Л.И.Дворкин, В.И.Гоц, О.Л.Дворкин

ИСПЫТАНИЯ БЕТОНОВ И РАСТВОРОВ

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ИХ СОСТАВОВ

«Инфра-Инженерия»

УДК 691.33:620.1
ББК 38.626.1
Д 24

Рецензенты: доктор технических наук, профессор Львович К.И. (начальник консультационного отдела НПЦ "Стройтех", г. Москва); доктор технических наук, профессор Зайченко Н.М. (Донбасская национальная академия строительства и архитектуры)

Дворкин Л.И., Гоц В.И., Дворкин О.Л.
Испытания бетонов и растворов. Проектирование их составов. – *2-е изд.* – М.: Инфра-Инженерия, 2015. – 432 с.

ISBN 978-5-9729-0080-0

Излагаются методы испытаний бетонов и растворов с целью определения их физико-механических свойств и соответствия качественных показателей проектным требованиям и нормам государственных стандартов. Освещаются методики проектирования составов бетонных и растворных смесей, обеспечивающие заданные показатели свойств материалов.

Приводятся основные понятия и излагается сущность математико-статистических методов обработки экспериментальных данных и планирования экспериментов.

Даны примеры расчетов, выполняемых при определении качественных показателей бетонов и растворов.

Книга предназначена для инженерно-технических работников строительных организаций и предприятий, а также студентов строительных высших учебных заведений.

ISBN 978-5-9729-0080-0

СОДЕРЖАНИЕ

1. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИСПЫТАНИЙ БЕТОНОВ И РАСТВОРОВ

1.1. Статистические характеристики экспериментальных результатов

При многократном измерении показателя, характеризующего определенное свойство материала, получается ряд неодинаковых чисел. Это обусловлено пределом точности измерительных приборов, субъективными особенностями экспериментатора, снимающего показания, и изменчивостью изучаемых свойств, вследствие воздействия на них, наряду с учитываемыми, случайных, неконтролируемых факторов. Например, при лабораторном определении прочности образцов-близнецов раствора или бетона одного состава различия результатов могут быть обусловлены несовершенством оборудования, методики изготовления и испытания образцов, различиями структуры, неравномерным распределением усилий в образцах и др.

Ряд чисел, полученный при измерении изучаемого свойства материала, называется *статистической совокупностью или вариационным рядом.* Статистическую совокупность чисел, полученных при эксперименте, можно при значительном числе испытаний выразить графически в виде *кривой распределения,* отложив на оси абсцисс экспериментальные данные, а по оси ординат частоту их повторения.

При определении свойств строительных материалов кривые распределения (рис. 1.1) приближаются по характеру, как правило, к нормальной кривой Гаусса. Эта кривая отвечает равной вероятности появления как положительных, так и отрицательных отклонений от центра. Экспериментальные кривые распределения отличаются от нормальной наличием *эксцесса и ассиметрии,* т.е. определенным сдвигом вершины соответственно относительно осей абсцисс и ординат. Из некоторой возможной совокупности всех возможных наблюдений или *генеральной совокупности чисел* в реальном эксперименте получают определенную *выборку*, которая включает n наблюдений. Для ее характеристики используют средние величины – среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонение.

Среднее арифметическое $\bar{x}$ находят по формуле:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \tag{1.1}$$

где $\sum_{i=1}^{n} x_i$ – сумма измеренных величин; n – число наблюдений.

Для кривой нормального распределения среднее арифметическое совпадает *с модой* – таким значениям измеряемой величины, которому соответствует наибольшая частота.

