следующем: начать с самого маленького четырехзначного палиндрома (то есть с 1001) и продолжать по нарастающей в числовом порядке:

$$1001, 1111, 1221, 1331, \ldots .$$

Проверим утверждение моего друга:

$$\begin{aligned} 1001/11 &= 91, \\ 1111/11 &= 101, \\ 1221/11 &= 111, \\ 1331/11 &= 121. \end{aligned}$$

Это не только подтверждает утверждение моего друга, но и предполагает нечто большее. Обратите внимание: каждый из приведенных палиндромов больше предыдущего на 110, а каждое частное больше предыдущего на 10.

АГА! Теперь я понимаю, почему утверждение моего друга верно. Разница между последовательными палиндромами всегда 110. Самый маленький четырехзначный палиндром (1001) точно делится на 11, равно как и 110. Поскольку все последующие палиндромы получаются из 1001 прибавлением 110, все четырехзначные палиндромы должны делиться на 11.

Таким образом, вопрос решен, осталось только «причесать» решение и красиво сформулировать.

Или не решен? Покрывает ли решение все конкретные случаи, которые я использовал? Присмотритесь внимательнее! Если все палиндромы можно получить, последовательно прибавляя 110 к 1001, то у всех палиндромов в разряде единиц будет один. Но ведь это не так! 7557 — тоже палиндром, а в разряде единиц стоит 7. Где же ошибка? Экспериментирование привело к модели (что последующие палиндромы отличаются на 110), на основании которой я выстроил свое решение. Но эта модель не работает для всех палиндромов, поскольку предсказывает нечто ложное (все палиндромы не оканчиваются на один). Ошибка заключается в том, что мы на основании всего лишь трех разностей скоропалительно сделали общий вывод. К счастью, конкретизация снова нам поможет: на этот раз выявить недостаток модели. Посмотрите на нижеследующий перечень палиндромов:

Палиндромы	1881	1991	2002	2112	2222	2332
Разности		110	11	110	110	110

На этот раз я приступлю с большей осторожностью и, скорее, с недоверием, нежели с доверием. Судя по модели, последующие палиндромы отличаются от предыдущих на 110, за исключением тех случаев, когда меняется тысячный разряд (и тогда разность 11). Дальнейшая конкретизация дает результаты, согласующиеся с этим, и умножает уверенность в том, что это и есть искомая модель. Таким образом, конкретизация снова подтвердила нам то, что модель может быть верной. А теперь пришло время искать общую причину, почему новая модель работает, в результате чего должно получиться нечто вроде следующего.

> Последующие палиндромы с одинаковыми тысячными разрядами, чтобы быть палиндромами, должны иметь такие же разряды единиц. Таким образом, числа отличаются только вторым и третьим разрядом, каждый из которых больше единицы. Следовательно, разность составляет 110.
>
> Последующие палиндромы, которые отличаются тысячными разрядами, получаются в результате прибавления 1001 (чтобы увеличить разряд тысяч и единиц) и вычитания 990 (чтобы уменьшить второй и третий разряды с девяти до нуля). Но, как видно из примеров, $1001 - 990 = 11$.
>
> В обоих случаях разность делится на 11; таким образом, поскольку самый маленький четырехзначный палиндром (1001) делится на 11 (это так), то и все остальные тоже делятся.

А теперь вернемся назад и посмотрим, каким образом я использовал частные случаи:

- Они помогли мне осознать вопрос, заставив уяснить, что такое палиндром.
- Они также привели меня к обнаружению формы четырехзначного палиндрома.
- Я сумел убедиться на примерах в том, что утверждение моего друга верно.
- Позднее в результате экспериментирования выявилась модель рассуждений, и я получил представление о том, почему этот результат верен.
- Проверяя верность модели (а она не была верна), я воспользовался другими частными случаями.

Именно потому что конкретные примеры можно использовать так эффективно, так легко и столь разнообразно, она и является основой математического мышления.

Аргументация, приведенная в моем решении, никоим образом не является образчиком элегантности. Первая попытка редко похожа на варианты решений, которые вы найдете в учебниках. Если вы достаточно продвинуты в математике и уверенно обращаетесь с буквами, заменяющими произвольные числа, то намного быстрее получите решение.