*Среднее квадратическое отклонение (*стандарт*) S* показывает пределы изменчивости изучаемого свойства, т.е. степень разброса отдельных его значений относительно среднего:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{1.2}$$

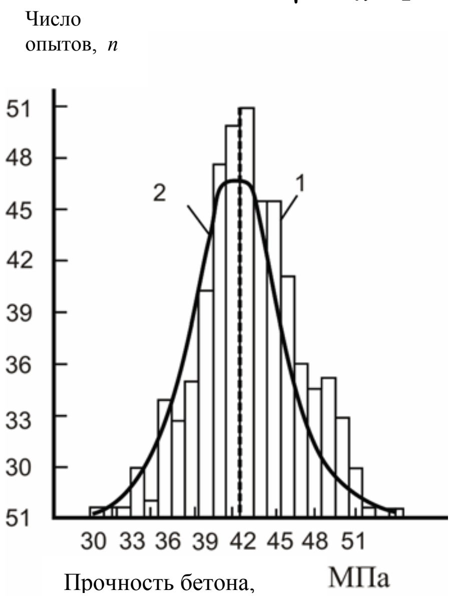

Рис. 1.1. Гистограмма (1) и кривая нормального распределения (2) прочности бетона

где $n\text{-}1=f$ – *число степеней свободы*, под которым понимается число свободно варьируемых членов совокупности.

При $n>25$ в формуле (1.2) вместо n-1 можно использовать n.

Величина S^2 характеризует *дисперсию* измеряемой величины в пределах данной выборки. Если объем выборки достаточно большой, величина дисперсии S^2 приближается к величине генеральной дисперсии σ.

Согласно теории вероятности при нормальном распределении в пределах $\bar{x} \pm 3\sigma$ укладывается 99,7% измерений, в пределах $\bar{x} \pm 2\sigma$ -95,4% и $\bar{x} \pm \sigma$ -68,3% (*правило трех сигм).*

Если дисперсия и среднее квадратическое отклонение характеризуют абсолютную изменчивость измеряемого свойства, то для выражения относительной изменчивости служит *коэффициент вариации*:

$$V_c = \left(S / \bar{x}\right) \cdot 100\% . \tag{1.3}$$

Коэффициент вариации широко применяется, например, для определения однородности бетона по прочности.

Для того, чтобы по среднему арифметическому данной ограниченной выборки судить более точно о средней величине измеряемого свойства, находят *среднеквадратическую ошибку среднего арифметического:*

$$m = \pm \frac{S}{\sqrt{n}}. \tag{1.4}$$

Отношение величины средней ошибки к величине среднего арифметического называют *показателем точности:*

$$\varepsilon = \pm \frac{m}{\bar{x}} \cdot 100\%. \tag{1.5}$$

Статистическая обработка результатов испытания, кроме определения изменчивости измеряемого показателя качества и точности исследования, предполагает оценку *доверительной вероятности (1-р)* или *уровня значимости р* получаемого результата.

В зависимости от конкретных обстоятельств принимают различную доверительную вероятность; чаще всего 1-*р* равно 0,95, 0,99 и 0,999. В первом случае достоверность результатов не подтверждается только 5 раз из 100, во втором – 1 раз из 100, в третьем – 1 раз из 1000. Соответственно уровень значимости - 0,05, 0,01, 0,001. Он показывает, сколько раз в ста или тысячи испытаниях мы рискуем ошибиться, объявив полученный результат правильным.

Число наблюдений n, необходимых для получения достаточно надежных и достоверных результатов, можно подсчитать по формуле:

$$n = \frac{V_c^2 t^2}{\varepsilon^2}, \tag{1.6}$$

где V_c – коэффициент вариации, %; ε – показатель точности, %; t – критерий Стьюдента, который находится при соответствующей доверительной вероятности и числе степеней свободы f (Прил. Б, табл. 1).

В табл. 1.1 приведены значения t – критерия при 1% и 5% уровнях значимости.

Таблица 1.1

Значения *t*-критерия

f	*p*, %		f	p, %		f	*p* %	
	1	5		1	5		1	5
1	63,657	12,706	6	3,707	2,447	30	2,75	2,042
2	9,925	4,303	8	3,355	2,306	60	2,66	2
3	5,841	3,182	10	3,169	2,228	120	2,617	1,98
4	4,604	2,776	15	2,947	2,131	∞	2,576	1,96
5	4,032	2,571	20	2,845	2,086			

Для правильного применения статистических оценок необходимо исключить возможные грубые ошибки при эксперименте, т.е. проверить однородность наблюдений. С этой целью можно использовать величину *максимального относительного отклонения* τ *:*

$$\tau = \frac{\left|x - \bar{x}\right|}{s}, \qquad (1.7)$$

где x – крайний элемент выборки, который подлежит проверке.

Если величина максимального относительного отклонения в исследуемой выборке больше табличной величины τ при заданных значениях вероятности или уровня значимости (табл. 1.2), то крайнее значение x отбрасывается как грубо ошибочное.

Таблица 1.2

Значения τ-критерия

n	*p*, %		n	*p*, %		n	*p*, %	
	1	5		1	5		1	5
3	1,41	1,41	11	2,61	2,34	19	2,93	2,6
5	1,96	1,87	13	2,71	2,43	21	2,98	2,64
7	2,27	2,09	15	2,8	2,49	23	3,03	2,68
9	2,46	2,24	17	2,87	2,55	25	3,07	2,72

Пример 1.1. *Найти среднюю активность цемента в партии ,ее изменчивость и точность измерений, если результаты испытаний образцов в МПа следующие: 53,0, 53,7, 54,0, 55,2, 55,9, 56,7. Оценить однородность полученных данных при 5% уровне значимости.*

Расчет производим по формулам (1.1. – 1.7). Результаты расчета приведены в табл. 1.3.

Таблица 1.3

Расчет эмпирических характеристик распределения активности цемента

Обозначения	Номер испытаний						$\sum n = 6$
	1	2	3	4	5	6	
x_i	53,0	53,7	54,0	55,2	55,9	56,7	$\sum x_i = 328,5$
$x_i - \bar{x}$	-1,8	-1,1	-0,8	+0,4	+1,1	+1,9	$\sum (x_i - \bar{x}) = -0,3$
$(x_i - \bar{x})^2$	3,24	1,21	0,64	0,16	1,21	3,61	$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 10,07$

$$\bar{x} = \frac{328,5}{6} = 54,8; S^2 = \frac{10,07}{6-1} = 2,01; S = \sqrt{2,01} = 1,42;$$

$$m = \frac{1,42}{\sqrt{6}} = 0,58; \varepsilon = \frac{0,58}{54,8} \cdot 100 = 1,058\%; V_c = \frac{1,42}{54,8} \cdot 100 = 2,59\%$$

$$\tau_i = \frac{56,7 - 54,8}{1,42} = 1,338;$$

$\tau_{табл} = 2,0$ ($n = 6$ $p = 5\%$); $\tau_i < \tau_{табл}$.

Таким образом, из приведенного статистического анализа следует, что средняя активность цемента $\bar{x}$ равна 54,8 МПа, ее абсолютная изменчивость S – 4,483 МПа, относительная изменчивость V_c – 2,59%; среднеквадратическая ошибка среднего арифметического m=0.58. Показатель точности ε равен 1,058 %. Все 6 испытаний однородны, при их проведении грубой ошибки не допущено.

Пример 1.2. *Определить количество образцов ,необходимых для испытания прочности бетона при V_c =8%, доверительной вероятности 95% и показателе точности 5%.*

Воспользуемся формулой (1.6). Значения t найдем из табл. 1.1.

$$t_{табл.}=1{,}96(f=\infty); \quad n=\frac{8^2\cdot 1.96}{5^2}=\frac{64\cdot 3.84}{25}=9.83\ .$$

Следовательно, при заданных условиях достаточно взять для испытания 10 образцов.

1.2. Корреляция и регрессия

При испытании строительных материалов в ряде случаев необходимо найти количественную зависимость между измеряемым свойством (выходной параметр Y) и технологическими факторами (X_i). Такая зависимость может быть *функциональной* или *корреляционной*. В первом случае функция и аргументы связаны строго и однозначно. Например, при испытании прочности образцов определенного размера каждой величине разрушающей нагрузки соответствует строго определенный предел прочности материала. При корреляционной зависимости одному значению независимой переменной может отвечать некоторая совокупность значений выходного параметра. При линейной корреляции теснота связи Y-X_i выражается *коэффициентом корреляции,* который может находиться в интервале от –1 до +1. Чем выше абсолютная величина коэффициента, тем теснее связь и наоборот. Знак коэффициента показывает характер связи: "+" – прямая, т.е. с увеличением X возрастает Y, а "–" – обратная. Предельные значения коэффициента (±1; 0) показывают, что между переменными существуют соответственно строго линейная связь или они линейно не коррелированны. Для проверки гипотезы о наличии или отсутствии корреляции необходимо сравнить выборочный коэффициент корреляции (r) с табличным ($r_{1-p/2}$). Коэффициент корреляции будет значимым, если удовлетворяется неравенство $\left|r\right| \triangleright r_{1-p/2}$. В табл. 1.4 приведены значения $r_{1-p/2}$ для двух уровней значимости при различном количестве степеней свободы f.