Может, вы обратили внимание на то, что все четырехзначные палиндромы имеют вид $ABBA$, где A и B — цифры. Такое число имеет следующее значение:

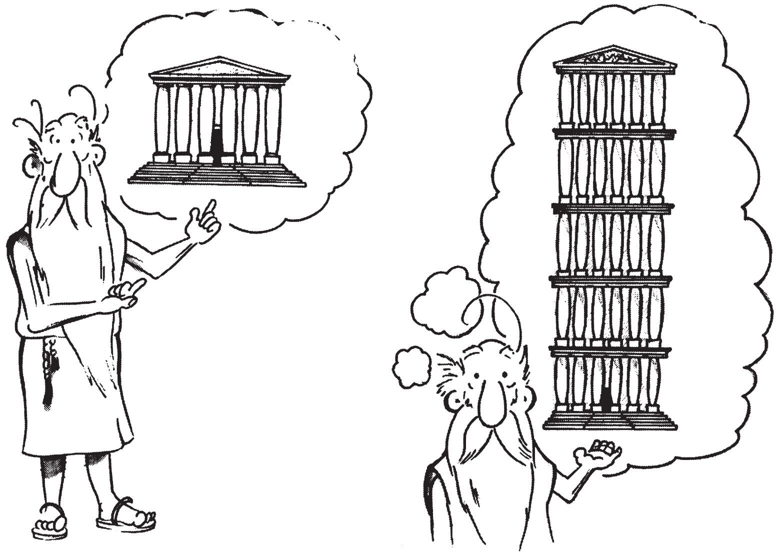
$$\begin{aligned} 1000A + 100B + 10B + A &= (1000 + 1)A + (100 + 1)B = \\ &= 1001A + 110B = \\ &= 11 \times 91A + 11 \times 10B = \\ &= 11(91A + 10B). \end{aligned}$$

(Если вам подобное рассуждение с символами представляется слишком сложным, проследите его на частном примере, положив $A = 3$ и $B = 4$. Затем повторяйте вычисления с другими конкретными значениями для A и B, пока не прочувствуете схему, выраженную алгебраическими символами.)

Элегантные решения, подобные этому, явно не имеют отношения к частным случаям, поскольку с помощью символов дают общую аргументацию, подходящую для всех четырехзначных палиндромов сразу. Однако, чтобы придумать это решение, я должен быть достаточно близко знаком с математическими объектами задачи (а именно четырехзначными палиндромами, переменными A и B и десятичной записью чисел), чтобы общая форма $ABBA$ стала частной и внушала доверие. Я должен с легкостью манипулировать как палиндромами, так и заменяющими их символами. В этом суть экспериментирования. Обращение к знакомым, внушающим доверие объектам и использование их для исследования существа вопроса, создают ощущение уверенности и легкости в незнакомых ситуациях.

Обобщаем

Говоря о частных случаях, немыслимо избежать обратной стороны медали, т. е. процесса обобщения: исходя из отдельных примеров строить предположения об обширном классе предметов.



Обобщение — *источник жизненной силы* математики. Если конкретные результаты могут сами по себе быть полезными, то общий случай представляет собой истинно математический результат. Например, в задаче «*Склад*» мы знаем, что будет с товаром стоимостью £100, но эта информация менее важна, чем то, что окончательная цена абсолютно не зависит от порядка вычисления скидки и налога.

Обобщение начинается, когда вы чувствуете скрытую схему, даже если не можете ее сформулировать. Посчитав скидку и налог для нескольких цен, я заметил, что порядок подсчета не влияет на конечный результат. Это и есть скрытая схема, или обобщение. Я предположил, что порядок вычисления никогда не повлияет на результат. Когда подсчеты были записаны в удобной форме, было несложно ввести символ P (price — цена) для начальной цены и показать, что обобщение верно.

Обобщение на этом не должно заканчиваться. А что если скидка и цена изменятся? Может, иногда порядок вычисления все-таки имеет значение?

ЕСЛИ ВЫ ЕЩЕ ЭТОГО НЕ СДЕЛАЛИ,
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС

Я надеюсь, что по форме вычисления, полученной ранее, вы поняли, что конкретные проценты не имеют отношения к рассуждениям. Часть силы символов в математике состоит в том, чтобы выражать подобную модель. В данном случае обозначим скидку как дробь D, обозначим налоговую ставку как дробь V, а исходную цену обозначим через P. Итак, если

сначала считаем скидку:	вы платите $P(1 - D)(1 + V)$,
сначала считаем налог:	вы платите $P(1 + V)(1 - D)$.