Коэффициент корреляции между двумя случайными величинами называют *коэффициентом парной корреляции.* Его находят по формуле

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}. \qquad (1.8)$$

Для определения тесноты связи между несколькими переменными служит *коэффициент множественной корреляции.* Он изменяется от 0 до +1. Множественный коэффиент корреляции величины x с величинами y и z можно найти по формуле:

$$r_{xyz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}}, \qquad (1.9)$$

где r_{xy}, r_{xz} и r_{yz} –коэффициенты парной корреляции, рассчитанные по формуле (1.8).

Таблица 1.4

Значения $r_{1-p/2}$

f	p,%		f	p,%		f	p,%	
	1	5		1	5		1	5
1	1	0,997	6	0,834	0,707	12	0,661	0,532
2	0,99	0,95	7	0,798	0,666	15	0,606	0,482
3	0,959	0,878	8	0,765	0,632	20	0,537	0,423
4	0,917	0,811	9	0,735	0,602	30-40	0,393	0,304
5	0,874	0,754	10	0,708	0,576	60	0,325	0,25
						100	0,254	0,195

Для криволинейных зависимостей теснота связи оценивается *корреляционным отношением* η_{xy}.

Оценка зависимости случайных величин по коэффициентам корреляции называется *корреляционным анализом.*

Для выражения количественной связи между изучаемым выходным параметром и факторами устанавливают вид уравнения на основе изучения характера экспериментальных кривых и качественного анализа исследуемого явления.

Зависимость средних значений изучаемого параметра от влияющих факторов называется *регрессией.* В экспериментальной практике находят уравнения приближенной регрессии. В общем виде задача ставится так: по данной выборке (x_1, y_1), (x_2, y_2)...(x_n, y_n) найти уравнение приближенной регрессии и оценить допускаемую при этом ошибку. Простейшим видом уравнения регрессии является линейное уравнение, выражаемое следующей формулой:

$$y = \alpha + \beta x \ , \qquad (1.10)$$

где α и β – коэффициенты уравнения, для определения которых применяют *принцип наименьших квадратов*.

В общем виде этот принцип формулируется так: наилучшее уравнение приближенной регрессии дает та функция из рассматриваемого класса, для которой сумма квадратов $S = \sum_{I=I}^{n}\left[y_i - f(x_i)\right]^2$ имеет наименьшее значение. Для вычисления коэффициентов уравнения приближенной регрессии находят и решают систему нормальных уравнений из условия минимизации величины S:

$$\frac{dS}{d\alpha} = 0; \frac{dS}{d\beta} = 0 \, . \qquad (1.11)$$

В результате решения такой системы значения коэффициентов уравнения регрессии будут равны:

$$\beta = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}; \qquad (1.12)$$

$$\alpha = \frac{\sum y_i - \beta \sum x_i}{n} = \bar{y} - \beta \bar{x} \, , \qquad (1.13)$$

Если известен коэффицент корреляции r_{xy}, можно коэффициент β найти по формуле: $\beta = r_{xy} \frac{S_y}{S_x}$, где S_y и S_x – средние квадратические отклонения. В этом случае линейная регрессия примет вид корреляционного уравнения:

$$y = \bar{y} + r_{xy} \frac{S_y}{S_x}\left(x - \bar{x}\right). \qquad (1.14)$$

Проверка адекватности уравнения регрессии экспериментальным данным проводится по *критерию Фишера* (F-критерию):

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_y^2} \, , \qquad (1.15)$$

где $S^2_{ад}$ – остаточная дисперсия (*дисперсия адекватности*), характеризующая рассеяние экспериментальных данных относительно линии регрессии:

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n - к - 1}, \tag{1.16}$$

($\hat{y}_i$ – расчетные значения зависимой переменной; $к$ – число независимых переменных (технологических факторов));

S^2_y – дисперсия фактических значений y, или *дисперсия воспроизводимости,* вычисляемая по формуле:

$$S^2_y = \frac{\sum(y_i - \bar{y})^2}{n - 1}. \tag{1.17}$$

Гипотеза об адекватности линейного регрессионного уравнения принимается, если расчетное значение F-критерия не превышает табличного с определенной (обычно 95%-ной) доверительной вероятностью (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Табличное значение критерия Фишера F_m
(уровень значимости P=0,05)

Большей	Число степеней свободы для дисперсии меньшей f_2							
f_1	1	3	5	10	20	50	100	∞
1	161	216	230	242	248	252	253	254
2	18,1	19,2	19,3	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5
3	10,1	9,3	9,0	8,8	8,7	8,6	8,6	8,5
4	7,7	6,6	6,3	6,0	5,8	5,7	5,7	5,6
5	6,6	5,4	5,1	4,7	4,6	4,4	4,4	4,4
10	5,0	3,7	3,3	3,0	2,8	2,6	2,6	2,5
20	4,4	3,1	2,7	2,4	2,1	2,0	1,9	1,8
100	3,9	2,7	2,3	1,9	1,7	1,5	1,4	1,3
∞	3,8	2,6	2,2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0

Пример 1.3. *Определить коэффициент корреляции между пределом прочности на сжатие бетона (у, МПа) и расходом цемента*

(x, кг) при постоянном начальном водосодержании бетонной смеси и уровне значимости 5%.

Данные экспериментов и расчетов приведены в табл. 1.6.

Коэффициент корреляции рассчитываем по формуле(1.8):

$$r_{xy} = \frac{230,2}{\sqrt{1000 \cdot 68,54}} \approx +0,88.$$

Полученное значение коэффициента корреляции показывает, что характер связи прямой, т.е. с увеличением расхода цемента предел прочности на сжатие бетона растет. Для проверки гипотезы о наличии корреляции сравниваем коэффициент r_{xy} с табличным $r_{1-p/2}$, установленым по табл. 1.4:

$$r_{1-p/2} = 0,602(f = 10 - 1 = 9;\ p = 5\%).$$

Удовлетворяется неравенство $r_{xy} > r_{1-p/2}$, т.е. коэффициент корреляции значимый.

Таблица 1.6

Экспериментальные и расчетные данные для определения коэффициента корреляции r_{xy}

№ п/п	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x}) \times (y_i - \bar{y})$
1	283	25,6	0	0	-0,4	0,16	0
2	272	24,2	-11	121	-1,8	3,24	19,8
3	269	21,8	-14	196	-4,2	17,64	58,8
4	290	28,4	7	49	2,4	5,76	16,8
5	290	25,6	7	49	-0,4	0,16	-2,8
6	295	30,7	12	144	4,7	22,09	56,4
7	295	29,0	12	144	3,0	9,00	36,0
8	291	26,8	8	64	0,8	0,64	6,4
9	275	23,1	-8	64	-2,9	8,41	23,2
10	270	24,8	-13	169	-1,2	1,44	15,6
	$\sum$=2830 $\bar{x}$=283	$\sum$=260,0 $\bar{y}$=26,0		$\sum$=1000		$\sum$=68,54	$\sum$=230,2

Пример 1.4. *По данным примера 1.3 найти линейное уравнение регрессии.*

Расчеты коэффициентов регрессии β и α выполняем по формулам (1.12; 1.13). Для этого воспользуемся данными табл. 1.6 и рассчитаем дополнительно: $\sum x_i y_i = 73810{,}2$; $\sum x_i^2$ =801890.