Они всегда равны, поскольку порядок, в котором мы перемножаем числа (а значит, и символы, которые их заменяют), не меняет конечного результата. Привлечение символов позволяет представить рассуждение в кратком виде, и можно одновременно иметь дело с целыми классами примеров (в данном случае любыми ценами, налоговыми ставками и скидками). Однако использовать символы не так просто, как может показаться, — символы должны стать такими же знакомыми и значимыми, как числа, которые они заменяют.

«*Склад*» в простой форме иллюстрирует постоянное взаимодействие частностей и обобщения, что составляет значительную часть математического мышления. Частные случаи привлекаются для получения данных, на основании которых можно сделать обобщение. Сформулировав схему, которую вы почувствовали, мы делаем предположение (догадались или кто-то подсказал), которое дальнейшие частные случаи могут подтвердить или опровергнуть. Процесс подтверждения предположения требует дальнейшего обобщения, причем акцент смещается с догадки, которая может оказаться верной, к пониманию того, почему она может быть верна. Решая «*Склад*», я сначала обобщил результат, предположив, что изменение порядка вычисления не влияет на окончательный результат («что»). Для подтверждения своего предположения мне пришлось заняться методом вычисления («почему»).

«*Палиндромы*» иллюстрируют два других важных аспекта обобщения. Частные случаи должны быть систематическими, тогда они способствуют обобщению, поскольку модель более очевидна не на выбранных наугад, а на связанных между собой примерах. Однако тут есть скрытая угроза. Иногда модель кажется очевидной, и так заманчиво убедить себя в ее верности, но в действительности она верна лишь отчасти. В «*Палиндромах*» была упущена разница в 11 между некоторыми последовательными палиндромами, поскольку не проверили примеры, где менялись тысячные разряды. Надо быть осторожным и не хвататься за кажущуюся очевидной модель или обобщение, не проверив их на большом количестве примеров. Это основа математического мышления. В равной мере опасно бросаться с головой в предположение и отмахиваться от догадки. В главах 5 и 6 речь и пойдет об этой тонкой грани между готовностью поверить в обобщение и нежеланием шагнуть в неизведанное.

Делаем заметки

Прежде чем мы перейдем к другим примерам экспериментирования и обобщения, я хочу показать вам способ записи математического опыта. Метод этот вводится сейчас, потому что вы должны начать записывать свои наблюдения, чтобы они не потерялись и потом можно было их проанализировать и изучить. Запись наблюдений поможет вам подмечать их, а это способствует развитию математического мышления. Старайтесь записывать три вещи:

– все важные мысли, которые приходят вам в голову, когда вы ищете ответ на вопрос;
– что вы пытаетесь делать;
– ваши ощущения по этому поводу.

Само собой разумеется, это не так просто, но попробовать стоит. В частности, это здорово помогает, когда вы попадаете в тупик; так и пишите — ЗАСТРЯЛИ! Признать это равнозначно первому шагу, чтобы выбраться из этого состояния.

Записывая свои ощущения и математические идеи, которые приходят вам на ум, вы заполняете пустоту белого листа, который лежит перед вами, когда вы приступаете к задаче.

Как только начало положено, мыслям становится свободнее. Потом очень важно записывать, что вы пытаетесь сделать, поскольку можно сбиться с выбранного пути и забыть, почему вы начали выполнять то или иное сложное вычисление. Нет ничего хуже, чем отвлечься на миг от какого-нибудь занятия и осознать, что вы понятия не имеете, что делаете и почему!

Возьмите себе за правило: делайте записи в процессе работы над любой из предложенных в книге задач. *Пусть вас не пугает* большой объем вещей, которые надо записывать. Из главы в главу я буду подсказывать вам, что именно нужно записывать. Самый подходящий момент — начать прямо сейчас, так что попытайтесь делать записи, когда приступите к работе над следующей задачей. *Избегайте подробно описывать* то, что вы делаете. Вам нужны краткие записи, которые помогут вспомнить конкретный момент. Не забывайте про частные случаи и обобщение и сравните свой отчет с моим лишь тогда, когда сделаете все, что можете. Мой отчет наверняка окажется более формальным, чем ваш, и для удобства некоторые фразы я даю прописными буквами.