Получаем:

$$\beta = \frac{10 \cdot 73810{,}2 - 2830 \cdot 260}{10 \cdot 801890 - 8008900} = 0{,}2302$$

$$\alpha = \frac{260 - 0{,}2302 \cdot 2830}{10} = -39{,}146 .$$

Уравнение регрессии имеет вид:

$$y = -39{,}146 + 0{,}2302x .$$

Результаты расчетов для определения F-критерия с целью проверки адекватности уравнения регрессии приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Экспериментальные и расчетные данные для определения F-критерия

№ п/п	x_i	y_i	$y_i - \bar{y}$	$(y_i - \bar{y})^2$	$\hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y}_i)$	$(y_i - \hat{y})^2$
1	283	25,6	-0,4	0,16	26,0	-0,4	0,16
2	272	24,2	-1,8	3,24	23,47	0,73	0,5329
3	269	21,8	-4,2	17,64	22,78	-0,98	0,9604
4	290	28,4	2,4	5,76	27,61	0,79	0,6241
5	290	25,6	-0,4	0,16	27,61	-2,01	4,0401
6	295	30,7	4,7	22,09	28,76	1,94	3,7636
7	295	29,0	3,0	9,0	28,76	0,24	0,0576
8	291	26,8	0,8	0,64	27,84	-1,04	1,0816
9	275	23,1	-2,9	8,41	24,16	-1,06	1,1236
10	270	24,8	-1,2	1,44	23,01	1,79	3,2041
n=10	∑ =2830	∑=260,0		∑=68,54			∑=15,548
	$\bar{x}$ =283	$\bar{y}$=26,0					

Используя формулы (1.16, 1.17), определяем дисперсию адекватности и дисперсию фактических значений y_i (дисперсию воспроизводимости):

$$S^2_{ад} = \frac{15{,}548}{10-1-1} = 1{,}9435; \quad S^2_y = \frac{68{,}54}{10-1} = 7{,}615\,.$$

По формуле(1.15) найдем критерий Фишера:

$$F_{розрах} = \frac{1{,}9435}{7{,}615} = 0{,}255\,.$$

Табличные значения $F_{табл}$ находим по табл. 1.5 ($f_2=10\text{-}1\text{-}1=8;$ $f_1=10\text{-}1=9;$ $p=5\%$): $F_{табл}=3{,}26$.

Учитывая, что расчетное значение F- критерия меньше табличного при 95% доверительной вероятности, гипотезу об адекватности линейного уравнения можно считать верной.

1.3. Математическое планирование эксперимента

Под математическим планированием эксперимента понимают постановку опытов по заранее составленной схеме с оптимальными свойствами. Математическое планирование позволяет при минимально возможном количестве опытов решить задачу построения математической модели в виде уравнения регрессии, связывающего выходные параметры (например, свойства материала или показатели, характеризующие определенный процесс) с параметрами входа – разнообразными управляемыми количественными и качественными факторами, а затем использовать эту модель для анализа процесса, интерполяционных расчетов и оптимизации.

Эксперимент планируется в соответствии с типовой *матрицей*, т.е. таблицей из n строчек и m столбцов, в которой приводится набор комбинаций факторов, симметрично варьируемых относительно некоторого начала координат или нулевого (основного) уровня. Допустимая область варьирования факторов- (*факторное пространство*) выбирается на основе предварительного изучения объекта в соответствии с поставленной целью. Для упрощения записи условий эксперимента и обработки экспериментальных данных верхний уровень факторов кодируется +1, нижний –1, а основной соответствует 0. Кодирование факторов достигается с помощью формулы:

$$x_i = \frac{\tilde{x}_i - \tilde{x}_{i_0}}{\Delta\tilde{x}_i}, \qquad (1.18)$$

где x_i – кодированное значение фактора; $\tilde{x}_i$ – натуральное значение фактора, $\tilde{x}_{i_0}$ – натуральное значение фактора на основном уровне, $\Delta\tilde{x}_i$ – шаг (интервал) варьирования.

Вид планирования зависит от характера изучаемого явления. Планирование на двух уровнях применяют, если можно до опытов предположить прямолинейную связь между изучаемыми параметрами в избранной области варьирования факторов, а также для определения направления движения в область оптимальных значений выходных параметров. Оно позволяет получить модель в виде полинома первой степени, содержащего линейные члены $(\sum b_i x_i)$ и при необходимости взаимодействия первого порядка $(\sum b_{ij} x_i x_j)$. Такой полином можно представить уравнением регрессии вида:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{s=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j, \qquad (1.19)$$

где $\hat{y}$ – расчетное значение выходного параметра, b_0, b_i, b_{ij} – выборочные коэффициенты регрессии.