Лоскутное одеяло

Нарисуйте квадрат и проведите прямую линию прямо через него. Начертите еще несколько прямых линий в любом расположении таким образом, чтобы квадрат разделился на несколько частей. Задача состоит в раскрашивании всех участков так, чтобы смежные были раскрашены в разные цвета. (Участки, имеющие лишь одну общую точку, смежными не считаются.) Сколько различных цветов понадобится, чтобы раскрасить такой разделенный на куски квадрат?

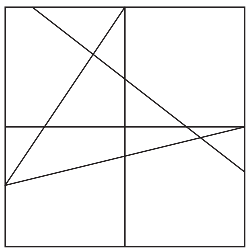
ПОПРОБУЙТЕ ПРЯМО СЕЙЧАС.
ЗАПИШИТЕ МЫСЛИ И ОЩУЩЕНИЯ,
ОБРАЩАЯСЬ К МОИМ КОММЕНТАРИЯМ,
ТОЛЬКО ЕСЛИ ВЫ ЗАСТРЯЛИ

ЗАСТРЯЛИ?

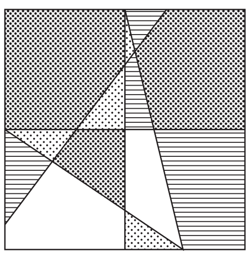
– Проясните вопрос с помощью конкретных примеров — постарайтесь раскрашивать в определенном порядке.
– Что вы ЗНАЕТЕ? Как получилось такое расположение?
– Что вам НУЖНО узнать?
– Следуйте системе!

Вариант решения

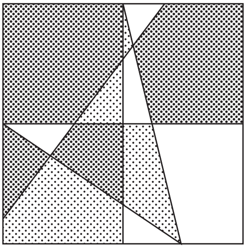
О чем спрашивается в задаче? Попробуйте на отдельном примере, т. е. экспериментируйте, чтобы понять, что происходит.



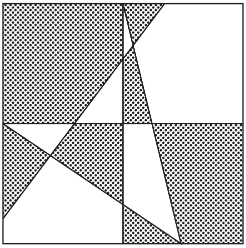
Эти пять прямых образовали 13 участков. Я ЗНАЮ, что мне надо раскрасить их таким образом, чтобы смежные имели разные цвета. Вот один из способов, если использовать четыре цвета:



Мне НУЖНО найти минимальное число цветов, которые необходимы при любом расположении линий. Четыре — это действительно минимальное число цветов, необходимых для этого? ПОПРОБУЙТЕ использовать только три цвета:

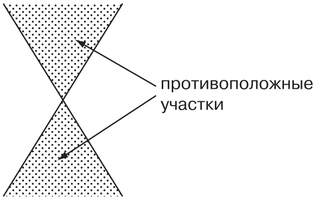


Получилось! Попробуйте еще, используя только два цвета.

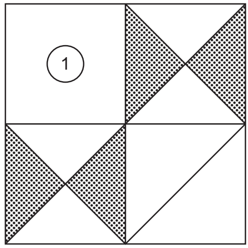


Опять получилось! Очевидно, что одного цвета недостаточно, поэтому для данного конкретного расположения достаточно двух цветов.

Раскрашивая области, я обратил внимание на то, что «противоположные» участки все время раскрашивал одним и тем же цветом (обобщение!).

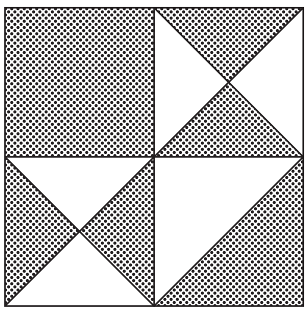


А всегда ли достаточно двух цветов? ПРОВЕРЬТЕ на другом примере — старайтесь использовать два цвета и не забывайте о «противоположном» правиле (опять конкретизация!).



АГА! «Противоположное» правило не работает. Когда темные участки раскрашены, используя «противоположное» правило, участок (1) не может быть ни темным, ни белым. И с другими участками та же проблема. Либо мне нужно больше двух цветов, либо я должен отказаться от «противоположного» правила. Так какой же путь мне выбрать?

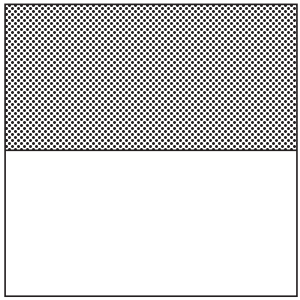
ПОПРОБУЙТЕ раскрасить снова двумя цветами и откажитесь от «противоположного» правила.