Величина линейных коэффициентов регрессии характеризует степень влияния факторов, а знак – его направление.

Для построения линейных и неполных квадратичных или кубических моделей применяют *полный факторный эксперимент* (ПФЭ), в котором предусмотрены все возможные комбинации факторов на двух уровнях (планирование типа 2^k, где k – число варьируемых факторов) или часть ПФЭ- *дробную реплику*, полученную делением ПФЭ обычно на число, кратное двум: полуреплику (планирование 2^{k-1}); ¼ реплики (планирование 2^{k-2}) и т.д.

В табл. 1.8 приведены матрицы планирования ПФЭ при k=2...4.

Для сокращенной записи матрицы применяют кодовые обозначения: (1) – строчка матрицы, когда все факторы на нижних уровнях: a,*b,c* и т.д.- строчки матрицы, в которых один из факторов соответственно x_1,x_2, x_3 и т.д. на верхнем уровне; произведение букв указывает, какие факторы в данной строчке на верхних уровнях (x_1 и x_2 – *ab*, x_2 и x_3 – *bc* и т.д.).

Используя кодовые обозначения, можно записать, например, матрицу 2^3 так: (1), *a, b, ab, c, ac, bc, abc.*

С увеличением числа факторов число опытов в матрице ПФЭ растет в соответствии с показательной функцией (2^k). Если возможно ограничиться линейным приближением или не учитывать некоторые взаимодействия факторов, целесообразно применение дробных реплик. Например, изучается влияние трех факторов и есть основания считать, что в избранной области варьирования процесс может быть описан линейной моделью. Для определения четырех коэффициентов регрессии (b_0, b_1, b_2 и b_3) достаточно четырех опытов. В матрице ПФЭ 2^2 (табл. 1.9) взаимодействие X_1X_2 приравниваем третьему фактору X_3 и получаем матрицу планирования 2^{3-1}, которую можно рассматривать как полуреплику ПФЭ 2^3.

Таблица 1.8

Матрицы ПФЭ (k=2...4)

Точки плана, *u*	Факторы				Выходной параметр, y_u
	X_1	X_2	X_3	X_4	
1	+1	+1	+1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	+1	y_2
3	-1	+1	+1	+1	y_3
4	-1	-1	+1	+1	y_4
5	+1	+1	-1	+1	y_5
6	+1	-1	-1	+1	y_6
7	-1	+1	-1	+1	y_7
8	-1	-1	-1	+1	y_8
9	+1	+1	+1	-1	y_9
10	+1	-1	+1	-1	y_{10}
11	-1	+1	+1	-1	y_{11}
12	-1	-1	+1	-1	y_{12}
13	+1	+1	-1	-1	y_{13}
14	+1	-1	-1	-1	y_{14}
15	-1	+1	-1	-1	y_{15}
16	-1	-1	-1	-1	y_{16}

После выполнения опытов в соответствии с матрицей планирования ПФЭ или дробной реплики рассчитывают коэффициенты уравнения регрессии по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{n} x_{i_u} y_u}{n}, \tag{1.20}$$

где x_{i_u} – кодированное значение фактора x_i у u-м опыте; y_u – значение выходного параметра в том же опыте.

Из общего выражения (1.20) можно найти расчетные формулы для коэффициентов регрессии b_0 и b_{ij}, которые имеют вид:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{n} y_u}{n}; \tag{1.21}$$

$$b_{ij} = \frac{\sum_{u=1}^{n} x_{i_u} x_{j_u} y_u}{n}; \tag{1.22}$$

Таблица 1.9

Полуреплика ПФЭ 2^3

№ опыта	x_0	Планирование		x_3 (x_1x_2)	y	Кодовое обозначение строк
		x_1	x_2			
1	+1	+1	+1	+1	y_1	*ab*
2	+1	-1	+1	-1	y_2	*b*
3	+1	+1	-1	-1	y_3	*a*
4	+1	-1	-1	+1	y_4	*(1)*

Примечание. При записи матриц планирования уровни часто обозначают "+" и "-".

Для технологического анализа и отбора существенных факторов наряду с проверкой адекватности уравнения выполняется также оценка *значимости коэффициентов регрессии*. Значимость коэффициентов регрессии b_i можно оценить, определив экспериментальное значение t- критерия и сравнив его с табличным:

$$t_i = \frac{|b_i|}{S_{b_i}}, \tag{1.23}$$

где S_{b_i} – среднее квадратическое отклонение при определении коэффициентов регрессии.

При изучении нелинейных зависимостей в широком диапазоне изменении факторов используют *планы второго порядка*. Для планов второго порядка каждый фактор необходимо планировать не меньше чем на трех уровнях: верхнем (+1), среднем (0) и нижнем (-1). Планы экспериментов для нахождения полных квадратичных зависимостей получают путем дополнения к ядру (ПФЭ или дробная реплика) дополнительных, так называемых “звездных”, а, в некоторых случаях, и “нулевых”точек (Прил. Б ,табл. 3…7).

На практике для экспериментальных исследований в технологии бетонов и растворов чаще всего используют двух-, трех-, четырех- и пятифакторные планы (Прил..Б, табл.3…7).

Результаты опытов обрабатывают с помощью методов математической статистики, получая квадратичные уравнения регрессии в общем виде для k факторов:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i=1}^{k} b_{ii} x_i^2 + \sum_{i \neq j} b_{ij} x_i x_j \ . \tag{1.24}$$

Для этих планов коэффициенты b_0, b_i, b_{ii}, b_{ij} уравнений регрессии соответственно рассчитывают по формулам:

$$b_0 = T_1(O_y) - T_2 \sum_{i=1}^{k} (iiy); \tag{1.25}$$

$$b_i = T_3(iy); \tag{1.26}$$

$$b_{ii} = T_4(iiy) + T_5 \sum_{i=1}^{k} (iiy) - T_2(O_y); \tag{1.27}$$

$$b_{ij} = T_6(ijy), \tag{1.28}$$

$$O_y = \sum_{u=1}^{N} y_u \qquad (1.29); \qquad (iy) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} y_u \ ; \tag{1.30}$$

$$(ijy) = \sum_{u=1}^{N} x_{iu} x_{ju} y_u \quad (1.31); \quad (iiy) = \sum_{u=1}^{N} (x_{iu})^2 y_u \ , \tag{1.32}$$

где $T_1...T_6$ – параметры для расчета уравнений регрессии (табл. 1.10); N – количество точек плана.

“Построение”математической модели в виде уравнения регрессии можно считать завершенным, а саму модель использовать для анализа и принятия материаловедческих и технологических решений только после того, как алгебраичный расчет оценок коэффициентов будет дополнен статистическим анализом отдельных коэффициентов и модели в целом.

Таблица 1.10

Значения параметров $T_1...T_6$

Число факторов	Тип плана	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6
2	Двухфакторный	0,2632	0,1579	0,1667	0,5	-0,1053	0,25
3	Трехфакторный	0,1832	0,0704	0,1	0,5	-0,1268	0,125
4	B_4	0,2292	0,0625	0,0556	0,5	-0,1042	0,0625
5	Ha_5	0,138	0,0303	0,0556	0,5	-0,0909	0,0625

Необходимые расчеты для получения и анализа математических моделей рекомендуется выполнять на персональном компьютере при помощи соответственного программного обеспечения.

Пример 1.5. *Построить математическую модель прочности на сжатие бетона в возрасте 28 сут с целью корректирования цементно-водного отношения (Ц/В) бетона (x_1) с проектной прочностью 10…40 МПа и осадкой конуса бетонной смеси ОК – 3...5 см в зависимости от активности цемента $R_ц$ (x_2), модуля крупности $M_{кр}$ (x_3)и содержания отмучиваемых примесей, $Q_{отм}$ (x_4) в заполнителе.*

Опыты выполняли в соответствии с планом ПФЭ 2^4 (табл. 1.8). Условия планирования эксперимента приведены в табл. 1.11.

В качестве исходных материалов приняты портландцемент с минеральными добавками, кварцевый песок и гранитный щебень фракции 5...20 мм.