В процессе этой успешной попытки я заметил, что как только один участок раскрашен, работать с остальными легко. Участки, смежные с раскрашенным, должны непременно быть другого цвета — «смежное» правило. «Противоположное» правило не работает, но теперь я делаю предположение, что любое расположение участков можно раскрасить только двумя цветами (обобщаю, чтобы найти, ЧТО может быть верно).

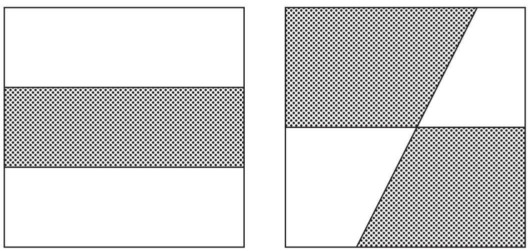
В настоящий момент у меня не так много оснований полагать, что мое предположение верно. ЗАСТРЯЛИ! Как мне убедить себя, что оно верно всегда? АГА! экспериментируем, следуя системе.

Одна линия:



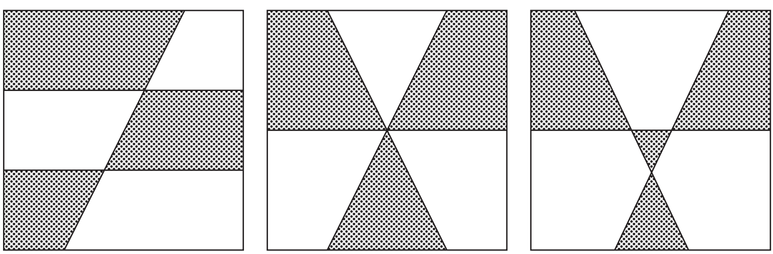
двух цветов достаточно

Две линии:

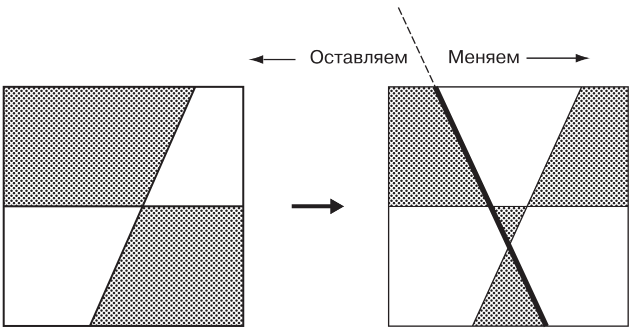


двух цветов достаточно

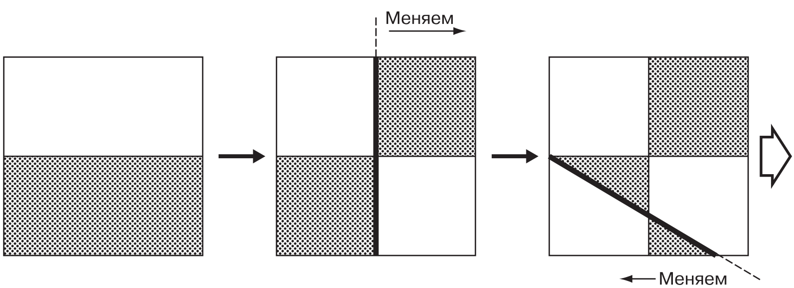
Три линии:



АГА! Поскольку я действую по системе, следя за тем, что происходит, когда я добавляю новую линию, я начинаю понимать, почему двух цветов всегда достаточно (обобщаю, чтобы понять ПОЧЕМУ). Когда я добавляю новую линию (скажем, третью), некоторые из старых участков разрезаются на две части. Теперь все участки (целые и разрезанные куски) по одну сторону новой линии я оставляю в том же цвете. По другую сторону новой линии я должен изменить цвет всех участков. Посмотрите, как это работает для трех линий:



Проверьте еще раз: проверяйте этот метод, раскрашивая первый пример (еще экспериментирование).



Это работает для данного примера и, я думаю, будет работать всегда. Весь квадрат раскрашен соответствующим образом, потому что

– участки по обе стороны новой линии раскрашены как нужно, поскольку смежные участки раскрашены другим цветом по сравнению со старой раскраской;
– смежные участки вдоль новой линии также раскрашены поразному.

Таким образом, весь квадрат целиком с добавленной новой линией раскрашен должным образом.